

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

(ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ  
В ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ)  
XX

СБОРНИК РАБОТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА  
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Под редакцией  
В. И. ДМИТРИЕВА и А. С. ИЛЬИНСКОГО

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
1973

*Из содержания Т.20, 1973г.,*

<i>В.И. Дмитриев, Е. В. Захаров, Ю. В. Пименов.</i> Методы расчета электромагнитных полей в задачах дифракции на идеально проводящих поверхностях.	<b>106</b>
<i>В. И. Дмитриев, Е. В. Захаров.</i> Метод расчета поля постоянного тока в неоднородных проводящих средах.	<b>175</b>
<i>В. И. Дмитриев, Е. В. Захаров, Г. А. Кокотушкин.</i> О влиянии локальных поверхностных неоднородностей на магнито-теллурическое зондирование.	<b>187</b>
<i>В. И. Дмитриев, Е. В. Захаров, Н. А. Мерцикова.</i> О методе расчета магнито-теллурического поля над вертикальным контактом.	<b>207</b>
<i>В. И. Дмитриев, Е. В. Захаров, Я. Я. Кокин.</i> Дифракция электромагнитных волн на идеально проводящем диске, погруженном в слоистую среду.	<b>220</b>
<i>И. М. Денисова, Е. В. Захаров, Г. А. Кокотушкин.</i> Магнито-теллурическое поле в кусочно-слоистой среде.	<b>230</b>
<i>В. И. Дмитриев, Т. Л. Руднева.</i> Об обратной задаче глубинного магнито-теллурического зондирования.	<b>241</b>
<i>А. Н. Тихонов, В. И. Дмитриев, А. В. Чечкин, Н. И. Березина.</i> Развитие вариационных методов решения задач синтеза антенн.	<b>246</b>
<i>А. В. Чечкин.</i> Метод формирования, амплитудной диаграммы.	<b>270</b>
<i>А. С. Барашков, В. И. Дмитриев.</i> Обратные задачи зондирования ионосферы.	<b>315</b>

В. И. ДМИТРИЕВ, Е. В. ЗАХАРОВ, Ю. В. ПИМЕНОВ  
**МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ  
 В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ НА ИДЕАЛЬНО  
 ПРОВОДЯЩИХ ПОВЕРХНОСТЯХ**

Анализ многих вопросов, возникающих в антенной технике, требует решения задачи дифракции электромагнитных волн на телах сложной конфигурации. К таким задачам сводится, например, анализ излучения и взаимного влияния антенн, расположенных вблизи различных объектов, а также анализ излучения зеркальных и рефлекторных антенн.

В ряде практически важных случаев продольные размеры объекта, вблизи которого располагается антенна, велики по сравнению с длиной волны  $\lambda$ . В этом случае часто металлический объект можно аппроксимировать идеально проводящей поверхностью (как замкнутой, так и незамкнутой), бесконечно протяженной вдоль образующей. Кроме того, во многих случаях оказывается возможным вместо реальной антенны рассматривать элементарный излучатель: элементарный электрический (или магнитный) вибратор или синфазную токовую нить, параллельную цилиндрической поверхности. В последнем случае реальные задачи сводятся к так называемым плоским задачам дифракции.

В настоящей работе рассматриваются плоские задачи дифракции монохроматических электромагнитных волн на идеально проводящих цилиндрических поверхностях (как замкнутых, так и незамкнутых). Все рассматриваемые задачи сведены к интегральным уравнениям Фредгольма I или II рода, для которых предложены алгоритмы численных решений. На основе численного решения интегральных уравнений проведен расчет диаграмм направленности синфазной токовой нити, расположенной вблизи конкретных цилиндрических поверхностей. В качестве частного случая рассмотрено также падение плоской волны на идеально проводящую полосу и проведено сравнение численных результатов с низкочастотной асимптотикой плотности тока, наведенного на полосу.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим дифракцию гармонических во времени (зависимость  $e^{i\omega t}$ ) электромагнитных волн на идеально

проводящей бесконечно тонкой<sup>1</sup> неограниченно протяженной вдоль образующей цилиндрической поверхности  $S$ , расположенной в однородной изотропной среде без потерь, характеризуемой диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и магнитной проницаемостью  $\mu$ . Введем декартову систему координат  $x, y, z$  таким образом, чтобы ось  $z$  была параллельна образующим цилиндрической поверхности. Первичное поле в среде (при отсутствии поверхности  $S$ ) будем считать плоским, не зависящим от переменной  $z$  ( $\partial/\partial z \equiv 0$ ). В этом случае уравнения Максвелла распадаются на две системы уравнений:

$$1) H_x = -\frac{i}{\omega\mu} \frac{dE_z}{dy}, H_y = \frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x}; 2) E_x = \frac{i}{\omega\epsilon} \frac{dH_z}{dy}, E_y = -\frac{i}{\omega\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x}.$$

Первой группе уравнений удовлетворяют поля, имеющие составляющие  $E_z, H_x$  и  $H_y$  ( $E$ -поляризованные поля), а второй группе уравнений — поля с составляющими  $E_x, E_y$  и  $H_z$  ( $H$ -поляризованные поля).

Как известно, полное поле  $\vec{E}, \vec{H}$  в случае плоской задачи электродинамики всегда можно представить в виде суперпозиции двух независимых  $E$  и  $H$  поляризованных полей. Поэтому каждую из поляризаций можно рассматривать независимо от второй. Задача будет решена, если найдены компоненты  $E_z(x, y)$  и  $H_z(x, y)$ , удовлетворяющие (вне области источников первичного поля) уравнению Гельмгольца:  $\Delta u + k^2 u = 0$ , где  $k = \omega \sqrt{\epsilon\mu} = \frac{2\pi}{\lambda}$  и граничным условиям на поверхности  $S$

$$E_z|_{\Gamma} = 0, \quad \left. \frac{\partial H_z}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0, \quad (1)$$

где  $\Gamma$  — контур, образованный пересечением поверхности  $S$  с плоскостью  $XOY$ , а  $\partial H_z/\partial n$  — производная функции  $H_z$  по нормали к контуру  $\Gamma$ . Кроме того, для вторичного поля  $\vec{E}_1 = \vec{E} - \vec{E}^0$ ;  $\vec{H}_1 = \vec{H} - \vec{H}^0$  должно выполняться условие излучения, а в тех случаях, когда поверхность  $S$  имеет ребра или острые края (это всегда имеет место в случае незамкнутых поверхностей), должно также выполняться условие на ребре [1]. Можно показать, что поставленная задача дифракции имеет единственное решение.

**2. Вывод интегральных уравнений.**

I. Незамкнутые цилиндрические поверхности.  
 а)  $E$ -поляризованные поля.

Под воздействием первичного  $E$ -поляризованного поля  $\vec{E}^0 = z_0 E_z^0(x, y)$ ;  $\vec{H}^0 = x_0 H_x^0(x, y) + y_0 H_y^0(x, y)$  на поверхности  $S$  наво-

<sup>1</sup> Условие бесконечно малой толщины существенно только для незамкнутых поверхностей. Идеально проводящая замкнутая поверхность эквивалентна сплошному телу.

дятся электрические токи с плотностью  $\vec{j}$ , параллельные оси  $Z$ :  $\vec{j} = \vec{z}_0 j(M)$ ,  $M \in \Gamma$ .

Напряженность полного электрического поля  $\vec{E} = \vec{z}_0 E_z(x, y)$  в любой точке  $N = N(x, y)$  плоскости  $XOY$  (рис. 1) может быть записана в виде

$$\vec{E} = \vec{z}_0 \left\{ E_z^0(x, y) - \frac{\omega\mu}{4} \int_{\Gamma} j(M) H_0^{(2)}(kR_{MN}) dl_M \right\}, \quad (2)$$

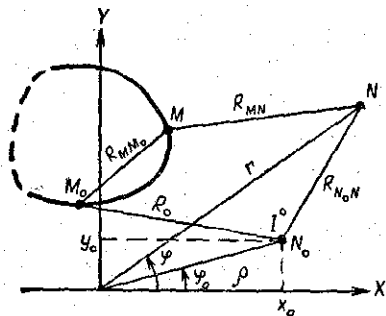


Рис. 1

$$\frac{\omega\mu}{4} \int_{\Gamma} j(M) H_0^{(2)}(kR_{MM_0}) dl_M = E_z^0(x_{M_0}, y_{M_0}); M_0 \in \Gamma, \quad (3)$$

где

$$R_{MM_0} = \sqrt{(x_M - x_{M_0})^2 + (y_M - y_{M_0})^2}.$$

Если первичное поле создается нитью с током  $I^0$ , проходящей через точку  $N_0 = N_0(x_0, y_0)$  параллельно оси  $Z$ , то

$$E_z^0(x_{M_0}, y_{M_0}) = -\frac{\omega\mu}{4} I^0 H_0^{(2)}(kR_0), \quad (4)$$

где

$$R_0 = \sqrt{(x_{M_0} - x_0)^2 + (y_{M_0} - y_0)^2}.$$

Если же первичное поле — плоская волна, направление распространения которой составляет с осями  $X$  и  $Y$  углы  $\theta + \pi$  и  $\theta + \frac{\pi}{2}$  соответственно, то

$$E_z^0(x_{M_0}, y_{M_0}) = E_0 e^{ik(x_{M_0} \cos \theta + y_{M_0} \sin \theta)}. \quad (5)$$

Зададим контур  $\Gamma$  (считая его кусочно гладким) в параметрической форме уравнениями

$$x_M = x(t), \quad y_M = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta. \quad (6)$$

При этом уравнение (3) примет вид

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{\beta} j(t) H_0^{(2)}[kR(\tau, t)] \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \\ & = \frac{4}{\omega\mu} E_z^0[x(\tau), y(\tau)]; \quad \alpha \leq \tau \leq \beta. \end{aligned} \quad (7)$$

Перейдем в уравнении (7) к безразмерным переменным. Для этого выразим  $x$  и  $y$  в долях некоторого размера, характерного для контура  $\Gamma$ . Пусть  $a$  такой размер. Обозначим через

$$\xi(t) = \frac{x(t)}{a}, \quad \eta(t) = \frac{y(t)}{a}, \quad D(\tau, t) = \frac{R(\tau, t)}{a}, \quad \gamma = ka \quad (8)$$

и введем функцию

$$u(t) = \frac{aj(t)}{C}, \quad (9)$$

где  $C$  — некоторая постоянная, имеющая размерность тока. Значение постоянной  $C$  выбирается в зависимости от вида первичного поля и будет определено ниже для первичного поля вида (4) и (5). Подставляя (8) и (9) в (7), получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{\beta} u(t) H_0^{(2)}[\gamma D(\tau, t)] \sqrt{\xi'^2(t) + \eta'^2(t)} dt = \\ & = \frac{4}{\omega\mu C} E_z^0[\alpha\xi(\tau), a\eta(\tau)]; \quad \alpha \leq \tau \leq \beta, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$D(\tau, t) = \sqrt{[\xi(\tau) - \xi(t)]^2 + [\eta(\tau) - \eta(t)]^2}.$$

Если первичное поле создается нитью с током  $I^0$ , т. е. функция  $E_z^0$  определяется формулой (4), то постоянная  $C = I^0$ , и уравнение (10) принимает вид

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{\beta} u(t) H_0^{(2)}[\gamma D(\tau, t)] \sqrt{\xi'^2(t) + \eta'^2(t)} dt = \\ & = -H_0^{(2)}[\gamma\delta(\tau)], \quad \alpha \leq \tau \leq \beta, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\delta(\tau) = \frac{R_0}{a} = \sqrt{[\xi(\tau) - \xi_0]^2 + [\eta(\tau) - \eta_0]^2}, \quad \xi_0 = \frac{x_0}{a}, \quad \eta_0 = \frac{y_0}{a}.$$

Если первичное поле — плоская волна, т. е. функция  $E_z^0$  определяется формулой (5), то  $C = \frac{4E_0}{\omega\mu}$ , а уравнение (10) запишется следующим образом:

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(t) H_0^{(2)}[\gamma D(\tau, t)] \sqrt{\xi^*(t) + \eta^*(t)} dt = e^{i\gamma[\xi(\tau)\cos\theta + \eta(\tau)\sin\theta]}, \quad \alpha \leq \tau \leq \beta. \quad (12)$$

Ядро интегрального уравнения (10) имеет логарифмическую особенность при совпадении аргументов  $t$  и  $\tau$ . Если, как уже предполагалось, контур  $\Gamma$  кусочно-гладкий, то, используя результат работы [2], можно доказать существование решения уравнения (10) в классе  $H^*$ . Единственность решения уравнения этого типа следует из единственности решения соответствующей задачи дифракции.

Из общих физических представлений следует, что для незамкнутых поверхностей, для которых контур  $\Gamma$  — незамкнутая кривая, функция  $j(t)$  на краях поверхности (на концах интервала интегрирования  $t=\alpha$  и  $t=\beta$ ) будет иметь особенность типа  $1/\sqrt{\rho}$ , где  $\rho$  — расстояние до кромки. При разработке алгоритма численного решения уравнений вида (10) эта особенность будет учтена.

#### б) $H$ -поляризованные поля.

Под воздействием  $H$ -поляризованного поля  $\vec{E}^0 = \vec{x}_0 E_x^0(x, y) + \vec{y}_0 E_y^0(x, y)$ ,  $\vec{H}^0 = \vec{z}_0 H_z^0(x, y)$  на поверхности  $S$  наводятся электрические токи, перпендикулярные образующим поверхности  $S$  (оси  $Z$ ) с плотностью  $\vec{j} = \vec{j}(M)$ ,  $M \in \Gamma$ . Напряженность вторичного электрического поля в этом случае выражается через векторный потенциал  $\vec{A}$  и скалярный потенциал  $\Phi$  соотношением

$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi - i\omega\vec{A}. \quad (13)$$

Потенциалы  $\vec{A}$  и  $\Phi$  связаны условием калибровки

$$\text{div } \vec{A} = -i\omega\epsilon\mu\Phi. \quad (14)$$

Векторный потенциал  $\vec{A}$  выражается через плотность тока  $\vec{j}(M)$  формулой

$$\vec{A} = -\frac{i\mu}{4} \int_{\Gamma} \vec{j}(M) H_0^{(2)}(kR_{MN}) dl_M. \quad (15)$$

Так как в рассматриваемом случае (в отличие от случая  $E$ -поляризованного поля)  $\text{grad}\Phi \neq 0$ , то непосредственное применение

граничного условия (1) приводит уже не к интегральному, а к интегро-дифференциальному уравнению.

Однако если рассматриваемая поверхность совпадает с частью какой-либо координатной поверхности системы координат, допускающей разделение переменных, то задача дифракции  $H$ -поляризованного электромагнитного поля на этой поверхности также может быть сведена к интегральному уравнению Фредгольма I рода. Опишем методику вывода интегрального уравнения в случае цилиндрической поверхности.

Пусть поверхность  $S$  совпадает с частью координатной поверхности  $q_1 = q_1^0 = \text{const}$  системы координат  $q_1, q_2, z$ . На контуре  $\Gamma$  координата  $q_1$  имеет постоянное значение, равное  $q_1^0$ . Коэффициенты Ламе обозначим через  $h_1, h_2$  и  $h_3$ . В общем случае  $h_1$  и  $h_2$  являются функциями переменных  $q_1$  и  $q_2$ , а коэффициент  $h_3 \equiv 1$ . Значение любой функции на контуре  $\Gamma$  будем обозначать символом « $\sim$ », например:  $E_z^0|_{\Gamma} = \tilde{E}_z^0$ ,  $h_1(q_1, q_2)|_{\Gamma} = \tilde{h}_1$  и т. д.

Из граничного условия (1) и формулы (13) следует соотношение

$$i\omega\tilde{A}_z = \tilde{E}_z^0 - \frac{1}{h_2} \cdot \frac{d\tilde{\Phi}}{dq_2}, \quad (16)$$

где

$$\tilde{A}_z = -\frac{i\mu}{4} \int_{\Gamma} j(M) H_0^{(2)}(kR_{MM_0}) (\vec{\tau}_M^0, \vec{\tau}_{M_0}^0) dl_M,$$

а  $\vec{\tau}_M^0$  и  $\vec{\tau}_{M_0}^0$  — орты касательных к контуру  $\Gamma$  в точках  $M$  и  $M_0$  соответственно.

Если бы значения функции  $\tilde{\Phi}$  были известны, то уравнение (16) можно было бы рассматривать как интегральное уравнение для функции  $j(M)$ . В общем случае этого сделать нельзя. Однако функцию  $\tilde{\Phi}$ , а следовательно и функцию  $d\tilde{\Phi}/dq_2$ , можно представить в виде интеграла по контуру  $\Gamma$  от плотности тока  $j(M)$ . Для этого умножим обе части равенства (16) на  $\tilde{h}_1$ , продифференцируем по  $q_2$  и разделим на  $h_1 h_2$ . В результате получим

$$\frac{1}{\tilde{h}_1 \tilde{h}_2} \cdot \frac{d}{dq_2} \left( \frac{\tilde{h}_1}{\tilde{h}_2} \cdot \frac{d\tilde{\Phi}}{dq_2} \right) + \frac{i\omega}{\tilde{h}_1 \tilde{h}_2} \cdot \frac{d}{dq_2} (\tilde{h}_1 \tilde{A}_z) = \frac{1}{\tilde{h}_1 \tilde{h}_2} \cdot \frac{d}{dq_2} (\tilde{h}_1 \tilde{E}_z^0). \quad (17)$$

Учитывая условие калибровки (14), преобразуем второй член левой части равенства (17) следующим образом:

$$\frac{i\omega}{\tilde{h}_1 \tilde{h}_2} \cdot \frac{d}{dq_2} (\tilde{h}_1 \tilde{A}_z) \equiv \frac{i\omega}{h_1 h_2} \cdot \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 A_z)|_{\Gamma} =$$

$$= i\omega \operatorname{div} \vec{A}|_{\Gamma} - \frac{1}{h_1 h_2} \cdot \frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 A_n)|_{\Gamma} = k^2 \tilde{\Phi} - \frac{1}{h_1 h_2} \cdot \frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 A_n)|_{\Gamma}, \quad (18)$$

где

$$A_n = -\frac{i\mu}{4} \int_{\Gamma} j(M) H_0^{(2)}(kR_{MN}) (\vec{n}_N^0, \vec{\tau}_M^0) dM,$$

а  $\vec{n}^0$  — единичный вектор, соответствующий переменной  $q_1$ . Векторы  $\vec{n}^0$ ,  $\vec{\tau}^0$  и  $\vec{z}_0$ , определенные в одной точке, образуют праввинтовую систему:  $[\vec{n}_M^0, \vec{\tau}_M^0] = \vec{z}_0$ .

Подставляя (18) в (17), приходим к уравнению

$$\frac{1}{\tilde{h}_1 \tilde{h}_2} \cdot \frac{d}{dq_2} \left( \frac{\tilde{h}_1}{\tilde{h}_2} \cdot \frac{d\tilde{\Phi}}{dq_2} \right) + k^2 \tilde{\Phi} = \frac{1}{\tilde{h}_1 \tilde{h}_2} \cdot \frac{d}{dq_2} (\tilde{h}_1 \tilde{E}_{\tau}^0) + \frac{i\mu}{4} \int_{\Gamma} j(M) G(M, q_2) dM, \quad (19)$$

где

$$G(M, q_2) = \frac{1}{h_1 h_2} \cdot \frac{\partial}{\partial q_1} \{ h_2 H_0^{(2)}(kR_{MN}) (\vec{n}_N^0, \vec{\tau}_M^0) \}|_{\Gamma}.$$

Решая уравнение (19) и подставляя затем найденное выражение для функции  $\tilde{\Phi}$  в равенство (16), приходим к интегральному уравнению Фредгольма I рода, которое может быть записано в виде

$$\int_{\Gamma} j(M) K_1(M, M_0) dM = F(M_0) + C_1 \Psi_1(M_0) + C_2 \Psi_2(M_0), \quad M_0 \in \Gamma, \quad (20)$$

где  $K(M, M_0)$  и  $F(M_0)$  — известные функции, причем конкретный вид функции  $K(M, M_0)$  определяется только формой экрана, а

функция  $F(M_0)$  зависит от возбуждающего (первичного) поля. Функции  $\Psi_1(M_0) \equiv \Psi_1(q_2)$  и  $\Psi_2(M_0) \equiv \Psi_2(q_2)$  — линейно-независимые решения однородного уравнения, получающегося из (19) при правой части, равной нулю, а  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные, которые должны быть определены после решения уравнения (20) из условия обращения в нуль функции  $j(M)$  на краях

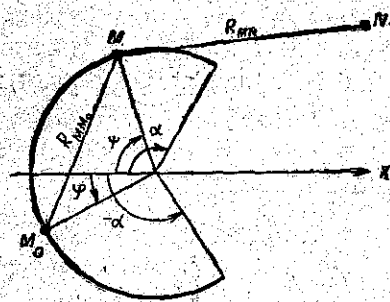


Рис. 2

рассматриваемой поверхности. Это условие является следствием условия на ребре и означает отсутствие стекания тока с поверхности.

В качестве примера применения изложенной методики рассмотрим два частных случая.

1. Пусть поверхность  $S$  совпадает с частью поверхности кругового цилиндра радиуса  $a$ . В этом случае контур  $\Gamma$  — часть окружности (рис. 2). Первичное поле в цилиндрических координатах имеет составляющие  $E_r^0(r, \varphi)$ ,  $E_{\varphi}^0(r, \varphi)$ ,  $H_z^0(r, \varphi)$ . Коэффициенты Ламе  $h_1=1$ ,  $h_2=r$ ,  $h_3=1$ .

Произведя указанные выше действия, приходим к уравнению

$$\frac{\mu\omega a}{4} \int_{-\alpha}^{\alpha} j(\psi) K(\varphi, \psi) d\psi = F(\varphi) + C_1 \sin \gamma \varphi + C_2 \cos \gamma \varphi, \quad -\alpha \leq \varphi \leq \alpha, \quad (21)$$

где

$$F(\varphi) = E_{\varphi}^0(a, \varphi) - \int_{-\alpha}^{\varphi} \frac{\partial E_{\varphi}^0(a, \xi)}{\partial \xi} \cos[\gamma(\varphi - \xi)] d\xi,$$

$$K(\varphi, \psi) = H_0^{(2)} \left( 2\gamma \left| \sin \frac{\varphi - \psi}{2} \right| \right) \cos(\varphi - \psi) + \int_{-\alpha}^{\varphi} \cos[\gamma(\varphi - \xi)] G(\psi, \xi) d\xi,$$

$$G(\psi, \xi) = \sin(\xi - \psi) \left\{ H_0^{(2)} \left( 2\gamma \left| \sin \frac{\xi - \psi}{2} \right| \right) - \gamma H_1^{(2)} \left( 2\gamma \left| \sin \frac{\xi - \psi}{2} \right| \right) \left| \sin \frac{\xi - \psi}{2} \right| \right\}.$$

Значения постоянных  $C_1$  и  $C_2$  должны быть определены после решения уравнения (21) из условий  $j(-\alpha) = j(\alpha) = 0$ .

2. Пусть поверхность  $S$  представляет собой идеально проводящую бесконечно тонкую полосу ширины  $2a$ , расположенную в плоскости  $XOZ$  симметрично относительно оси  $Z$ .

При возбуждении полосы  $H$ -поляризованным полем в ней наводятся электрические токи, параллельные оси  $X$ . Векторный потенциал  $\vec{A}$ , соответствующий наведенным токам имеет только одну составляющую  $A_x (\vec{A} = \vec{x}_0 A(x, y))$ . Это существенно упрощает ядро интегрального уравнения, так как функция  $G$  в этом случае оказывается равной нулю.

Интегральное уравнение для плотности токов, наведенных на полосу под воздействием  $H$ -поляризованного электромагнитного поля, было получено в работе [3] и имеет вид

$$\int_{-1}^1 j(at) H_0^{(2)}(\gamma|\tau - t|) dt = C_1 \sin \gamma\tau + C_2 \cos \gamma\tau +$$

$$+ 4 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_{-1}^{\tau} E_x^0(a\xi, 0) \sin[\gamma(\tau - \xi)] d\xi, \quad -1 \leq \tau \leq 1. \quad (22)$$

Входящие в (22) произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  должны быть определены после решения уравнения из условий  $j(a) = j(-a) = 0$ .

Уравнение (22) является интегральным уравнением Фредгольма I рода, ядро которого полностью совпадает с ядром интегрального уравнения (10), соответствующего случаю  $E$ -поляризованного поля. Ядро уравнения (21), а также ядро более общего уравнения (20), в отличие от ядра уравнения (10), состоит из двух слагаемых, одно из которых имеет логарифмическую особенность при совпадении аргументов, а второе — регулярно. Тем не менее уравнения (20) — (21) и (10) однотипны. Поэтому, исходя из единственности решения соответствующей дифракционной задачи, можно доказать, что решение уравнений (20) — (22) совместно с условиями обращения в нуль функции на краях поверхности является единственным и существует в классе  $H^*$ .

Отметим, что описанная выше методика вывода интегрального уравнения задачи дифракции  $H$ -поляризованного электромагнитного поля на идеально проводящей бесконечно тонкой поверхности в случае плоских поверхностей (полоса, полуплоскость) полностью совпадает с методикой вывода интегральных уравнений для плоских экранов, предложенной Гринбергом [4, 5].

## II. Замкнутые цилиндрические поверхности.

В случае замкнутых цилиндрических поверхностей, для которых контур  $\Gamma$  — замкнутая кривая (рис. 1), задача дифракции произвольного двумерного (не зависящего от координаты  $z$ ) монохроматического электромагнитного поля также распадается на две независимые задачи для  $E$ -поляризованного и  $H$ -поляризованного первичного полей.

В случае  $E$ -поляризованного первичного поля задача может быть сведена к интегральным уравнениям Фредгольма как первого, так и второго рода. Интегральное уравнение первого рода выводится так же, как и для незамкнутых поверхностей, и совпадает по форме с уравнением (3), а в случае задания контура в параметрической форме — с уравнением (10). Отличие состоит лишь в том, что функция  $j(M)$ , или функция  $u(t)$  в уравнении (10), в случае гладкого контура  $\Gamma$  уже не будет иметь особенностей ни в одной точке контура  $\Gamma$ .

В случае  $H$ -поляризованного первичного поля интегральное уравнение Фредгольма первого рода типа (3) может быть записано

только для поверхностей, совпадающих с координатной поверхностью какой-либо системы координат, допускающей разделение переменных. Однако написание и решение таких интегральных уравнений не представляет особого интереса, так как для замкнутых поверхностей можно получить достаточно простые интегральные уравнения Фредгольма второго рода. При этом уравнения для  $E$ - и  $H$ -поляризованных полей получаются однотипными, что позволяет разработать единый алгоритм решения соответствующих задач и дает возможность одновременного численного решения этих уравнений. Выведем интегральные уравнения второго рода.

а)  $E$ -поляризованные поля.

Под воздействием  $E$ -поляризованного первичного поля на поверхности  $S$  наводятся электрические токи, параллельные оси  $Z$  (перпендикулярные контуру  $\Gamma$ ). Напряженность полного электрического поля в любой точке  $N$  (рис. 1) определяется формулой (2), в которой только надо считать контур  $\Gamma$  замкнутым. Найдем касательную к контуру  $\Gamma$  составляющую напряженности магнитного поля в точке  $N$  и опустим точку  $N$  на контур  $\Gamma$ . В результате получим

$$H_\tau(M_0) = H_\tau^0(M_0) + \lim_{N \rightarrow M_0} \frac{\partial}{\partial n} \oint_{\Gamma} j(M) H_0^{(2)}(kR_{MN}) dl_M,$$

где  $M_0 \in \Gamma$ , а  $\frac{\partial}{\partial n}$  означает дифференцирование по [внешней нормали к контуру  $\Gamma$  в точке  $N$ . Учитывая, что]

$$\lim_{N \rightarrow M_0} \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{i}{4} \oint_{\Gamma} j(M) H_0^{(2)}(kR_{MN}) dl_M \right] = \frac{1}{2} j(M_0) +$$

$$+ \frac{i}{4} \oint_{\Gamma} j(M) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(kR_{MM_0}) dl_M,$$

а  $H_\tau(M_0) = j(M_0)$ , получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$j(M_0) - \frac{i}{2} \oint_{\Gamma} j(M) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(kR_{MM_0}) dl_M = 2H_\tau^0(M_0), \quad (23)$$

где  $M_0 \in \Gamma$ , а  $H_\tau^0(M_0)$  — касательная составляющая напряженности первичного магнитного поля в точке  $M_0$ , причем из уравнений

$$\text{Максвелла, следует, что } H_\tau^0(M_0) = -\frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial E_z^0(M_0)}{\partial n}.$$

б)  $H$ -поляризованные поля.

Под воздействием  $H$ -поляризованного электромагнитного поля на поверхности  $S$  наводятся электрические токи, перпендикулярные



образующим поверхности (оси  $Z$ ). Эти токи создают вторичное электромагнитное поле  $\vec{E}_1(N)$ ,  $\vec{H}_1(N)$ , вектор  $\vec{H}_1(N)$  которого имеет только составляющую  $H_{1z}(N)$ , а касательная составляющая вектора  $\vec{E}_1$  на контуре  $\Gamma$  равна  $-E_\tau^0|_\Gamma$ .

Предположим, что поле  $\vec{E}_1(N)$ ,  $\vec{H}_1(N)$  создается не электрическими токами, а некоторыми фиктивными магнитными токами, распределенными по поверхности  $S$  с плотностью  $\vec{j}^*(M) = z_0 \vec{j}^*(M)$ . Этим токам соответствует векторный потенциал  $\vec{A}^*(N) = z_0 \vec{A}^*(N)$ , где

$$A^*(N) = -\frac{i\epsilon}{4} \oint_{\Gamma} j^*(M) H_0^{(2)}(kR_{MN}) dl_M, \quad (24)$$

связанный с векторами  $\vec{E}_1(N)$  и  $\vec{H}_1(N)$  соотношениями

$$\vec{E}_1 = -\frac{1}{\epsilon} \text{rot } \vec{A}^*, \quad \vec{H}_1 = -i\omega \vec{A}^*. \quad (25)$$

Используя формулы (24)–(25), выразим вектор  $\vec{E}_1(N)$  в виде интеграла от плотности магнитного поля  $j^*(M)$  и потребуем, чтобы на контуре  $\Gamma$  выполнялось граничное условие (1). В результате приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$j^*(M_0) + \frac{i}{2} \oint_{\Gamma} j^*(M) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(kR_{MM_0}) dl_M = -2E_\tau^0(M_0), \quad M_0 \in \Gamma. \quad (26)$$

Определив функцию  $j^*(M)$  из уравнения (26), можно на основе формул (24)–(25) вычислить вторичное поле в любой точке  $N$ . Так как полное поле при этом будет удовлетворять граничным условиям (1), то найденное таким образом решение будет являться решением исходной задачи.

Заметим, что кроме уравнений (23) и (26) для рассматриваемой дифракционной задачи можно получить и другие интегральные уравнения [1]. Однако уравнения (23) и (26) с нашей точки зрения наиболее удобны.

Зададим контур  $\Gamma$  в параметрической форме (6) и перейдем к безразмерным переменным по формулам (8), т. е. выразим переменные  $x$  и  $y$  в долях некоторого размера  $a$ , характерного для контура  $\Gamma$ . При этом уравнения (23) и (26) могут быть переписаны в виде

$$u(\tau) - \kappa \int_{\alpha}^{\beta} u(t) K(t, \tau) dt = f(\tau), \quad \alpha \leq \tau \leq \beta, \quad (27)$$

где

$$K(t, \tau) = -\gamma \sqrt{\xi'^2(t) + \eta'^2(t)} H_1^{(2)}[\gamma D(t, \tau)] \frac{\partial D}{\partial n}, \quad (28)$$

$$\frac{\partial D}{\partial n} = \frac{\partial D}{\partial \xi(t)} \cos \delta_x + \frac{\partial D}{\partial \eta(t)} \cos \delta_y,$$

$\cos \delta_x$  и  $\cos \delta_y$  — направляющие косинусы внешней нормали к контуру  $\Gamma$  в точке  $M$ , определяемые соотношениями

$$\cos \delta_x = \frac{\xi'(t)}{\sqrt{\xi'^2(t) + \eta'^2(t)}}, \quad \cos \delta_y = \frac{\eta'(t)}{\sqrt{\xi'^2(t) + \eta'^2(t)}}.$$

Функции  $u(t)$ ,  $f(\tau)$  и параметр  $\kappa$  зависят от поляризации первичного поля. Для  $E$ -поляризации

$$\kappa = \frac{i}{2}, \quad u(t) = \frac{aj(t)}{C}, \quad f(\tau) = \frac{2a}{C} H_\tau^0[x(\tau), y(\tau)],$$

где  $C$  — некоторая постоянная, имеющая размерность электрического тока (ампер), значение которой выбирается в зависимости от первичного поля. Значения постоянной  $C$  для первичных полей вида (4) и (5) было определено выше.

Для  $H$ -поляризации

$$\kappa = -\frac{i}{2}, \quad u(t) = \frac{j^*(t)}{C^*}, \quad f(\tau) = -\frac{2a}{C^*} E_\tau^0[x(\tau), y(\tau)],$$

где  $C^*$  — некоторая постоянная, имеющая размерность магнитного тока (вольт), значение которой выбирается в зависимости от вида первичного поля аналогично значениям постоянной  $C$ . Например, если первичное поле создается линейным магнитным током величины  $I_0^*$ , параллельным оси  $Z$ , т. е. если

$$\vec{H}^0 = -z_0 \frac{i\omega\epsilon}{4} I_0^* H_0^{(2)}(kR_0), \quad (29)$$

удобно принять  $C^* = I_0^*$ . Если первичное поле — плоская волна, вектор  $\vec{H}^0$  которой параллелен оси  $Z$ , а направление распространения составляет с осями  $X$  и  $Y$  углы  $\theta + \pi$  и  $\theta + \frac{\pi}{2}$  соответственно, т. е. если

$$\vec{H}^0 = z_0 E_0 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} e^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)}, \quad (30)$$

удобно считать, что  $C^* = \frac{4aE_0}{\gamma}$ .

Таким образом исходная задача дифракции двумерного (не зависящего от  $z$ ) монохроматического электромагнитного поля на идеально проводящей замкнутой цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны оси  $Z$ , сведена к двум однотипным интегральным уравнениям Фредгольма второго рода с одним



и тем же ядром. Как видно, уравнения таковы, что допускают одновременное (точнее последовательное) их решение.

Отметим, что ядро уравнений (27) имеет действительные значения, что связано с наличием собственных колебаний внутренней области, ограниченной контуром  $\Gamma$  [1]. При разработке алгоритма предполагается, что решение уравнений (27) существует и единственно. Это имеет место, если волновое число  $k$  не совпадает с собственной частотой колебаний внутренней области. Так как ядро уравнений имеет точку накопления собственных значений в бесконечности (по волновому числу  $k$ ), то, решая задачу для тех относительно небольших размеров (по сравнению с длиной волны), естественно предположить, что мы не попадаем на точку спектра или можем отойти от нее, если попадание произойдет.

## 2. АЛГОРИТМЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

### 1. Незамкнутые цилиндрические поверхности.

Как было показано выше, решение задачи дифракции монохроматического двумерного (не зависящего от  $z$ ) электромагнитного поля на идеально проводящей бесконечно тонкой незамкнутой цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны оси  $Z$ , сводится к решению интегральных уравнений Фредгольма первого рода, ядра которых имеют логарифмическую особенность при совпадении аргументов. Известно, что приближенное (численное) решение интегральных уравнений Фредгольма второго рода можно получить, сводя их тем или иным способом к системе линейных алгебраических уравнений.

К интегральным уравнениям Фредгольма первого рода такой метод решения в общем случае неприменим из-за некорректности подобной задачи. Но ограничивая класс допустимых решений, делая какие-либо априорные предположения относительно свойств искомого решения, можно получить приближенные решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода сведением их к системе линейных алгебраических уравнений. При этом необходимо использовать также конкретные свойства ядра.

Основным априорным предположением, на котором основано численное решение уравнений рассматриваемого типа, является существование некоторого интервала, в пределах которого решение меняется слабо. Это в свою очередь приводит к ограничению на размеры контуров  $\Gamma$  по сравнению с длиной волны. Рассмотрим сначала  $E$ -поляризацию. В этом случае требуется решить уравнение (10). Ядро этого уравнения имеет логарифмическую особенность при совпадении аргументов  $t$  и  $\tau$ , а неизвестная функция  $u(t)$  имеет особенность на концах интервала интегрирования типа  $(\alpha\beta)^{-1/2}$ , где

$$\rho_\alpha = V[\xi(t) - \xi(\alpha)]^2 + [\eta(t) - \eta(\alpha)]^2,$$

$$\rho_\beta = V[\xi(\beta) - \xi(t)]^2 + [\eta(\beta) - \eta(t)]^2.$$

Если контур  $\Gamma$  гладкий, то

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} \frac{\rho_\alpha}{|t - \alpha|} = V\xi'^2(\alpha) + \eta'^2(\alpha), \quad \text{а} \quad \lim_{t \rightarrow \beta} \frac{\rho_\beta}{|t - \beta|} = V\xi'^2(\beta) + \eta'^2(\beta).$$

Поэтому характер особенности имеет вид  $[(t - \alpha)(\beta - t)]^{-1/2}$ . Выделяя эту особенность, приходим к уравнению

$$\int_{\alpha}^{\beta} v(t) K(t, \tau) dt = f(\tau), \quad \alpha \leq \tau \leq \beta, \quad (31)$$

где

$$v(t) = u(t) \sqrt{(t - \alpha)(\beta - t)}, \quad (32)$$

$$K(t, \tau) = H_0^{(2)}[\gamma D(\tau, t)] \frac{V\xi'^2(t) + \eta'^2(t)}{V(t - \alpha)(\beta - t)},$$

$$f(\tau) = \frac{4}{\text{оп}C} E_z^0 [a\xi(\tau), a\eta(\tau)].$$

Алгоритм численного решения уравнения (31) основан на тех же априорных предположениях, что и в работе [2], а именно, предполагается существование некоторого интервала  $h$ , на котором искомая функция  $v(t)$  меняется достаточно медленно. Разбивая интервал интегрирования на  $N$  частей длиной  $h = \frac{\beta - \alpha}{N}$ , приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^N v_j A_{ij} = f_i, \quad (33)$$

где

$$v_j = v\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right),$$

$$t_{j+\frac{1}{2}} = (\beta - \alpha) \frac{j - \frac{1}{2}}{N} + \alpha,$$

$$A_{ij} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} K(t, t_{i+\frac{1}{2}}) dt, \quad (34)$$

$$t_{i+\frac{1}{2}} = (\beta - \alpha) \frac{i + \frac{1}{2}}{N} + \alpha,$$

$$t_j = (\beta - \alpha) \frac{j-1}{N} + \alpha,$$

$$f_i = f\left(t_{i+\frac{1}{2}}\right).$$

В силу особенности ядра при совпадении аргументов матрица  $\{A_{ij}\}$  при не очень малых  $h$  будет устойчивой и из решения системы могут быть найдены значения неизвестной функции  $v(t)$  в  $N$  точках. Заметим, что для решения исходной краевой задачи достаточно найти какое-либо приближенное решение уравнения (31), которое в той или иной норме делает невязку уравнения малой. Степень точности решения можно выяснить после решения системы и вычисления невязки. Вычисление элементов матрицы  $\{A_{ij}\}$  в большинстве случаев осуществляется достаточно просто, хотя при некоторых  $i$  и  $j$  (в частности, когда  $j=i$  или  $j=1, j=N$ ) требуются дополнительные преобразования и соответствующие замены переменных.

Для пояснения сказанного рассмотрим, например, элемент  $A_{ii}$  при  $i \neq 1$ . В этом случае подынтегральное выражение в (34) имеет особенность при  $t=\alpha$ . Для устранения этой особенности в интеграле (34) нужно перейти к новой переменной  $v$ , связанной с  $t$  соотношением  $v^2 = t - \alpha$ .

Составленная по данному алгоритму программа позволяет решать исходное уравнение, сводя его к линейным алгебраическим системам с переменным порядком (до 75-го порядка) одновременно для пяти различных функций  $f(\tau)$ . Это означает, например, что в случае возбуждения поверхности полем линейного электрического тока ( $E_z^0$  определяется формулой (4)) программа позволяет решить задачу одновременно для пяти положений токовой нити, а в случае плоской волны, когда  $E_z^0$  определяется формулой (5), одновременно для пяти значений угла  $\theta$ .

Значения  $\xi(t)$ ,  $\eta(t)$ ,  $\xi'(t)$  и  $\eta'(t)$  вычисляются в отдельном блоке программы, который легко заменяем, что дает возможность проводить вычисления для экранов различной формы. Вычисление элементов матрицы  $\{A_{ij}\}$  производится стандартной программой вычисления интегралов методом Симпсона с автоматическим выбором шага без пересчета (подынтегральная функция вида  $U+iV$ ), которая позволяет менять точность вычисления интеграла в зависимости от длины интервала  $h$ . Имеется возможность варьировать величину вырезания особенности при вычислении диагональных элементов матрицы  $\{A_{ij}\}$ . В результате проведенных методических расчетов было установлено, что оптимальная величина вырезания особенности от  $10^{-5}$  до  $10^{-7}$  и погрешность интегрирования диагональных элементов матрицы  $10^{-4}$ .

Итак, мы рассмотрели алгоритм численного решения уравнения типа (31) для случая  $E$ -поляризации. Сделаем несколько замечаний относительно решения уравнения типа (31) для  $H$ -поляриза-

ции, остановившись для определенности на уравнении для полосы (22). Уравнение (22) отличается от (31) только правой частью, которая содержит две неопределенные постоянные  $C_1$  и  $C_2$ . Эти постоянные должны быть определены из условия  $j(a) = j(-a) = 0$ . Эта дополнительная трудность в реализации описанного алгоритма может быть преодолена следующим образом.

Решение уравнения (22), как и уравнения (31), представим в виде (9) и перейдем от функции  $u(t)$  к функции  $v(t)$  по формуле (32). При этом очевидно, что  $v(t) \sim A(1-t)$  при  $t \rightarrow 1$   $v(t) \sim B(1+t)$  при  $t \rightarrow -1$ , так как вблизи края незамкнутой цилиндрической поверхности  $j(at) \sim \sqrt{\rho}$ , где  $\rho$  — расстояние до края поверхности. Поэтому для определения констант  $C_1$  и  $C_2$  можно применить линейную интерполяцию в окрестности ребер. Так как правая часть уравнения (22) состоит из трех слагаемых, то необходимо найти решение для правой части, равной каждому из слагаемых в отдельности, потом через две ближайшие к каждому из ребер точки провести прямую, найти значения этих решений на концах интервала и из условия  $j(a) = j(-a) = 0$  определить  $C_1$  и  $C_2$ .

## II. Закрытые цилиндрические поверхности.

Решение двумерной задачи дифракции монохроматических электромагнитных волн на идеально проводящей замкнутой цилиндрической поверхности, как было показано выше, сводится к решению уравнений (27). Уравнение (27) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма второго рода с непрерывным ядром (28). Часто параметрическое задание контура  $\Gamma$  удобно осуществить с помощью натурального параметра  $s$  — длины дуги контура  $\Gamma$ . В этом случае уравнение (27) принимает вид

$$u(s^0) - \kappa \int_0^p u(s) K(s, s^0) ds = f(s^0), \quad 0 \leq s^0 \leq p. \quad (35)$$

Приближенное решение уравнения (35), или в общем случае (27), можно получить при помощи метода Боголюбова — Крылова [6], разбивая интервал интегрирования на  $N$  частей. Уравнение (35) при этом сводится к следующей системе алгебраических уравнений:

$$u\left(s^0_{i+\frac{1}{2}}\right) - \kappa \sum_{j=1}^N u\left(s^0_{j+\frac{1}{2}}\right) \int_{s_j}^{s_{j+1}} K\left(s, s^0_{i+\frac{1}{2}}\right) ds = f\left(s^0_{i+\frac{1}{2}}\right) \quad (36)$$

относительно значений функции и в средних точках интервалов разбиения. Заметим, что указанный способ сведения интегральных уравнений к алгебраическим целесообразно применять, когда искомое решение слабо меняется на интервале разбиения. Это дает возможность использовать предлагаемый метод для решения рассматриваемой задачи, одновременно накладывая естественные ограничения на размеры тела по сравнению с длиной волны.

Реализованный в виде программы на ЭВМ алгоритм позволяет получить приближенные значения функции  $u(s_{i+\frac{1}{2}})$ . При этом

сначала вычисляется матрица для  $E$ -поляризованного поля и находится решение системы; а затем, внося изменения в диагональные элементы полученной матрицы (вычитание двух единиц) и изменяя правую часть (функцию  $f(s^0)$ ), можно решить систему еще раз и найти значения  $u(s_{i+\frac{1}{2}})$  для  $H$ -поляризованного поля. Отметим,

что если первичные поля при  $E$ - и  $H$ -поляризации однотипны по принципу двойственности, например, определяются формулами (4) и (29) соответственно, или формулами (5) и (30), то правая часть остается неизменной.

Для относительно небольших размеров контура  $\Gamma$  (при небольшой кривизне) интеграл от ядра в (36) можно вычислить по формуле средних прямоугольников. В общем же случае необходимо производить интегрирование. Созданная программа позволяет проводить расчеты для тел с произвольным гладким контуром, для которого известно аналитическое задание.

**3. Результаты расчетов.** На основе описанных алгоритмов было проведено численное решение уравнения (10) для различных незамкнутых контуров  $\Gamma$  (отрезок прямой, часть окружности, часть параболы, угол), решение уравнения (22) для случая возбуждения полосы  $H$ -поляризованной плоской волной, а также решение уравнения (27) для контура  $\Gamma$ , имеющего форму окружности и овала (для  $E$ - и  $H$ -поляризации). Было найдено распределение токов на соответствующих поверхностях и рассчитаны диаграммы направленности. Ниже приводится часть полученных результатов.

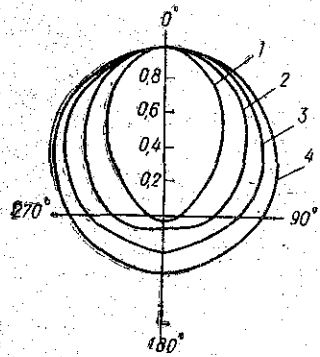


Рис. 3

На рис. 3 показаны диаграммы направленности токовой нити, расположенной вдоль фокальной линии параболического цилиндра при различных раскрытиях ( $2a$ ) цилиндра. Кривая 1 соответствует случаю  $ka = \pi$ ; кривая 2 —  $ka = \pi/2$ ; кривая 3 —  $ka = \pi/4$ , а кривая 4 — случаю  $ka = \pi/8$ . Приведенные данные показывают влияние поперечных размеров цилиндра при прочих равных параметрах (во всех случаях  $kp = 1$ , где  $p$  — фокальный параметр) на ширину диаграммы направленности.

На рис. 4, а приведена серия диаграмм направленности токовой нити, расположенной вблизи углового рефлектора, ширина полос ( $a$ ) которого равна длине волны  $\lambda$  ( $\gamma = ka = 2\pi$ ), а угол раскрытия  $90^\circ$  (рис. 4, б). Кривая 1 соответствует случаю  $kd = \pi$  ( $d$  — расстояние от ребра рефлектора до токовой нити); кривая 2 — случаю  $kd = 1,5\pi$ , а кривая 3 —  $kd = 2\pi$ . При-

веденные данные показывают зависимость диаграмм направленности углового антенны в поперечной плоскости от месторасположения излучателя.

На рис. 5 приведены нормированные диаграммы направленности вторичного поля, возникающего при падении плоской  $E$ -поляризованной волны (5) на идеально проводящую полосу ширины  $2a = 2\lambda$  для двух значений угла падения волны  $\theta$ : а)  $\theta = 0^\circ$  и б)  $\theta = 60^\circ$ .

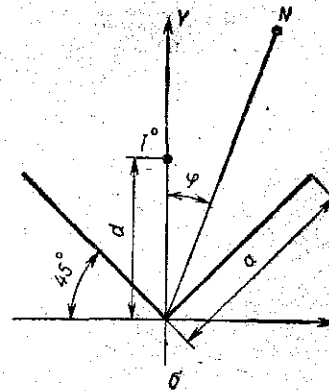
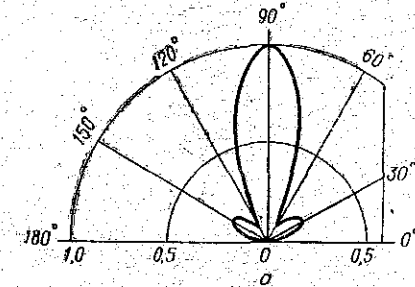
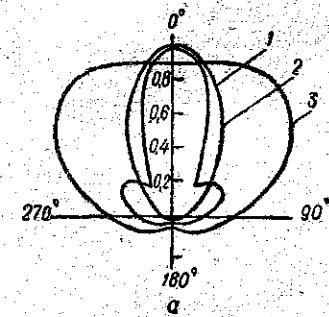


Рис. 4

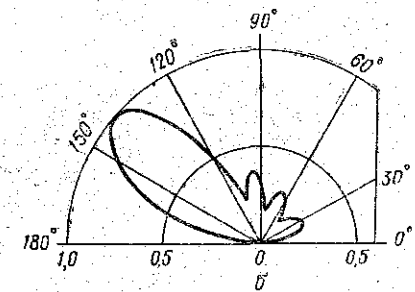


Рис. 5

На рис. 6 приведены аналогичные диаграммы для случая  $H$ -поляризованной плоской волны.

На рис. 7, а приведены диаграммы направленности линейного излучателя (токовой нити), расположенной вблизи замкнутой цилиндрической поверхности, контур  $\Gamma$  которой представляет собой овал (рис. 7, б). Параметры  $a$ ,  $l$  и  $y_0$ , определяющие форму контура  $\Gamma$  и положение излучателя указаны на рис. 7, б. Диаграммы рассчитаны для трех значений параметра  $kl$ :  $kl = 0$  (кривая 1);  $kl = \pi^2/8$  (кривая 2) и  $kl = \pi^2/2$  (кривая 3) при одном и том же положении излучателя  $kx_0 = 0$ ;  $ky_0 = 3$ . Отметим, что кривая 1 соответствует случаю, когда овал вырождается в круг (поверхность  $S$  в этом случае представляет собой поверхность кругового цилинд-

ра). Из приведенных данных видно, что увеличение длины  $l$  заметно усиливает затеняющее действие поверхности в области  $180^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$ , а также уменьшает ширину диаграммы направленности в области  $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ .

Большой интерес представляет сравнение распределения тока на полосе и полуплоскости при одинаковых источниках электромагнитного поля. Такое сравнение было проведено нами для случая,

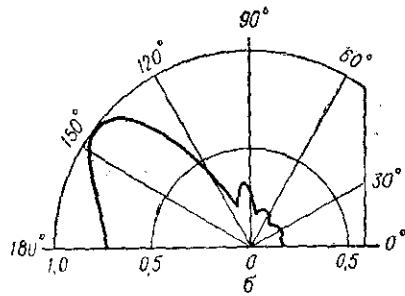
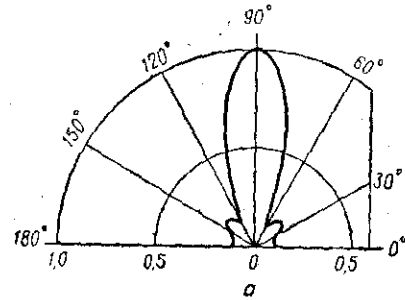


Рис. 6

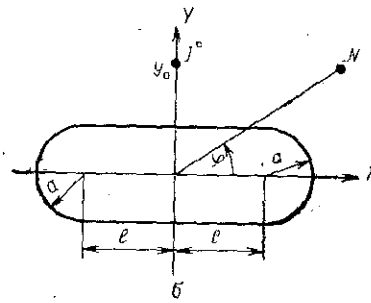
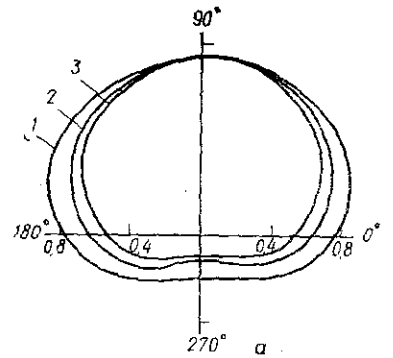


Рис. 7

когда первичное поле создается токовой нитью, расположенной в плоскости экрана параллельно краям полосы (полуплоскости) на расстоянии  $b=ld$  от нее, где  $l=2a$  — ширина полосы. Интегральное уравнение (10) для полосы в этом случае записывается следующим образом:

$$\int_0^1 u(t, kl) H_0^{(2)}(kl|\tau - t|) dt = -H_0^{(2)}[kl(\tau + d)], \quad 0 \leq \tau \leq 1 \quad (37)$$

а соответствующее интегральное уравнение для полуплоскости имеет вид

$$\int_0^\infty u(t, \infty) H_0^{(2)}(kl|\tau - t|) dt = -H_0^{(2)}[kl(\tau + d)], \quad 0 \leq \tau < \infty. \quad (38)$$

Решение уравнения (38) было получено в работе [7]

$$u(t, \infty) = -\frac{\sqrt{d} e^{-ikl(t+d)}}{\pi \sqrt{t} (t+d)}. \quad (39)$$

В результате численного решения уравнения (37) определялась функция  $v(t, kl) = u(t, kl) \sqrt{t(1-t)}$ , которая сравнивалась с функцией

$$v(t, \infty) = u(t, \infty) \sqrt{t(1-t)} = -\frac{\sqrt{d} e^{-ikl(t+d)}}{\pi (t+d)} \sqrt{1-t}. \quad (40)$$

Результаты расчетов, проведенные для случаев  $kl=\pi$ ;  $kl=2\pi$  и  $kl=4\pi$  при  $kb=kld=\pi/10$ , показывают, что функции  $v(t, kl)$  и  $v(t, \infty)$  практически совпадают.

Было проведено также сравнение численного решения интегрального уравнения для полосы с длинноволновой асимптотикой ( $ka \rightarrow 0$ ), полученной в [3]. Расчеты, проведенные для случая возбуждения полосы плоской волной ( $E$ - и  $H$ -поляризация), показывают, что первый член асимптотического разложения (по положительным степеням  $\gamma=ka$ ) дает удовлетворительный результат при  $\gamma < 0,3 \div 0,4$  для всех углов падения плоской волны.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Хенл Х., Мауэ А., Вестфаль К. Теория дифракции. М., «Мир», 1964.
2. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. О численном решении некоторых интегральных уравнений Фредгольма I-го рода. В сб.: «Вычисл. методы и программирование», вып. X. Изд-во МГУ, 1968.
3. Пименов Ю. В. Плоская задача дифракции электромагнитных волн на идеально проводящей полосе конечной ширины. ЖТФ, вып. 5, XXIX, 1959.
4. Гринберг Г. А., Пименов Ю. В. К вопросу о дифракции электромагнитных волн на бесконечно тонких идеально проводящих плоских экранах. ЖТФ, вып. 10, XXVII, 1957.
5. Гринберг Г. А. Метод решения задач дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих плоских экранах, основанный на изучении наводимых на экранах теневых токов. ЖТФ, вып. 3, XXVIII, 1958.
6. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М., Физматгиз, 1962.
7. Гринберг Г. А. Новый метод решения задачи дифракции электромагнитных волн на плоскости с безграничной прямолинейной щелью и родственными ей задач. ЖТФ, вып. 11, XXVII, 1957.

В. И. ДМИТРИЕВ, Е. В. ЗАХАРОВ

## МЕТОД РАСЧЕТА ПОЛЯ ПОСТОЯННОГО ТОКА В НЕОДНОРОДНЫХ ПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ

В настоящее время в электроразведке широко используются методы, основанные на анализе полей постоянных токов, для интерпретации результатов наблюдений которых имеют большое значение расчеты полей постоянного тока в неоднородных средах. Простейшие из таких задач могут быть решены методом интегральных преобразований, а в плоском случае также методом конформных отображений [1]. Следует отметить, что в теории методов электроразведки на постоянном токе отсутствуют эффективные решения задач для сложных по своей структуре неоднородных сред. Тем не менее практика геофизических исследований настоятельно требует решения именно такого класса задач, что позволит проводить более надежную интерпретацию результатов наблюдений в электроразведке на постоянном токе.

В настоящей работе предлагается метод нахождения потенциала  $u(M) = u(x, y, z)$  в среде с достаточно произвольным распределением проводимости [2]. Соответствующая задача для уравнения в частных производных редуцирована к интегральным уравнениям, приближенное решение которых можно получить численными методами. Рассматриваются конкретные структуры, представляющие интерес для теории электроразведки на постоянном токе.

Пусть имеется пространство, заполненное средой, проводимость которой является кусочно-дифференцируемой функцией координат  $x, y, z$  —  $\sigma(x, y, z)$  (конкретные условия на функцию  $\sigma(M)$  будут сформулированы ниже). В среде задано распределение плотности постоянных сторонних токов  $j(M)$ . Напряженности электрического и магнитного полей удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \sigma(M) \vec{E} + \vec{j}(M), \operatorname{rot} \vec{E} = 0. \quad (1)$$

В силу второго из уравнений (1) можно ввести скалярный потенциал  $u(M) = u(x, y, z)$  с помощью равенства  $\vec{E} = -\operatorname{grad} u$ . Урав-

нения Максвелла будут удовлетворяться автоматически, если потенциал  $u$  будет удовлетворять во всем пространстве следующему уравнению:

$$\operatorname{div} \{ \sigma(M) \operatorname{grad} u \} = \operatorname{div} \vec{j}(M). \quad (2)$$

На границах разрыва проводимости  $\sigma$  вследствие непрерывности касательных к границам компонент векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  имеют место следующие условия сопряжения:

$$[u] = 0, \quad \left[ \sigma(M) \frac{\partial u}{\partial n} \right] = 0. \quad (3)$$

(Здесь и всюду в дальнейшем квадратные скобки означают разность предельных значений с различных сторон поверхности разрыва параметра  $\sigma$ .) Кроме того, имеет место условие на бесконечности

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u(M) = 0.$$

В настоящей работе задача сопряжения для уравнения (2) сводится к системе линейных интегральных уравнений второго рода по поверхностям разрыва параметра  $\sigma$ . При этом построение уравнений проводится таким образом, что число поверхностей, по которым записаны уравнения в определенном смысле, минимально.

При выводе интегральных соотношений и уравнений основную роль играет формула Грина для оператора уравнения (2). Пусть  $V$  — некоторая область, ограниченная достаточно гладкой поверхностью  $S$ , а  $\varphi(M)$  и  $\psi(M)$  — функции, непрерывно дифференцируемые в замкнутой области  $V+S$  и дважды дифференцируемые в области  $V$ . Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} \iiint_V \{ \varphi \operatorname{div} \sigma \operatorname{grad} \psi - \psi \operatorname{div} \sigma \operatorname{grad} \varphi \} d\tau = \\ = \iint_S \sigma(M) \left\{ \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} ds. \end{aligned} \quad (4)$$

Переходя к выводу уравнений, сформулируем прежде всего условия на функцию  $\sigma(M)$ . Эти условия состоят в следующем. Пусть все пространство разбивается на  $N$  областей  $V_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ), внутри каждой из которых обозначим:  $\sigma(M) \equiv \sigma_i(M)$  ( $M \in V$ ). От функции  $\sigma_i(M)$  требуется, чтобы она продолжалась на все пространство таким образом, чтобы функция  $\sigma_i(M)$ , полученная в результате продолжения, допускала существование некоторого алгоритма для построения функции Грина  $G_i(M, M_0)$  уравнения (2). Функция Грина  $G_i(M, M_0)$ , зависящая от координат двух точек пространства,  $M(x, y, z)$  и  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , является решением уравнения

$$\operatorname{div} \{ \sigma_i(M) \operatorname{grad} G_i(M, M_0) \} = 0, \quad (5)$$

имеет особенность при совпадении точек  $M$  и  $M_0$  типа  $\frac{1}{\sigma_i} \cdot \frac{1}{R_{MM_0}}$ , где

$$R_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}.$$

На границах разрыва параметра  $\tilde{\sigma}_i$  имеют место граничные условия (по одной из точек, когда другая фиксирована):

$$[G_i] = 0, \quad \left[ \tilde{\sigma}_i \frac{\partial G_i}{\partial n} \right] = 0.$$

Функция  $G_i(M, M_0)$  удовлетворяет условию убывания на бесконечности.

Таким образом, продолжая  $N$  раз функцию  $\tilde{\sigma}_i(M)$  для каждой области  $V_i$ , получаем  $N$  задач типа (5) для всего пространства, заполненного средой с проводимостью  $\tilde{\sigma}_i(M)$  ( $i=1, 2, 3, \dots, N$ ). Если определить функцию  $G_i(M, M_0)$  для всего набора задач, можно свести задачу для уравнения (2) к интегральным уравнениям по поверхностям, разделяющим области  $V_i$ .

Рассмотрим сначала наиболее простой случай, когда все пространство разбивается на такие две области  $V_1$  и  $V_2$ , что возможно продолжение параметров  $\sigma_1(M)$  ( $M \in V_1$ ) и  $\sigma_2(M)$  ( $M \in V_2$ ) на все пространство, для которых соответствующие функции Грина  $G_1(M, M_0)$  и  $G_2(M, M_0)$  известны.

Поверхность, разделяющую область  $V_1$  и  $V_2$ , обозначаем  $S$ . Для вывода уравнений применим формулу (4) к функциям  $u(M)$  и  $G_1(M, M_0)$  в области  $V_1$  и к функциям  $u(M)$  и  $G_2(M, M_0)$  в области  $V_2$ . Если  $\vec{n}$  — направление нормали к поверхности  $S$ , внутреннее по отношению к области  $V_1$ , то в этой области будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \iint_S \sigma_1(M) \left\{ u(M) \frac{\partial G_1(M, M_0)}{\partial n} - \frac{\partial u(M)}{\partial n} G_1(M, M_0) \right\} dS_M + u_0^1(M_0) = \\ = \begin{cases} u(M_0), & M_0 \in V_1 \\ 0, & M_0 \in V_2 \end{cases}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$u_0^1(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_1} G_1(M, M_0) \operatorname{div} \vec{j}(M) d\tau_M.$$

В области  $V_2$  будем иметь

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi} \iint_S \sigma_2(M) \left\{ u(M) \frac{\partial G_2(M, M_0)}{\partial n} - \frac{\partial u(M)}{\partial n} G_2(M, M_0) \right\} dS_M + u_0^2(M_0) = \\ = \begin{cases} 0, & M_0 \in V_1 \\ u(M_0), & M_0 \in V_2 \end{cases}. \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$u_0^{(2)}(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_2} G_2(M, M_0) \operatorname{div} \vec{j}(M) d\tau(M).$$

Сложив равенства (6) и (7), мы получим интегральное представление потенциала  $u(M_0)$  в произвольной точке областей  $V_1$  и  $V_2$

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \sigma_1(M) \frac{\partial G_1}{\partial n} (u)_1 - \sigma_2(M) \frac{\partial G_2}{\partial n} (u)_2 \right\} ds_M - \\ - \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \sigma_1(M) \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_1 G_1 - \sigma_2(M) \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_2 G_2 \right\} ds_M + u^0(M_0). \quad (8)$$

В представлении (8) через  $(u)_i$  и  $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i$  обозначены предельные значения функции  $u$  и  $\frac{\partial u}{\partial n}$  изнутри области  $V_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ). Учитывая условия сопряжения (3) на поверхности  $S$ , последнее представление можно переписать следующим образом:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (u)_1 \left( \sigma_1(M) \frac{\partial G_1}{\partial n} - \sigma_2 \frac{\partial G_2}{\partial n} \right) - \right. \\ \left. - \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_1 (\sigma_1 G_1 - \sigma_2(M) G_2) \right\} ds_M + \\ + \frac{1}{4\pi} \iint_S \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_1 \{ \sigma_1(M) - \sigma_2(M) \} G_2(M, M_0) ds_M + u^0(M_0). \quad (9)$$

Заметим, что функции  $\sigma_1(M) \frac{\partial G_1}{\partial n} - \sigma_2(M) \frac{\partial G_2}{\partial n}$  и  $\sigma_1(M) G_1(M, M_0) - \sigma_2(M) G_2(M, M_0)$  ( $M \in S$ ) непрерывны по точке  $M_0$  и соответствующие члены в представлении (9) могут быть продифференцированы под знаком интеграла по координатам точки  $M_0$ .

Пусть  $M_0 \in V_1$ . Проведем нормаль  $n_0$  в точке  $M_0$  к поверхности  $S$  и продифференцируем выражение (9) по направлению нормали  $n_0$ . Будем иметь

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial n_0} = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ (u)_1 \frac{\partial}{\partial n_0} \left( \sigma_1(M) \frac{\partial G_1}{\partial n} - \sigma_2(M) \frac{\partial G_2}{\partial n} \right) - \right. \\ \left. - \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_1 \frac{\partial}{\partial n_0} (\sigma_1(M) G_1 - \sigma_2(M) G_2) \right\} ds_M + \\ + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_0} \iint_S \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_1 (\sigma_1(M) - \sigma_2(M)) G_2(M, M_0) ds_M + \frac{\partial u^0(M_0)}{\partial n_0}$$

$$(M_0 \in V_1). \quad (10)$$

Если теперь в соотношениях (9) и (10) опустить точку  $M_0$  на поверхность раздела  $S$ , то получим следующую систему интегральных уравнений относительно  $(u)_1$  и  $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_1$  на поверхности  $S$ :

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S (u)_1 \left( \sigma_1(M) \frac{\partial G_1}{\partial n} - \sigma_2(M) \frac{\partial G_2}{\partial n} \right) ds_M - \\ - \frac{1}{4\pi} \iint_S \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_1 \sigma(M) (G_1 - G_2) ds_M + u^0(M_0) \quad (M_0 \in S), \quad (11a)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_1(M_0) + \sigma_2(M_0)}{\sigma_2(M_0)} \left( \frac{\partial u}{\partial n_0} \right)_1 = \\ = \frac{1}{4\pi} \iint_S (u)_1 \frac{\partial}{\partial n_0} \left( \sigma_1(M) \frac{\partial G_1}{\partial n} - \sigma_2(M) \frac{\partial G_2}{\partial n} \right) ds_M - \\ - \frac{1}{4\pi} \iint_S \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_1 \sigma_1(M) \left( \frac{\partial G_1}{\partial n_0} - \frac{\partial G_2}{\partial n_0} \right) ds_M + \frac{\partial u^0}{\partial n_0}(M_0). \quad (11b)$$

Итак, исходная задача для потенциала  $u(M)$  сведена к системе двух интегральных уравнений 2-го рода по поверхности раздела  $S$  относительно значений функции  $u$  и ее нормальной производной (со стороны области  $V_1$ ) на этой поверхности. Если решение этой системы найдено, то по формулам (9) и (10) функции  $u(M)$  и ее производные могут быть найдены в любой точке пространства.

Мы рассмотрели случай, когда пространство разбивается на 2 области. Естественно, что алгоритм вычисления функций Грина  $G_1(M, M_0)$  и  $G_2(M, M_0)$  должен быть достаточно простым, иначе трудности первоначальной задачи будут заменены трудностями в нахождении функций Грина. Поэтому наибольший интерес представляет такое разбиение пространства, которое допускает для всех функций Грина явное построение, но вместе с тем максимально учитывает специфику исходной задачи. В силу сказанного для многих практически важных задач число  $N$  будет больше двух, в связи с чем обобщим полученные результаты на произвольное число  $N$ . Для этого применим формулу (4) к функциям  $u(M)$  и  $G_i(M, M_0)$  в области  $V_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ), считая, что область ограничена поверхностью  $S_i$ . Заметим при этом, что область  $V_i$  для некоторых номеров  $i$  может быть бесконечной.

Итак, после применения формулы Грина будем иметь

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{S_i} \sigma_i(M) \left\{ u(M) \frac{\partial G_i}{\partial n} - G_i \frac{\partial u(M)}{\partial n} \right\} ds_M + u_i^0(M_0) =$$



$$= \begin{cases} u(M_0), & M_0 \in V_i, \\ 0 & M_0 \notin V_i, \end{cases} \quad (12)$$

где

$$u_0^i(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iiint G_i(M, M_0) \operatorname{div} \vec{j} d\tau_M.$$

Просуммируем теперь выражение (12) по всем областям  $V_i$ , после чего получим следующее представление для функции  $u(M)$  в произвольной точке  $M$  пространства ( $M \in S_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ )):

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N \iint_{S_i} \sigma_i(M) \left\{ u \frac{\partial G_i}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} G_i \right\} ds_M + \sum_{i=1}^N u_0^i(M_0). \quad (13)$$

В выражение (13) каждая граница раздела областей  $V_i$  входит дважды, как граница двух соседних областей. Рассмотрим отдельно члены в сумме (13), содержащие интегралы по поверхности раздела областей с номерами  $i$  и  $k$  (предполагается, что эти области имеют общую границу). Обозначая указанную поверхность  $S_{ik}$  и выбирая на ней нормаль, внешнюю по отношению к области  $V_i$ , будем иметь следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} & \iint_{S_{ik}} \sigma_i(M) \left\{ (u)_i \frac{\partial G_k}{\partial n} - \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_i G_i \right\} ds_M - \iint_{S_{ik}} \sigma_k(M) \left\{ (u)_k \frac{\partial G_k}{\partial n} - \right. \\ & \left. - \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_k G_k \right\} ds_M = \iint_{S_{ik}} (u)_i \left\{ \sigma_i(M) \frac{\partial G_i}{\partial n} - \sigma_k(M) \frac{\partial G_k}{\partial n} \right\} ds_M - \\ & - \iint_{S_{ik}} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_i \{ \sigma_i(M) G_i - \sigma_k G_k \} ds_M + \\ & + \iint_{S_{ik}} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_i [\sigma_i(M)] G_k(M, M_0) ds_M. \end{aligned}$$

Если учесть последние соотношения, то представление (13) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} u(M) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{i,k} \iint_{S_{ik}} \left\{ (u)_i \left( \sigma_i \frac{\partial G_i}{\partial n} - \sigma_k \frac{\partial G_k}{\partial n} \right) - \right. \\ & \left. - \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_i (\sigma_i(M) G_i - \sigma_k G_k) \right\} ds_k + \\ & + \frac{1}{4\pi} \sum_{i,k} \iint_{S_{ik}} (\sigma_i - \sigma_k) \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_i G_k(M, M_0) ds_M + \sum_{i=1}^N u_0^i(M_0). \quad (14) \end{aligned}$$

Заметим, что в сумме по  $i$  и  $k$  содержатся только члены, соответствующие граничащим областям. Чтобы получить систему интегральных уравнений, необходимо продифференцировать представление (14) по направлению нормали к каждой из границ раздела.

Пусть  $\nu_{mn}$  — вектор нормали к поверхности раздела  $S_{mn}$  областей с номерами  $m$  и  $n$  ( $m, n=1, 2, \dots, N$ ). Продифференцируем представление (14) по нормали  $\nu_{mn}$ , что возможно в силу свойств ядер интегральных операторов, входящих в (14). Будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(M_0)}{\partial \nu} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{i,k} \iint_{S_{ik}} \left\{ (u)_i \left( \sigma_i \frac{\partial^2 G_i}{\partial \nu \partial n} - \sigma_k \frac{\partial^2 G_k}{\partial \nu \partial n} \right) - \right. \\ & \left. - \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_i \left( \sigma_i \frac{\partial G_i}{\partial \nu} - \sigma_k \frac{\partial G_k}{\partial \nu} \right) \right\} ds_M + \\ & + \frac{1}{4\pi} \sum_{i,k} \iint_{S_{ik}} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_i (\sigma_i - \sigma_k) \frac{\partial G_k}{\partial \nu} ds_M + \sum_{i=1}^N \frac{\partial u_0^i(M_0)}{\partial \nu} \quad (15) \end{aligned}$$

(индекс  $mn$  у нормали  $\nu$  опущен).

Если теперь точку  $M_0$  в соотношениях (14) и (15) опустить на поверхность  $S_{mn}$  (изнутри той области, для которой  $\nu_{mn}$  — внешняя нормаль), то представление (14) непосредственно перейдет в интегральное уравнение, а представление (15) потребует дополнительных преобразований, ибо в сумме по  $i$  и  $k$  с ядрами  $\frac{\partial G_k}{\partial \nu}$

необходимо учесть выброс при опускании точки на поверхность раздела областей с номерами  $i=m, k=n$ . Окончательно получим следующую систему интегральных уравнений относительно значений  $(u)_m$  и  $\left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_m$  на поверхностях  $S_{mn}$  ( $m, n=1, 2, \dots, N$ ):

$$\begin{aligned} (u)_m &= \frac{1}{4\pi} \sum_{i,k} \iint_{S_{ik}} \left\{ (u)_i \left( \sigma_i \frac{\partial G_i}{\partial n} - \sigma_k \frac{\partial G_k}{\partial n} \right) - \right. \\ & \left. - \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_i (\sigma_i G_i - \sigma_k G_k) \right\} + \frac{1}{4\pi} \sum_{i,k} \iint_{S_{ik}} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_i (\sigma_i - \right. \\ & \left. - \sigma_k) G_k(M, M_0) ds_M + \sum_{i=1}^N u_0^i(M_0) \quad (16a) \\ & \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sigma_m(M_0)}{\sigma_n(M_0)} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)_m = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi} \sum_{i,k} \iint_{S_{ik}} \left\{ (u)_i \left( \sigma_i \frac{\partial^2 G_i}{\partial v \partial n} - \sigma_k \frac{\partial^2 G_k}{\partial v \partial n} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_i \left( \sigma_i \frac{\partial G_i}{\partial v} - \sigma_k \frac{\partial G_k}{\partial v} \right) \right\} ds_M + \\
&+ \frac{1}{4\pi} \sum_{i,k} \iint_{S_{ik}} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_i (\sigma_i - \sigma_k) \frac{\partial G_k}{\partial v} ds_M + \sum_{i=1}^N \frac{\partial u_i^0(M_0)}{\partial v}. \quad (166)
\end{aligned}$$

Таким образом, первоначальная задача для функции  $u(M)$  и в случае произвольного числа областей разбиения сведена к системе интегральных уравнений 2-го рода по поверхностям раздела введенных областей. Ядра этой системы построены из функций Грина  $G_i(M, M_0)$  ( $i=1, 2, 3, \dots, N$ ), которые в определенном смысле максимально учитывают специфику задачи. Отметим, что постановка той или иной задачи может приводить к различным возможным способам разбиения пространства на области  $V_i$ .

Выбор того или иного варианта разбиения зависит как от метода численного решения интегральных уравнений (16), так и от характера необходимой выходной информации. В силу этого затруднительно дать общий рецепт для выбора разбиения пространства на области  $V_i$  и способов продолжения параметра  $\sigma_i(M)$ . Необходимо, однако, сказать, что упрощение функций Грина  $G_i(M, M_0)$  ведет к увеличению числа уравнений и поэтому выбор разбиения должен быть оптимальным с точки зрения простоты алгоритма вычисления  $G_i(M, M_0)$  и количества интегральных уравнений.

Обычно интегральные уравнения пишут по всем границам разрыва проводимости (в случае кусочно-постоянных параметров среды), что приводит всегда к большому количеству интегральных уравнений, а аналитическое решение можно получить только в простейших случаях. Предлагаемый метод позволяет максимально учитывать сложную структуру среды посредством введения функций Грина  $G_i(M, M_0)$ , сводя при этом к минимуму число поверхностей, по которым написаны интегральные уравнения.

Ниже будет рассмотрен ряд различных конкретных задач, для которых описанный метод дает эффективное решение. Выбор задач в основном определялся потребностями теории электроразведки на постоянном токе.

Рассмотрим однородные проводящие тела, расположенные в однородном пространстве. С точки зрения данного метода это наиболее простая задача. Проводимость пространства  $\sigma(M)$  является кусочно-постоянной функцией координат  $(x, y, z)$ . Иными словами, возможно разбиение всего пространства на  $N$  областей, в каждой из которых проводимость — постоянная величина  $\sigma_i$  ( $\sigma_i \neq 0, i=1, 2, \dots, N$ ).

Пусть для определенности все источники расположены вне тел, а индекс «1» соответствует вмещающей среде. При этом функция  $u$  вне тел удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta u = \frac{1}{\sigma_1} \operatorname{div} \vec{j}(M),$$

а внутри тел — уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0$$

с условиями на поверхности

$$[u] = 0, \quad \sigma_1 \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_1 = \sigma_i \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_i.$$

Способ продолжения параметра  $\sigma_i$  в данном случае очевиден  $\tilde{\sigma}_i(M) = \sigma_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ). Функции Грина  $G_i(M, M_0)$  как функции Грина для уравнения Лапласа выписываются непосредственно

$$G_i(M, M_0) = \frac{1}{\sigma_i R_{MM_0}}, \quad (17)$$

где

$$R_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}.$$

Отметим, что различие функций Грина для разных номеров  $i$  вызвано различием особенности в точке совпадения аргументов. В силу (17) ядра уравнений (16) обращаются в нуль, т. е.

$$\sigma_1 \frac{\partial G_1}{\partial n} - \sigma_k \frac{\partial G_k}{\partial n} = 0, \quad \sigma_1 G_1 - \sigma_k G_k = 0,$$

$$\sigma_1 \frac{\partial G_1}{\partial v} - \sigma_k \frac{\partial G_k}{\partial v} = 0, \quad \sigma_1 \frac{\partial^2 G_1}{\partial n \partial v} - \sigma_k \frac{\partial^2 G_k}{\partial v \partial n} = 0.$$

$$(k = 2, 3, 4, \dots, N)$$

Чтобы записать соотношения, в которые вырождается система уравнений (16), перенумеруем все поверхности раздела от 1 до  $p$  и опустим индекс  $u$  величин, соответствующих вмещающей среде. Будем иметь

$$(u)_m = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^p \frac{\sigma - \sigma_i}{\sigma_i} \iint_{S_i} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_i \frac{1}{R_{MM_0}} ds + u_0(M), \quad (18)$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_m = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^p \frac{\sigma - \sigma_i}{\sigma_i} \iint_{S_i} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_i \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{R_{MM_0}} \right) ds_M + \frac{\partial u_0}{\partial v}. \quad (19)$$

$$(m = 1, 2, \dots, p)$$

Как видно, система (16) распадается на два типа соотношений. Соотношения (19) являются системой интегральных уравнений относительно значений нормальной производной функции  $u(M)$  на поверхностях проводящих включений. Соотношения (18) дают возможность найти функцию  $u$  в любой точке пространства, если найдено решение системы (19).

Заметим, что соотношения (18) и (19) написаны по всем без исключения поверхностям разрыва проводимости  $\sigma(M)$ . Однако количество поверхностей, по которым необходимо писать интегральные представления и уравнения, можно уменьшить, если ввести соответствующие функции Грина. Достаточно широкий класс задач, для которых это можно сделать, выделяется следующим предположением относительно проводимости  $\sigma(M)$ .

Допустим, что пространство разбито на области  $V_i$ , в каждой из которых проводимость меняется вдоль одного избранного для данной области направления. На рис. 1 представлен пример разреза такой среды. Пространство естественным образом разбивается на два полупространства  $V_1(z < 0)$  и  $V_2(z > 0)$ .

Продолжение параметра  $\sigma(M)$  из области  $V_1$  приводит к задаче со следующим распределением проводимости:

$$\tilde{\sigma}_1(M) = \begin{cases} \sigma_0, & z < -h_1, \\ \sigma_1, & z > -h_1. \end{cases}$$

Продолжение параметра  $\sigma_2(M)$  будет иметь вид

$$\tilde{\sigma}_2(M) = \begin{cases} \sigma_2, & z \cos \alpha - x \sin \alpha - d \sin \alpha > 0, \\ \sigma_3, & z \cos \alpha - x \sin \alpha - d \sin \alpha < 0, & z \cos \alpha - x \sin \alpha > 0, \\ \sigma_4, & z \cos \alpha - x \sin \alpha < 0. \end{cases}$$

Последнее продолжение геометрически означает, что плоскости разрыва  $\sigma(M)$  из области  $V_2$  проводятся в область  $V_1$ , после чего пространство заполняется средой с проводимостями  $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ . Оно становится одномерной слоистой средой с границами раздела  $z \cos \alpha - x \sin \alpha - d \sin \alpha = 0$  и  $z \cos \alpha - x \sin \alpha = 0$  (уравнения записаны в системе  $xz$ ).

Таким образом, необходимо построить две функции Грина  $G_1(M, M_0)$  и  $G_2(M, M_0)$ , которые будут решениями уравнения Лапласа

$$\Delta G_i(M, M_0) = 0$$

с граничными условиями следующего вида:

$$[G_i] = 0, \quad \sigma_0 \frac{\partial G_1}{\partial z} = \sigma_1 \frac{\partial G_1}{\partial z} \quad \text{на плоскости } z = 0,$$

$$\sigma_2 \frac{\partial G_2}{\partial n} = \sigma_3 \frac{\partial G_2}{\partial n} \quad \text{на плоскости } z \cos \alpha - x \sin \alpha - d \sin \alpha = 0,$$

$$\sigma_3 \frac{\partial G_2}{\partial n} = \sigma_4 \frac{\partial G_2}{\partial n} \quad \text{на плоскости } z \cos \alpha - x \sin \alpha = 0.$$

С помощью интегрального преобразования Ханкеля функции Грина  $G_1$  и  $G_2$  находятся в виде интегралов известными методами. Отметим, что функцию  $G_2(M, M_0)$  удобнее искать в системе, координатные плоскости которой совпадают с границами раздела, а затем перейти к старой системе координат.

Как видно, в рассматриваемом типичном примере имеется четыре границы разрыва параметра  $\sigma$ , тогда как границ раздела областей всего одна:  $z = 0$ . Соответственно этому система интегральных уравнений (16) будет содержать всего два уравнения, написанных по плоскости  $z = 0$ . Иными словами, после построения функций  $G_1$  и  $G_2$ , максимально учитывающих структуру поля в областях  $V_1$  и  $V_2$  соответственно, остается только удовлетворить граничным условиям на плоскости  $z = 0$ , для чего необходимо решить систему двух интегральных уравнений типа (16).

Отметим, что выше всюду предполагалось, что проводимость отлична от нуля во всем пространстве. Однако в теории электропроводки обычно проводимость воздуха полагают равной нулю, что приводит на границе земля—воздух к краевому условию  $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$

(предельное значение изнутри Земли). Для разреза, изображенного на рис. 1, это означает, что  $\sigma_0 = 0$ . Для этого класса задач указанное обстоятельство не приводит к каким-либо осложнениям, если возможно построение соответствующих функций Грина. Например, для разреза рис. 1 функция  $G_1(M, M_0)$ , если  $\sigma_0 = 0$ , имеет вид

$$G_1(M, M_0) = \frac{1}{\sigma_1} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right), \quad (20)$$

где

$$R' = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2}.$$

Уравнения типа (16) по линии  $z = 0$  при этом остаются без изменения. Несколько иные соотношения возникают, если граница раздела земля—воздух является и границей раздела областей, на которые разбивается пространство. В этом случае по дневной поверхности необходимо писать интегральные уравнения типа (16), что приводит к другим соотношениям из-за краевого условия  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ . Рассмотрим простой пример. Пусть земля и воздух пред-

ставляют собой однородные среды с проводимостями  $\sigma$  и  $\sigma_0$  соответственно, разделенные некоторой поверхностью  $S$  в трехмерном пространстве. Если проводимость воздуха считать отличной от нуля, то уравнения (16) в силу равенства нулю разностей функций Грина дают следующие соотношения:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0} \iint_S \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_S \frac{1}{R_{MM_0}} ds + u^0(M_0), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sigma}{\sigma_0} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_S = \\ & = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0} \iint_S \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_S \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{1}{R_{MM_0}} \right) ds_M + \frac{\partial u^0}{\partial \nu}(M_0). \end{aligned} \quad (22)$$

Если устремить теперь  $\sigma_0 \rightarrow 0$ , предположив, что  $\lim_{\sigma_0 \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma_0} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_S$  — конечная величина, то получим уравнение для предельной краевой задачи

$$\psi(M_0) - \frac{1}{2\pi} \iint_S \psi(M) \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{1}{R_{MM_0}} \right) ds = 2 \frac{\partial u^0}{\partial \nu}(M_0), \quad (23)$$

где  $\psi(M) = \lim_{\sigma_0 \rightarrow 0} \frac{\sigma}{\sigma_0} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_S$ . При этом соотношение (21) дает представление потенциала  $u(M)$ :

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \psi(M) \frac{1}{R_{MM_0}} ds_M + u^0(M_0). \quad (24)$$

Отметим, что предельная задача является задачей Неймана для уравнения Лапласа и ее непосредственно можно свести к уравнению (22), если записать представление (24). Таким образом, если в пространстве имеются области, заполненные непроводящей средой, то по ограничивающей их поверхности вместо двух уравнений типа (16) необходимо писать одно уравнение относительно значения функции  $u$  на границе раздела проводника и изолятора.

В заключение отметим также, что рассмотренным методом могут быть решены некоторые задачи теории каротажа.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Заборовский А. И. Электроразведка. М., Гостоптехиздат, 1963.
2. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Метод решения задач электродинамики неоднородных сред. ЖВМ и МФ, 10, № 6, 1970.

### В. И. ДМИТРИЕВ, Е. В. ЗАХАРОВ, Г. А. КОКОТУШКИН О ВЛИЯНИИ ЛОКАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ НА МАГНИТО-ТЕЛЛУРИЧЕСКОЕ ЗОНДИРОВАНИЕ

**1. Введение.** В настоящее время интенсивно развиваются методы геофизических исследований, основанные на использовании естественного электромагнитного поля Земли. Магнито-теллурическое зондирование успешно применяется как для решения задач структурной геофизики, так и для исследования глубинного строения Земли.

Основой интерпретации данных МТЗ является импеданс плоскостной среды при нормальном падении на нее плоской электромагнитной волны [1]. При этом импеданс является функционалом от распределения проводимости с глубиной и зависит от частоты электромагнитного поля.

Тихоновым была доказана теорема единственности решения обратной задачи, т. е. определения распределения проводимости с глубиной по известной зависимости импеданса от частоты [2], что позволило с помощью модели горизонтально однородной слоистой среды решить целый ряд геологических и геофизических задач. Но сравнительно недавно было установлено, что использование метода МТЗ при исследовании глубинного строения Земли наталкивается на значительные трудности при интерпретации данных наблюдений.

Поверхностные неоднородности земной коры существенно искажают кривые МТЗ, о чем свидетельствует зависимость этих кривых от направления измерений компонент электромагнитного поля. Очевидно, что интерпретация этих кривых, основанная на модели плоскостной среды, даст различные геоэлектрические разрезы в одной и той же точке. Поэтому определение параметров геоэлектрического разреза возможно лишь при наличии достаточно полной информации о характере поведения электромагнитного поля в сложных по структуре неоднородных средах.

Наличие такой информации дает возможность оценить характер и величину искажений, вносимых неоднородностями, а тем самым,

ставляют собой однородные среды с проводимостями  $\sigma$  и  $\sigma_0$  соответственно, разделенные некоторой поверхностью  $S$  в трехмерном пространстве. Если проводимость воздуха считать отличной от нуля, то уравнения (16) в силу равенства нулю разностей функций Грина дают следующие соотношения:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0} \iint_S \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_S \frac{1}{R_{MM_0}} ds + u^0(M_0), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sigma}{\sigma_0} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_S = \\ & = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0} \iint_S \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_S \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{1}{R_{MM_0}} \right) ds_M + \frac{\partial u^0}{\partial \nu}(M_0). \end{aligned} \quad (22)$$

Если устремить теперь  $\sigma_0 \rightarrow 0$ , предположив, что  $\lim_{\sigma_0 \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma_0} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_S$  — конечная величина, то получим уравнение для предельной краевой задачи

$$\psi(M_0) - \frac{1}{2\pi} \iint_S \psi(M) \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{1}{R_{MM_0}} \right) ds = 2 \frac{\partial u^0}{\partial \nu}(M_0), \quad (23)$$

где  $\psi(M) = \lim_{\sigma_0 \rightarrow 0} \frac{\sigma}{\sigma_0} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_S$ . При этом соотношение (21) дает представление потенциала  $u(M)$ :

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \psi(M) \frac{1}{R_{MM_0}} ds_M + u^0(M_0). \quad (24)$$

Отметим, что предельная задача является задачей Неймана для уравнения Лапласа и ее непосредственно можно свести к уравнению (22), если записать представление (24). Таким образом, если в пространстве имеются области, заполненные непроводящей средой, то по ограничивающей их поверхности вместо двух уравнений типа (16) необходимо писать одно уравнение относительно значения функции  $u$  на границе раздела проводника и изолятора.

В заключение отметим также, что рассмотренным методом могут быть решены некоторые задачи теории каротажа.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Заборовский А. И. Электроразведка. М., Гостоптехиздат, 1963.
2. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Метод решения задач электродинамики неоднородных сред. ЖВМ и МФ, 10, № 6, 1970.

### В. И. ДМИТРИЕВ, Е. В. ЗАХАРОВ, Г. А. КОКОТУШКИН О ВЛИЯНИИ ЛОКАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ НА МАГНИТО-ТЕЛЛУРИЧЕСКОЕ ЗОНДИРОВАНИЕ

**1. Введение.** В настоящее время интенсивно развиваются методы геофизических исследований, основанные на использовании естественного электромагнитного поля Земли. Магнито-теллурическое зондирование успешно применяется как для решения задач структурной геофизики, так и для исследования глубинного строения Земли.

Основой интерпретации данных МТЗ является импеданс плоскостной среды при нормальном падении на нее плоской электромагнитной волны [1]. При этом импеданс является функционалом от распределения проводимости с глубиной и зависит от частоты электромагнитного поля.

Тихоновым была доказана теорема единственности решения обратной задачи, т. е. определения распределения проводимости с глубиной по известной зависимости импеданса от частоты [2], что позволило с помощью модели горизонтально однородной слоистой среды решить целый ряд геологических и геофизических задач. Но сравнительно недавно было установлено, что использование метода МТЗ при исследовании глубинного строения Земли наталкивается на значительные трудности при интерпретации данных наблюдений.

Поверхностные неоднородности земной коры существенно искажают кривые МТЗ, о чем свидетельствует зависимость этих кривых от направления измерений компонент электромагнитного поля. Очевидно, что интерпретация этих кривых, основанная на модели плоскостной среды, даст различные геоэлектрические разрезы в одной и той же точке. Поэтому определение параметров геоэлектрического разреза возможно лишь при наличии достаточно полной информации о характере поведения электромагнитного поля в сложных по структуре неоднородных средах.

Наличие такой информации дает возможность оценить характер и величину искажений, вносимых неоднородностями, а тем самым,

учитывая их влияние на кривые МТЗ, проводить более надежную в количественном отношении интерпретацию данных наблюдений. Количественный учет влияния поверхностных неоднородностей приводит к необходимости исследования электромагнитного поля на поверхности горизонтально неоднородных сред, что естественно приводит к необходимости постановки и разработки методов решения задач электродинамики неоднородных сред.

Задачи этого класса в общем случае являются трехмерными и векторными задачами, а их решение достаточно сложно как с точки зрения методов решения, так и с точки зрения возможностей современных вычислительных машин. Поэтому важным моментом является выбор моделей, на которых можно выявить основные закономерности поведения электромагнитного поля, а с другой стороны, задача может быть доведена до численного результата.

Наиболее удобным аппаратом для решения неоднородных задач теории МТЗ стали интегральные уравнения. Методы редукции электродинамических задач достаточно общего типа к интегральным уравнениям были предложены в работах [3—6]. Решение соответствующих интегральных уравнений возможно лишь с использованием современных ЭВМ, что приводит к необходимости разработки вычислительных алгоритмов с последующей реализацией их в виде программ на ЭВМ и проведению массовых расчетов. Анализ численных результатов дает возможность исследовать основные физические явления в характере поведения магнито-теллурического поля.

Настоящая работа посвящена решению ряда задач теории маг-

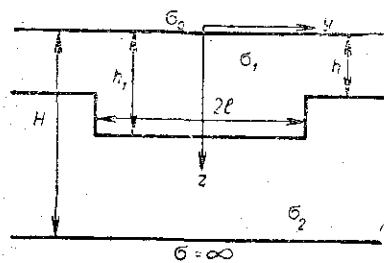


Рис. 1

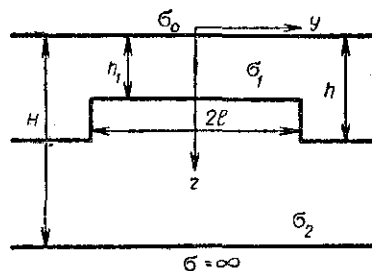


Рис. 2

нито-теллурических зондирований горизонтально неоднородных слоистых сред, связанных с исследованием влияния локальных поверхностных неоднородностей на результаты глубинных МТЗ. Рассмотрение проведено на моделях геоэлектрического разреза Земли со скачкообразным изменением параметров (проводимости или толщины) поверхностного слоя.

На рис. 1—3 изображены модели разрезов горизонтально неоднородных сред, которые рассматриваются в настоящей работе. Характеристики всех сред не зависят от одной координаты (при-

ем ее за координату  $x$ ), а первичное поле представляет собой плоскую волну, поляризованную вдоль этой оси. Методы и алгоритм решения задач практически одинаковы для всех рассматриваемых моделей. Поэтому, чтобы не загромождать изложения большим количеством формул, постановка задач и методика решения даны для одной из моделей (горст рис. 1). Постановка задач и методы решения с очевидными изменениями переносятся на остальные случаи.

На основе предлагаемых методов и алгоритмов были проведены расчеты кажущихся сопротивлений, что позволило дать количественную оценку влияния поверхностных неоднородностей на кривые МТЗ. Сравнительный анализ  $\rho_h$  дал возможность установить характерные особенности кривых МТЗ в зависимости от типа неоднородностей и поляризации первичного поля.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим следующую модель: при  $z < 0$  — воздух с проводимостью  $\sigma_0$ , при  $0 < z < s(y)$  — поверхностный слой с проводимостью  $\sigma_1$ , где

$$s(y) = \begin{cases} h, & |y| > l \\ h_1, & |y| < l \end{cases} \quad (h_1 < h),$$

при  $s(y) < z < H$  — высокоомный слой с проводимостью  $\sigma_2$ ; при  $z > H$  — подстилающее основание, которое примем за идеальный проводник. Как обычно, токами смещения по сравнению с токами проводимости пренебрегаем, а параметры слоев удовлетворяют условиям

$$\frac{h}{H} \ll 1, \quad \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \ll 1, \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \ll 1.$$

Пусть далее на поверхность  $z=0$  нормально падает плоская волна (зависимость от времени  $e^{-i\omega t}$ ). В силу независимости всех параметров от координаты  $x$  ( $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ ) полное электромагнитное поле распадается на две независимые поляризации.

1. Электрическая поляризация  $\vec{E} = \{E_x, 0, 0\}$ ,  $\vec{H} = \{0, H_y, H_z\}$

$$H_y = \frac{-i}{\omega\mu} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad H_z = \frac{i}{\omega\mu} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial y}. \quad (1)$$

Компонента  $E_x(y, z)$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta E_x + k_j^2 E_x = 0, \quad (2)$$

где  $k_j^2 = i\omega\mu\sigma_j$ , ( $j = 0, 1, 2$ ).

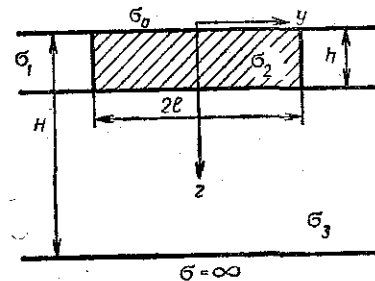


Рис. 3

На всех границах разрыва проводимости  $\sigma$  непрерывны  $E_x$  и  $\frac{\partial E_x}{\partial n}$ , а при  $z=H$   $E_x=0$ .

Кроме того,  $E_x$  удовлетворяет условию на бесконечности

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} \rightarrow 0 \text{ при } |y| \rightarrow \infty.$$

Возбуждение электромагнитных колебаний дается плоской волной вида

$$E_x^0 = E_{x0}^0 e^{ik_0 z}.$$

Импеданс  $Z_e$  при  $z=0$  определяется следующим выражением:

$$Z_e = \frac{E_x}{H_y} = i\omega\mu \frac{E_x}{\partial E_x / \partial z}. \quad (3)$$

2. Магнитная поляризация  $\vec{E}\{0, E_y, E_z\}, \vec{H}\{H_x, 0, 0\}$

$$E_y = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad E_z = -\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial y}. \quad (4)$$

Компонента  $H_x(y, z)$  является решением следующей задачи:

$$\Delta H_x + k_1^2 H_x = 0 \quad (5)$$

на границах разрыва  $\sigma$  непрерывны  $H_x$  и  $\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial n}$ , а при

$$z = H - \frac{\partial H_x}{\partial z} = 0.$$

Первичное поле представляет собой плоскую волну вида  $H_x^0 = H_{x0}^0 e^{ik_0 z}$ , а соответствующий импеданс  $Z$  при  $z=0$  есть

$$-\frac{E_y}{H_x} = \frac{-1}{\sigma} \cdot \frac{\partial H_x / \partial z}{H_x}. \quad (6)$$

Данная постановка задачи для  $H$ -поляризации предполагает, что проводимость всюду в пространстве отлична от нуля. Однако в геофизических задачах наибольший интерес представляет постановка предельных задач, когда проводимости воздуха и высокоомного слоя равны нулю. Физически переход к нулевой проводимости в какой-либо части пространства означает, что токами в этой области можно пренебречь.

Итак, если положить проводимость воздуха равной нулю, то условие непрерывности функции  $\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial z}$  переходит в краевое условие  $\left(\frac{\partial H_x}{\partial z}\right)^- = 0$ , где «-» означает предельное значение сверху.

В верхней полуплоскости, таким образом, имеется задача Неймана для уравнения Лапласа, решением которой будет произвольная постоянная. Не ограничивая общности, можно эту постоянную положить равной единице, что будет означать нормировку горизонтальной компоненты  $H_x$  на ее значение при  $z=0$ .

Если положить равной нулю проводимость  $\sigma_2$ , то на линии  $z=s(y)$  будет иметь место условие  $\left(\frac{\partial H_x}{\partial n}\right) = 0$ , т. е. в высокоомном слое необходимо решать задачу Неймана для уравнения Лапласа

$$\Delta H_x = 0, \quad \frac{\partial H_x}{\partial n} = 0 \text{ при } z = s(y) \text{ и } z = H.$$

Решением этой задачи также является произвольная постоянная  $H_x=C$ . Эта постоянная может быть определена единственным образом из решения соответствующей задачи для горизонтально-однородной среды. При этом отметим, что подобная постановка правомерна лишь в случае локальных неоднородностей, т. е. когда

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} s(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} s(y).$$

Переходя к окончательной постановке задачи, положим  $\sigma_0$  равной нулю, а под величиной  $H_x(y, z)$  будем понимать нормированную компоненту магнитного поля. В соответствии со сказанным будем различать два случая:

а)  $\sigma_2 \neq 0$ .  $H_x(y, z)$  является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} \Delta H_x + k_1^2 H_x &= 0, & 0 < z < s(y), \\ \Delta H_x + k_2^2 H_x &= 0, & s(y) < z < H \end{aligned} \quad (7)$$

и граничным условиям

$$H_x = 1 \text{ при } z = 0 \text{ и } \frac{\partial H_x}{\partial z} = 0 \text{ при } z = H, \quad (8)$$

условием непрерывности

$$[H_x] = \left[ \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial z} \right] = 0 \text{ при } z = s(y) \quad (9)$$

и условию на бесконечности

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} \rightarrow 0 \text{ при } |y| \rightarrow \infty. \quad (10)$$

б)  $\sigma_2 = 0$ . Для  $H_x(y, z)$  имеет место следующая задача в слое переменной мощности  $0 < z < s(y)$ :

$$\Delta H_x + k_1^2 H_x = 0, \quad (11)$$



$$H_x = 1 \text{ при } z = 0 \text{ и } H_0 = C_0 \text{ при } z = s(y), \quad (12)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} \rightarrow 0 \text{ при } |y| \rightarrow \infty, \quad (13)$$

где  $C_0$  определяется из решения соответствующей горизонтально-однородной задачи.

Задача (11) с условиями (12) и (13) при произвольной кривой  $S(y)$  может быть решена модифицированным методом Галеркина [7], который для рассматриваемых моделей переходит в обычный метод Галеркина.

Задачи (2) и (7) можно редуцировать к различным типам интегральных уравнений; например, обе задачи можно свести к системам одномерных интегральных уравнений по контуру сечения неоднородности относительно касательных к контуру компонент векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  [4], либо к двумерным интегральным уравнениям по сечению неоднородности [3], а также к системам интегральных уравнений по отрезкам прямых  $y = -l$  и  $y = l$  ( $0 \leq z \leq H$ ), получаемым методом работы [5].

По мнению авторов, для рассматриваемого класса задач наиболее просты для решения двумерные уравнения ( $E$ -поляризация) и уравнения по прямой  $y = l$  ( $H$ -поляризация); в дальнейшем задача (2) будет сведена к двумерному уравнению по площади сечения неоднородности, а задача (7) — к системе интегральных уравнений по прямой  $y = l$  ( $0 \leq z \leq H$ ).

Для вывода и решения интегральных уравнений всех указанных типов необходимо иметь функции Грина  $G_{e,m}$  горизонтально-однородной слоистой среды с границами  $z = 0$ ,  $z = h$ ,  $z = H$ , которые удовлетворяют следующим условиям:

- 1)  $\Delta G_{e,m}(M, M_0) + k_j^2 G(M, M_0) = -\delta(r_{M, M_0})$ ,
- 2)  $[G_e] = \left[ \frac{\partial G_e}{\partial z} \right] = 0$  и  $[\sigma G_m] = \left[ \frac{\partial G_m}{\partial z} \right] = 0$  при  $z = h$ ,
- 3)  $G_e(M, M_0) = 0$ ,  $\frac{\partial G_m}{\partial z} = 0$  при  $z = H$ ,
- 4)  $G_{e,m}(M, M_0)$  убывают на бесконечности.

Функции  $G_{e,m}$  можно представить в виде интеграла Фурье

$$G_{e,m}(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \cos t(y - y_0) g_{e,m}(z, z_0 t) dt, \quad (14)$$

где

$$g_e = \frac{1}{\eta_1 P_e} \{(\eta_1 + \zeta) [(\eta_1 + \eta_0) e^{-\eta_1(2h-z_0)} + (\eta_1 - \eta_0) e^{-\eta_1(2h+z_0)}] e^{\eta_1 z} +$$

$$+ (\eta_1 - \eta_0) [(\eta_1 + \zeta) e^{-\eta_1(2h-z_0)} + (\eta_1 - \zeta) e^{-\eta_1 z_0}] e^{-\eta_1 z}\} + \frac{1}{\eta_1} e^{-\eta_1 |z-z_0|} \quad (14a)$$

при  $0 < z < h$ ,  $0 < z_0 < h$ ;

$$g_e = \frac{A}{P_e} \{(\eta_1 + \eta_0) e^{-\eta_1(h-z)} + (\eta_1 - \eta_0) e^{-\eta_1(h+z)}\} \quad (14б)$$

при  $0 < z < h$ ,  $h < z_0 < H$ ;

$$g_e = \frac{A k_1^2}{P_e (\eta_0 - \zeta)} \cdot \frac{1 - e^{-2\eta_1 h}}{\text{sh } \eta_2 (h - H)} \text{sh } \eta_2 (z - H) + \frac{1}{\eta_2} \{e^{-\eta_2 |z-z_0|} - e^{-\eta_2 (2H-z-z_0)}\} \quad (14в)$$

при  $h < z_0 < H$ ,  $h < z < H$ ;

$$P_e = (\eta_1 + \eta_0)(\eta_1 - \zeta) - (\eta_1 - \eta_0)(\eta_1 + \zeta) e^{-2\eta_1 h},$$

$$A = \frac{\eta_2 - \zeta}{\eta_2} [e^{-\eta_2(z_0-h)} - e^{-\eta_2(2H-h-z_0)}], \quad (14г)$$

$$\eta_j = \sqrt{t^2 - k_j^2}, \text{ Re } \eta_j \geq 0, \zeta = \eta_2 \frac{e^{2\eta_2(h-H)} + 1}{e^{2\eta_2(h-H)} - 1},$$

$$g_m = \frac{e^{-\eta_1(2h-z-z_0)}}{\eta_1 P_m} (1 - e^{-2\eta_1 z}) (1 - e^{-2\eta_1 z_0}) Q_1 + \frac{1}{\eta_1} (e^{-\eta_1 |z-z_0|} - e^{-\eta_1(z+z_0)}), \quad 0 < z < h, \quad 0 < z_0 < h, \quad (14д)$$

$$g_m = \frac{2e^{-\eta_1(h-z_0)} e^{-\eta_2(z-h)}}{P_m} (1 + e^{-2\eta_2(H-z)}) (1 - e^{-2\eta_1 z_0}), \quad (0 < z_0 < h, \quad h < z < H)$$

$$g_m = \frac{2\alpha^2 e^{-\eta_1(h-z)} e^{-\eta_2(z_0-h)}}{P_m} (1 + e^{-2\eta_2(H-z_0)}) (1 - e^{-2\eta_1 z}), \quad (h < z_0 < H, \quad 0 < z < h)$$

$$g_m = \frac{e^{-\eta_2(z+z_0-2h)}}{\eta_2 P_m} (1 + e^{-2\eta_2(H-z)}) (1 + e^{-2\eta_2(H-z_0)}) Q_2 + \frac{1}{\eta_2} (e^{-\eta_2 |z-z_0|} + e^{-\eta_2(2H-z-z_0)}) \quad (h < z < H, \quad h < z_0 < H),$$

$$\alpha^2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{k_2^2}{k_1^2};$$

$$P_m = \alpha^2 \eta_1 (1 + e^{-2\eta_1 h}) (1 + e^{-2\eta_2(H-h)}) + \eta_2 (1 - e^{-2\eta_1 h}) (1 - e^{-2\eta_2(H-h)});$$

$$Q_1 = \alpha^2 \eta_1 (1 + e^{-2\eta_1(H-h)}) - \eta_2 (1 - e^{-2\eta_2(H-h)});$$

$$Q_2 = \eta_2 (1 - e^{-2\eta_1 h}) - \alpha^2 \eta_1 (1 + e^{-2\eta_1 h}).$$

Перейдем теперь к выводу интегральных уравнений и описанию численных методов их решения.

3. Метод расчета  $E$ -поляризованного магнито-теллурического поля. Задачу (2) для компоненты  $E_x(y, z)$  будем решать методом интегральных уравнений, а именно сведем эту задачу к интегральному уравнению по прямоугольной области, занимаемой горстом ( $-l < y < l, h_1 < z < h$ ). Представим компоненту  $E_x$  в виде

$$E_x = E_x^{(0)} + E_x^{(1)}, \quad (15)$$

где  $E_x^{(0)}(z)$  — нормальное поле в горизонтально-слоистой среде (при отсутствии неоднородности, когда  $h_1 = h$ ). Обозначим через  $S$  область неоднородности в плоскости  $yOz$ :

$$S = \{|y| < l, h_1 < z < h\},$$

$E_x^{(1)}(M)$  имеет смысл аномального поля и удовлетворяет уравнению

$$\Delta E_x^{(1)} + k_2^2 E_x^{(1)} = 0, \quad z < 0,$$

$$\Delta E_x^{(1)} + k_1^2 E_x^{(1)} = \begin{cases} 0 & M \in S, \\ (k_1^2 - k_2^2) E_x & M \in S, 0 < z < h, \end{cases} \quad (16)$$

$$\Delta E_x^{(1)} + k_2^2 E_x^{(1)} = 0, \quad h < z < H,$$

граничному условию  $E_{xz}^{(1)}(M) = 0$  при  $z = H$  и условиям непрерывности вместе с первыми частными производными всюду на плоскости  $yOz$  и убыванию на бесконечности. Нетрудно показать, что задача (16) имеет единственное решение.

Применим теперь к функциям  $E_x^{(1)}(M)$  и  $G_e(M, M_0)$  вторую формулу Грина в областях  $z < 0, 0 < z < h(y), h(y) < z < H$ , считая, что точка  $M_0 \in S$ . Складывая полученное равенство с учетом граничных условий и условий непрерывности, получим следующее уравнение Фредгольма II рода по площади области  $S$  относительно  $E_x(M)$

$$E_x(M_0) - (k_1^2 - k_2^2) \int_{-l}^l \int_{h_1}^h G_e(M, M_0) E_x(M) dydz = E_x^{(0)}(M_0). \quad (17)$$

Правая часть этого уравнения может быть выписана и имеет вид

$$E_x = \frac{2\alpha_0 [\cos k_1(z-h) + i\zeta \sin k_1(z-h)]}{(\alpha_0 + \zeta) \cos k_1 h - i(1 + \alpha_0 \zeta) \sin k_1 h}$$

где  $\alpha_0 = \frac{k_0}{k_1}, \zeta = -i \frac{k_2}{k_1} \operatorname{ctg} k_2(h-H)$ . Пронормируем функцию  $E_x$  на  $E_x^{(0)}(0)$ , т. е. введем безразмерную функцию  $u = \frac{E_x(M)}{E_x^{(0)}(0)}$  и перепишем уравнение (17) относительно  $u$

$$u(M_0) - (k_1^2 - k_2^2) \int_{-l}^l \int_{h_1}^h G(M, M_0) u(M) dydz = u_0(M_0).$$

Используя симметрию задачи, окончательно будем иметь

$$u(y_0, z_0) - (k_1^2 - k_2^2) \int_0^{h_1} \int_{h_1}^h [G(-y, z, y_0, z_0) + G(y, z, y_0, z_0)] \times \\ \times u(y, z) dydz = u_0(y_0, z_0). \quad (18)$$

Следует отметить, что при  $H \rightarrow \infty$  уравнение (18) непосредственно переходит в уравнение для задачи структурного МТЗ. Полученное интегральное уравнение решалось методом сведения интегрального оператора к системе линейных алгебраических уравнений. При этом целесообразно воспользоваться блочным методом, так как ядро интегрируется в квадратурах (это возможно для неоднородностей с прямолинейными границами).

Число точек разбиения по осям  $y(n_1)$  и  $z(n_2)$  определялось путем методических расчетов. При этом матрица полученной системы имела клеточную структуру с числом клеток  $n_2^2$ . Учитывая зависимость коэффициентов только от модуля суммы и разности аргументов внутри каждой клетки, достаточно считать только строку и столбец клетки, что существенно снижает машинное время счета.

Интегралы, необходимые для формирования клетки, удобно вычислять сериями по несколько штук, так как громоздкая функция, зависящая от  $z, z_0$  и  $t$ , вычисляется в каждой точке один раз для всей серии.

Решив полученную систему алгебраических уравнений, получим значения  $u(M)$  внутри области  $S$ . Полагая  $z_0$  равным нулю в формуле (17), а также дифференцируя это соотношение по  $z_0$  при  $z_0 = 0$ , получим значения  $E_x(y, 0)$  и  $H_y(y, 0)$  и тем самым: импеданс  $Z = \frac{E_x}{H_y}$  на поверхности  $z = 0$ .

4. Метод решения  $H$ -поляризованного магнито-теллурического поля (метод одномерных интегральных уравнений). Обратимся теперь к решению задачи (8). Для решения этой задачи можно получить аналогичное двумерное уравнение, но в данном случае это нецелесообразно, так как оно будет нагруженным, и это вызовет определенные вычислительные трудности при его решении. Поэтому для сведения задачи (8) к одномерным интегральным уравне-

ням удобно воспользоваться методом работы [5], основная идея которого применительно к данной задаче состоит в следующем.

Рассмотрим в слое  $0 < z < H$  три области: 1)  $y < -l$ , 2)  $-l < y < l$ , 3)  $y > l$ . Если параметр  $\sigma$  из каждой области естественным образом продолжить на весь слой, то получится три горизонтально-однородные среды, причем продолжение из 1-й и 3-й областей будут совпадать. Эти среды будут отличаться только положением границы  $z=h$  и  $z=h_1$ . Заметим, что если проводимость в слое также будет меняться, то построенные среды будут отличаться и проводимостью.

Для каждой из построенных сред можно написать задачу типа (8) и построить соответствующую функцию Грина  $G_m(M, M_0)$ , которую снабдим индексами «1» и «2» (индекса «3» не будет, так как задачи (1) и (3) совпадают). Пользуясь формулами (14), нетрудно выписать явные выражения для функций, с помощью которых получаются интегральные представления решения задачи (8) во всем слое ( $0 \leq z \leq H$ ). Для этого применим формулу Грина к функциям  $H_x(M)$  и  $G_m^{(1)}(M, M_0)$  в областях

$$\{0 < z < H, y < -l\} \text{ и } \{0 < z < H, y > l\}$$

и к функциям  $H_x(M)$  и  $G_m^{(2)}(M, M_0)$  в области  $\{0 < z < H, |y| < l\}$ ; сложив полученные соотношения, имеем

$$u(M_0) = \int_0^H \left[ u|_{y=l} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{G}^+ - \bar{G}^-) - v|_{y=l} (\bar{G}^+ + \bar{G}^-) \right] dz - \\ - (1 - \alpha^2) \int_{h_1}^h v|_{y=l} (G_1^+ + G_1^-) dz + F(y_0, z_0), \quad (19)$$

где

$$u = H_x, v = \frac{\partial H_x}{\partial y}, \bar{G} = G_m^{(1)} - G_m^{(2)}, \alpha^2 = \begin{cases} 1, & (z_0 < h_1) \cup (z_0 > h), \\ \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, & h_1 \leq z_0 \leq h, \end{cases} \\ \tilde{G}^+ = \tilde{G}|_{y=l+0}, \tilde{G}^- = \tilde{G}|_{y=l-0},$$

$\tilde{G}$  — одна из трех функций:  $G_m^{(1)}, G_m^{(2)}$  или  $\bar{G}$ ,

$$F(y_0, z_0) = \int_{-\infty}^{-l} \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=0} dy + \int_{-l}^l \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=0} dy + \int_l^{\infty} \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=0} dy. \quad (20)$$

Кроме того, учитывалась симметрия задачи

$$u|_{y=l} = u|_{y=-l}, v|_{y=l} = -v|_{y=-l}.$$

Продифференцировав уравнение (19) и опустив точку  $M_0$  на отрезок  $y=l, 0 \leq z \leq H$ , получим интегральное уравнение для  $v$ . При этом необходимо учесть регулярность функций  $\bar{G}$  и  $\frac{\partial \bar{G}}{\partial y}$  [5].

$$\frac{1}{2} (1 + \alpha^2) v(l, z_0) = \int_0^H \left[ u(l, z) \frac{\partial^2}{\partial y \partial y_0} (\bar{G}^+ - \bar{G}^-) - \right. \\ \left. - v(l, z) \frac{\partial}{\partial y_0} (\bar{G}^+ + \bar{G}^-) \right] \Big|_{y_0=l} dz - \\ - (1 - \alpha^2) \int_{h_1}^h v(l, z) \frac{\partial}{\partial y_0} (G_1^+ + G_1^-) \Big|_{y_0=l} dz + \frac{\partial G(l, z_0)}{\partial y_0}.$$

Рассмотрим правые части полученных уравнений. Для этого преобразуем первый интеграл в формуле (20)

$$\int_{-\infty}^{-l} \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=0} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-l} dy \int_0^{\infty} \cos(y - y_0)t \frac{\partial}{\partial z} g \Big|_{z=0} dt = \\ = \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial}{\partial z} g \Big|_{z=0} \Big|_{t=0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin t(y_0 + l)}{t} \frac{\partial}{\partial z} g \Big|_{z=0} dt.$$

Преобразуя аналогичным образом остальные интегралы в правых частях, окончательно получим

$$F(l, z_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} g \Big|_{z=0} \Big|_{t=0} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin 2lt}{t} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (g - g_1) \Big|_{z=0} dt, \\ \frac{\partial F(l, z_0)}{\partial y_0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} (1 - \cos 2lt) \frac{\partial}{\partial z} (g - g_1) \Big|_{z=0} dt. \quad (21)$$

Полученная система интегральных уравнений решалась методом сведения к системе линейных алгебраических уравнений с использованием блочного метода. Получив значения  $u$  и  $v$  на отрезке  $y=l, 0 \leq z \leq H$ , найдем значение

$$\frac{\partial u(y_0, 0)}{\partial z_0} = \frac{\partial u_0(z_0 = 0)}{\partial z_0} + \\ + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin lt \cos y_0 t}{t} [T(h) - T(h_1)] dt +$$

$$+ \int_0^H \left\{ u \frac{\partial^2}{\partial y \partial z_0} (\bar{G}^+ - \bar{G}^-) - v \frac{\partial}{\partial z_0} (\bar{G}^+ + \bar{G}^-) \right\} dz - \\ - (1 - \alpha^2) \int_{h_1}^h v \frac{\partial}{\partial z_0} (G_1^+ + G_1^-) dz, \quad (22)$$

где  $u_0(z_0)$  — значение нормальной составляющей поля  $H_x(y_0, z_0)$ ,

$$T(h) = - \eta_1 e^{-\eta_1 h} \frac{\alpha^2 \eta_1 \operatorname{ch} \eta_2 (H-h) - \eta_2 \operatorname{sh} \eta_2 (H-h)}{\alpha^2 \eta_1 \operatorname{ch} \eta_1 h \operatorname{ch} \eta_2 (H-h) + \eta_2 \operatorname{sh} \eta_1 h \operatorname{sh} \eta_2 (H-h)}.$$

Учитывая исходную нормировку поля  $H_x$ , для импеданса имеем

$$Z_H = - \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial u(y_0, 0)}{\partial z_0}.$$

Таким образом, задача для  $H$ -поляризованного поля в полной постановке сведена к системе интегральных уравнений Фредгольма II рода по отрезку  $[0, H]$ . Решение этой задачи позволяет выяснить влияние конечного сопротивления высокоомного слоя на характер магнито-теллурического поля. Если этим влиянием можно пренебречь, то соответствующая предельная задача (при  $\sigma_2 = 0$ ) может быть решена методом собственных функций.

**5. Метод разложения по собственным функциям в расчете  $H$ -поляризованного поля.** Теперь рассмотрим предыдущую задачу в случае, когда  $\sigma_2 = 0$ , т. е. задачу (11). Как отмечалось выше, значение  $H_x$  на границе  $z = s(y)$  можно получить, рассматривая соответствующую горизонтально-однородную среду. Получив искомое выражение и устремив  $\sigma_2$  к нулю, окончательно имеем

$$H_x|_{z=s(y)} = C = \frac{\beta}{\beta \cos k_1 h + k_1 h \sin k_1 h}. \quad (23)$$

$$\beta = \frac{h}{h-H}$$

Отметим, что при  $H \rightarrow \infty$ ,  $C \rightarrow 0$  и мы получаем строгую постановку задачи структурного МТЗ [7].

Переходя к решению задачи (11), представим компоненту магнитного поля  $H_x$  в виде суммы нормальной и аномальной составляющих

$$H_x(y, z) = \frac{\sin k_1 (h-z) + C \sin k_1 z}{\sin k_1 h} + u(y, z), \quad |y| > l,$$

$$H_x(y, z) = \frac{\sin k_1 (h_1-z) + C \sin k_1 z}{\sin k_1 h_1} + v(y, z), \quad |y| < l,$$

причем функции  $u(y, z)$  и  $v(y, z)$  удовлетворяют следующим условиям:

$$\Delta u + k_1^2 u = 0 \quad \text{при } 0 < z < h, \quad |y| > l, \quad (24)$$

$$u = 0 \quad \text{при } z = 0 \text{ и } z = h,$$

$$u \rightarrow 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow 0 \quad \text{при } y \rightarrow \infty,$$

$$\Delta v + k_1^2 v = 0 \quad \text{при } 0 < z < h_1, \quad |y| < l, \quad (25)$$

$$v = 0 \quad \text{при } z = 0 \text{ и } z = h_1,$$

$$u + \frac{\sin k_1 (h-z) + C \sin k_1 z}{\sin k_1 h} = v + \frac{\sin k_1 (h_1-z) + C \sin k_1 z}{\sin k_1 h_1}, \quad (26)$$

$$\text{при } 0 \leq z \leq h, \quad |y| = l,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{при } 0 \leq z \leq h, \quad |y| = l. \quad (27)$$

(Последние два условия следуют из непрерывности компонент электромагнитного поля  $H_x$  и  $E_z$ .) Методом разделения переменных общее решение задачи для  $u$  и  $v$  получаем в следующем виде:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-g_n(h)(|y|-l)} \sin \frac{n\pi z}{h}, \quad |y| > l,$$

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\operatorname{ch} g_n(h_1) y}{\operatorname{ch} g_n(h_1) l} \sin \frac{n\pi z}{h_1}, \quad |y| < l,$$

где

$$g_n(x) = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{x}\right)^2 - k_1^2}, \quad \operatorname{Re} g_n(x) > 0.$$

Величины  $a_n$  и  $b_n$  являются коэффициентами Фурье функций  $u$  и  $v$  в сечении  $y = l$  и определяются следующим образом:

$$a_n = \frac{2}{h} \int_0^h u|_{y=l} \sin \frac{n\pi z}{h} dz, \quad b_n = \frac{2}{h_1} \int_0^{h_1} v|_{y=l} \sin \frac{n\pi z}{h_1} dz.$$

Решение уравнений (24) и (25) будем искать в виде конечного разложения по подсистеме базисных функций, т. е.

$$u = \sum_{n=1}^{N_1} a_n e^{-g_n(h)(|y|-l)} \sin \frac{n\pi z}{h}, \quad (28)$$

$$v = \sum_{n=1}^{N_2} b_n \frac{\operatorname{ch} g_n(h_1) y}{\operatorname{ch} g_n(h_2) l} \sin \frac{n\pi z}{h_1}. \quad (29)$$

Подставляя выражения (28)–(29) в условия сопряжения (26)–(27) и применяя преобразование Фурье, получим

$$a_m = \sum_{n=1}^{N_2} b_n \alpha_{mn} - \alpha_m^0, \quad m = 1, 2, \dots, N_1, \quad (30)$$

$$b_m = -\frac{P_m}{\gamma_m \mu} \sum_{n=1}^{N_1} a_n g_n(h) \alpha_{nm}, \quad m = 1, 2, \dots, N_2, \quad (31)$$

где

$$\alpha_m^0 = \frac{2k_1}{g_m^2(h) h \sin k_1 h} \Phi_m,$$

$$\Phi_m = \sin m\pi v + C \left\{ \frac{k_1 h}{m\pi} [\cos m\pi v + (-1)^{m+1}] \sin k_1 h - \right. \\ \left. - \sin m\pi v \cos k_1 h \right\},$$

$$\alpha_{mn} = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} n v \sin m\pi v}{\left[ \frac{n^2}{m^2} - v^2 \right] m^2}, & \frac{n}{m} \neq v, \\ v, & \frac{n}{m} = v, \end{cases}$$

$$P_m = \operatorname{cth} g_m(h_1) l, \quad v = \frac{h_1}{h}.$$

Из соотношений (30)–(31) можно исключить одну совокупность коэффициентов и получить систему линейных алгебраических уравнений относительно оставшейся. При этом более целесообразно исключать коэффициенты  $a_n$ , так как  $b_n$  — коэффициенты Фурье функции, имеющей интегрируемую вторую производную и, следовательно, убывают не медленнее, чем  $\frac{1}{n^2}$ . Что же касается  $a_n$ , то они являются коэффициентами Фурье функции, имеющей разрывную производную, и убывают, как  $\frac{1}{n}$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Следовательно, порядок решаемой системы для  $b_n$  ( $N_2$ ), вообще говоря, можно брать меньшим, чем для  $a_n$  ( $N_1$ ), а при пересчете по (30) — будем брать  $N_1$  достаточно большим. Таким образом, окончательно получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$b_m + \frac{4v}{\pi^2} A_m \sum_{n=1}^{N_2} b_n K_{mn} = \frac{4k_1}{\pi h \sin k_1 h_1} F_m, \quad m = 1, \dots, N_2,$$

где

$$A_m = \frac{m P_m (-1)^{m+1}}{g_m(h_1)}, \quad F_m = \sum_{j=1}^{N_1} \frac{\beta_{jm}}{g_j(h)} \Phi_j,$$

$$K_{mn} = n (-1)^{n+1} \sum_{j=1}^{N_1} \beta_{jn} \beta_{jm} g_j(h),$$

$$\beta_{jm} = \begin{cases} \frac{\sin j\pi v}{m^2 - (jv)^2}, & m \neq jv, \\ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(-1)^{m+1}}{m}, & m = jv. \end{cases}$$

Решая полученную систему, найдем коэффициенты  $b_n$  и из соотношения (30) —  $a_n$ . После этого легко находим значение  $E_y$  на поверхности  $z=0$ .

**6. Влияние локальных поверхностных неоднородностей на магнито-теллурическое зондирование.** Проведем исследование кривых кажущегося удельного сопротивления, рассчитанных на основе описанных выше методов, применительно к теории магнито-теллурического зондирования.

Итак, рассматривается модель горизонтально-неоднородной среды типа горст (рис. 1), грабен (рис. 2) и включение (рис. 3), возбуждаемых плоской волной  $E$ - или  $H$ -поляризации. Соответствующие удельные сопротивления будем обозначать  $\rho_E$  и  $\rho_H$ .

Основные свойства кривых МТЗ в двумерно-неоднородных моделях на основе приближенного решения были сформулированы в работе [8]. Эти свойства заключаются в следующем. Кривые  $\rho_H$  достаточно хорошо отражают рельеф высокоомного горизонта. Однако дают неверное представление о нижней части разреза. Кривые же  $\rho_E$  дают более или менее верное представление о нижней части разреза. Но методы работы [8] дают лишь качественный результат, а к структурам рассматриваемого типа эти методы вообще не применимы (в силу скачкообразного изменения параметров верхнего слоя). Поэтому проведем анализ кривых МТЗ с точки зрения их возможностей при интерпретации.

Рассмотрим сначала кривые  $\rho_H$ . На рис. 4,5 представлены кривые  $\rho_H$  для горста (рис. 4) и грабена (рис. 5) в различных точках профиля (индекс кривых  $d = \frac{y}{h}$ ) для следующих отношений параметров:  $v = \frac{h_1}{h} = 0,1$  (горст),  $v = 10$  (грабен), при  $L = \frac{l}{h} = 1$  и  $N =$

$= \frac{H}{h} = 21$  (горст) и при  $L = 10$ ,  $N = 210$  для грабена.

При уменьшении частоты наблюдается ярко выраженный эффект  $S$ , т. е.  $\rho_H$  сохраняет повышенную чувствительность к изменению суммарной продольной проводимости проводящего верхнего слоя. При дальнейшем понижении частоты эффект  $S$  сохраняется, что вызывает смещение кривых по оси — вверх при уменьшении  $S$

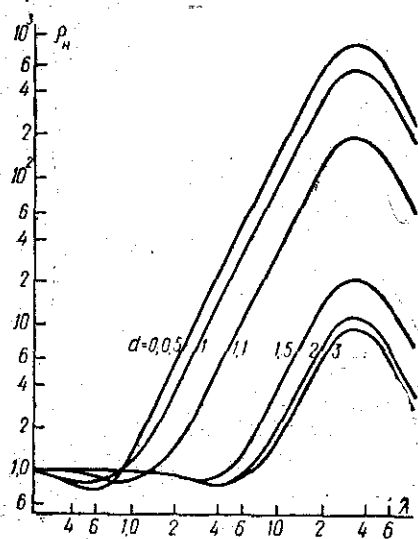


Рис. 4

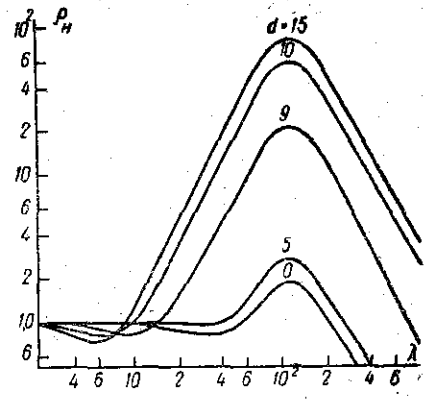


Рис. 5

и вниз при увеличении  $S$ . При формальной интерпретации таких кривых получается соответственно завышенная или заниженная мощность высокоомного горизонта. При этом можно дать количественную характеристику этой мощности в зависимости от параметров неоднородности.

На рис. 6 и 7 представлены кривые  $\rho_H$  для горста при следующих значениях параметров:  $\nu = 0,1$ ,  $H = 21$ ,  $\Sigma = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 0,01$ ,  $L = 1$  и 4 соответственно. Эти кривые характеризуют как влияние конечного сопротивления высокоомного слоя, так и величины неоднородности. Анализ приведенных кривых и их сравнение с соответствующими кривыми для  $\Sigma = 0$  показывают, что влияние эффекта  $S$  зависит только от поперечного сопротивления высокоомного слоя и ширины неоднородности при конечном сопротивлении высокоомного слоя.

Перейдем теперь к анализу кривых  $\rho_E$ . Поведение кривых  $\rho_E$  над горстом представлено на рис. 8 для  $\nu = 0,05$ ,  $N = 21$ ,  $L = 1$ . Кривые 1 и 2 соответствуют горизонтально-однородной модели сре-

ды с мощностью верхнего слоя  $\tilde{h}$  и  $h_1$  соответственно, остальные кривые соответствуют различным точкам по профилю структуры (параметр  $d = \frac{y}{h}$ ).

Кривые  $\rho_E$  над слабо проводящим включением с параметрами  $\nu = 0,06$ ,  $N = 21$ ,  $L = 1$  представлены на рис. 9. Кривые с индексами  $d = \infty$  и  $L = \infty$  соответствуют горизонтально-однородной модели с проводимостью верхнего слоя  $\sigma_1$  и  $\sigma$ . Так как кривые  $\rho_E$  приведены

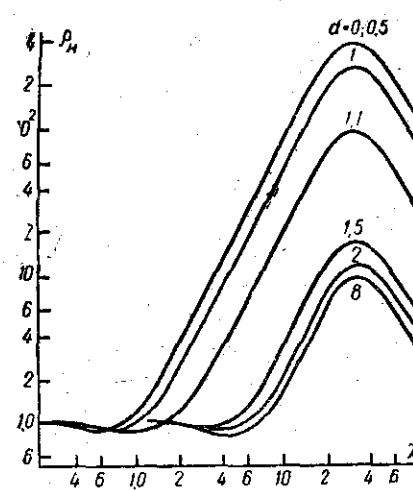


Рис. 6

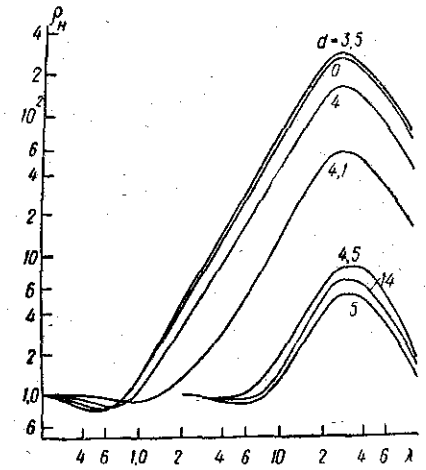


Рис. 7

в зависимости от  $\lambda = \frac{\lambda_1}{h}$  ( $\lambda_1$  — длина волны в среде с проводимостью  $\sigma$ ), то высокочастотные ветви этих кривых различны и равны соответственно 1 и  $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ , т. е. кривая  $L = \infty$  идет в данном случае выше кривой  $d = \infty$ .

В середине неоднородностей кривые на высоких частотах отражают строение верхних слоев, т. е. выходят на соответствующие асимптотические значения. С понижением частоты кривые над серединой неоднородностей ведут себя аналогично, имея ярко выраженные максимум и минимум, формальная интерпретация которых приводит к ложному представлению о наличии проводящего слоя внутри высокоомного слоя.

При удалении от неоднородности кривые для обеих структур ведут себя практически одинаково, а именно минимум кривых на высоких частотах выражен достаточно слабо, а с понижением частоты кривые дают заниженное значение мощности проводящего слоя даже на сравнительно большом удалении от неоднородностей.

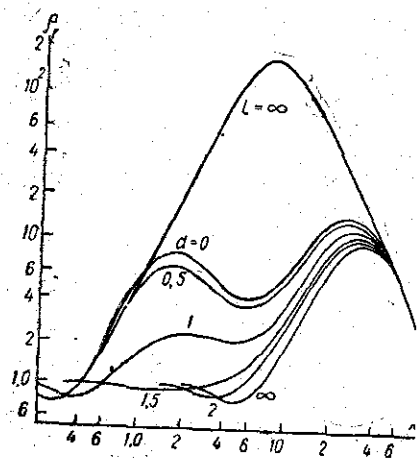


Рис. 8

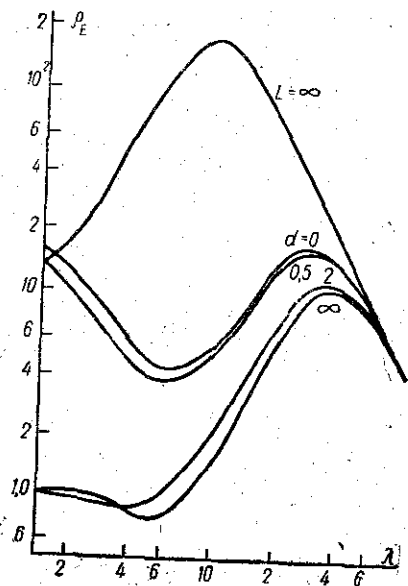


Рис. 9

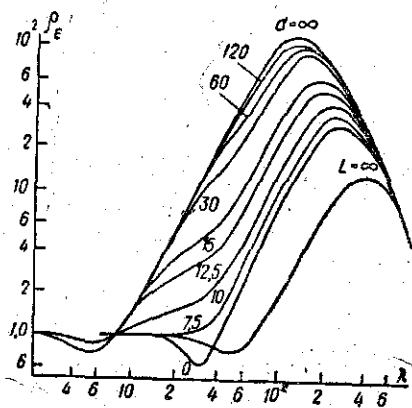


Рис. 10

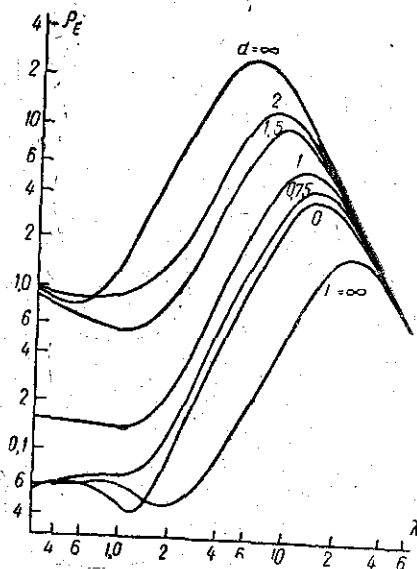


Рис. 11

На низких частотах все кривые независимо от характера неоднородности и нахождения точки наблюдения не искажены и дают верное представление о строении глубинных слоев.

На рис. 10 и 11 представлены кривые  $p_E$  над грабенom и хорошо проводящим включением. В отличие от предыдущего, кривые на рис. 10 и 11 уже не имеют максимум и минимум, а идут под углом, большим  $63^{\circ}25'$ , к оси абсцисс. С понижением частоты под середи-

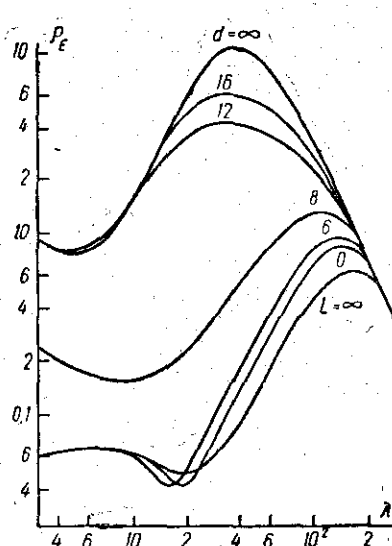


Рис. 12

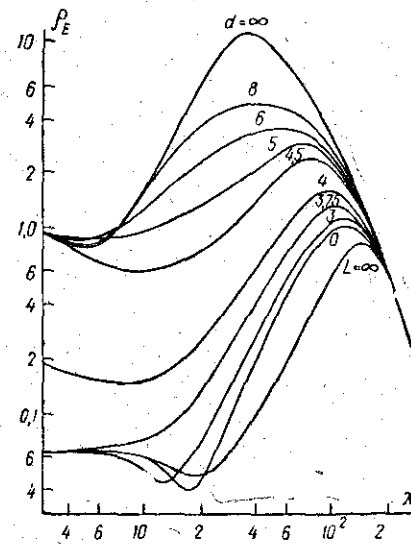


Рис. 13

ной неоднородностей кривые имеют перегибы, которые при формальной интерпретации дают неправильное представление о разрезе. На низких частотах, как и в предыдущих случаях, верно отражает строение глубоких слоев среды.

Указанные искажения кривых МТЗ сильно зависят от геометрических и электрических параметров неоднородностей. При этом форма кривых  $p_E$  по существу связана со значением параметра  $S = \sigma h$ , о чем свидетельствует практическое совпадение кривых в зоне  $S$  для различных неоднородностей, но таких, что  $S = \text{const}$ . Особый интерес представляет зависимость частоты кривых МТЗ от ширины неоднородностей вдоль  $y$ .

На рис. 12, 13 приведены кривые  $p_E$  для  $L=4; 8$  соответственно для хорошо проводящего включения. Приводимые результаты хорошо иллюстрируют изменения формы кривых в зависимости от горизонтальных размеров неоднородностей. В случае горста [9] происходит сглаживание максимумов и минимумов, а над включением — более четкое выдерживание линии  $S$ . В целом над широкими неоднородностями индукционный эффект начинает проявлять-



ся на более низких частотах, но сказывается на значительно большем удалении от неоднородностей.

В заключении подведем некоторые итоги проведенного анализа магнито-теллурического поля над двумерно-неоднородной средой. Искажение кривых  $\rho_H$  и  $\rho_E$ , таких, как смещение ветвей, появление экстремумов и перегибов свидетельствует о недопустимости формальной интерпретации кривых МТЗ. Необходим обширный палеоточный материал, позволяющий производить количественный учет влияния различных неоднородностей. В целом же при исследовании верхних слоев более приемлимой является  $H$ -поляризованное магнито-теллурическое поле, а при исследовании глубоких слоев —  $E$ -поляризованное поле. Кроме того, наряду с анализом  $\rho_E$  и  $\rho_H$  полезно проводить исследование частотных и профильных зависимостей составляющих электромагнитного поля.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н. Об определении электрических характеристик глубинных слоев Земной коры. ДАН СССР, 73, № 2, 1950.
2. Тихонов А. Н. К математическому обоснованию теорем электромагнитных зондирований. ЖВМ и МФ, 5, № 3, 1965.
3. Дмитриев В. И. Дифракция плоского электромагнитного поля на цилиндрических телах, расположенных в слоистых средах. В сб.: «Вычисл. методы и программирование», вып. III. Изд-во МГУ, 1965.
4. Захаров Е. В. К дифракции плоского электромагнитного поля на однородном цилиндрическом теле, погруженном в слоистую среду. «Изв. АН СССР», сер. физика Земли, № 1, 1969.
5. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Метод решения задач электродинамики неоднородных сред. ЖВМ и МФ, 10, № 6, 1970.
6. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Об интегральных уравнениях некоторого класса граничных задач электродинамики неоднородных сред. В сб.: «Вычисл. методы и программирование», вып. XVI. Изд-во МГУ, 1971.
7. Кокотушкин Г. А., Дмитриев В. И. Магнито-теллурическое поле в слое со ступенчатым изменением толщины слоя. «Прикладная геофизика», вып. 52, 1968.
8. Тихонов А. Н., Дмитриев В. И. Влияние поверхностных неоднородностей на глубинное МТЗ. В сб.: «Вычисл. методы и программирование», вып. XIII. Изд-во МГУ, 1969.
9. Дмитриев В. И., Кокотушкин Г. А. Альбом палеток для магнито-теллурического зондирования в неоднородных средах. Ротапринт. Изд-во МГУ, 1971.

### В. И. ДМИТРИЕВ, Е. В. ЗАХАРОВ, Н. А. МЕРШИКОВА О МЕТОДЕ РАСЧЕТА МАГНИТО-ТЕЛЛУРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НАД ВЕРТИКАЛЬНЫМ КОНТАКТОМ

Для развития теории глубинного МТЗ большое значение имеет теоретическое исследование влияния возможных неоднородностей границы хорошо проводящей верхней мантии Земли. В связи с этим представляет интерес решение ряда задач, в которых геоэлектрическая модель Земли состоит из двух проводящих слоев, лежащих на идеально проводящем подстилающем основании с неоднородной границей. Причем проводимость  $\sigma_2$  второго слоя много меньше проводимости  $\sigma_1$  первого слоя ( $\sigma_2 \ll \sigma_1$ ), глубина  $H$  до проводящего основания на порядок и больше превосходит мощность  $h$  первого слоя.

Здесь рассмотрены три задачи нахождения импеданса над средами с различным распределением проводимости слоев и неоднородности подстилающего основания. Задача нахождения импеданса на дневной поверхности сводится методом, предложенным в [1—3], к решению одномерных интегральных уравнений либо их систем.

**1. Постановка задачи.** Пусть имеется изотропная среда, состоящая из двух полупространств с границей раздела  $z=0$ ; при  $z<0$  — изолятор ( $\sigma_0=0$ ), при  $z>0$  — проводящая среда (Земля с кусочно-постоянным распределением проводимости), имеющая идеально проводящее подстилающее основание. Магнитную проницаемость среды будем считать всюду постоянной и равной  $\mu_0$ .

Рассмотрим различные случаи распределения проводимости и неоднородности границы проводящего основания. Во всех этих случаях параметры среды и первичного поля не будут зависеть от координаты  $x$  ( $\frac{\partial}{\partial x} \equiv 0$ ). При этом полное поле распадается на две поляризации, которые будем рассматривать отдельно.

1. Электрическая поляризация.

$$\vec{E} = \{E_x, 0, 0\}, \quad \vec{H} = \{0, H_y, H_z\},$$

$$H_y = -\frac{i}{\omega\mu_0} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad H_z = \frac{i}{\omega\mu_0} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial y}.$$

ся на более низких частотах, но сказывается на значительно большем удалении от неоднородностей.

В заключении подведем некоторые итоги проведенного анализа магнито-теллурического поля над двумерно-неоднородной средой. Искажение кривых  $\rho_H$  и  $\rho_E$ , таких, как смещение ветвей, появление экстремумов и перегибов свидетельствует о недопустимости формальной интерпретации кривых МТЗ. Необходим обширный палеоточный материал, позволяющий производить количественный учет влияния различных неоднородностей. В целом же при исследовании верхних слоев более приемлимой является  $H$ -поляризованное магнито-теллурическое поле, а при исследовании глубоких слоев —  $E$ -поляризованное поле. Кроме того, наряду с анализом  $\rho_E$  и  $\rho_H$  полезно проводить исследование частотных и профильных зависимостей составляющих электромагнитного поля.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н. Об определении электрических характеристик глубинных слоев Земной коры. ДАН СССР, 73, № 2, 1950.
2. Тихонов А. Н. К математическому обоснованию теорем электромагнитных зондирований. ЖВМ и МФ, 5, № 3, 1965.
3. Дмитриев В. И. Дифракция плоского электромагнитного поля на цилиндрических телах, расположенных в слоистых средах. В сб.: «Вычисл. методы и программирование», вып. III. Изд-во МГУ, 1965.
4. Захаров Е. В. К дифракции плоского электромагнитного поля на однородном цилиндрическом теле, погруженном в слоистую среду. «Изв. АН СССР», сер. физика Земли, № 1, 1969.
5. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Метод решения задач электродинамики неоднородных сред. ЖВМ и МФ, 10, № 6, 1970.
6. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Об интегральных уравнениях некоторого класса граничных задач электродинамики неоднородных сред. В сб.: «Вычисл. методы и программирование», вып. XVI. Изд-во МГУ, 1971.
7. Кокотушкин Г. А., Дмитриев В. И. Магнито-теллурическое поле в слое со ступенчатым изменением толщины слоя. «Прикладная геофизика», вып. 52, 1968.
8. Тихонов А. Н., Дмитриев В. И. Влияние поверхностных неоднородностей на глубинное МТЗ. В сб.: «Вычисл. методы и программирование», вып. XIII. Изд-во МГУ, 1969.
9. Дмитриев В. И., Кокотушкин Г. А. Альбом палеток для магнито-теллурического зондирования в неоднородных средах. Ротапринт. Изд-во МГУ. 1971.

### В. И. ДМИТРИЕВ, Е. В. ЗАХАРОВ, Н. А. МЕРШИКОВА О МЕТОДЕ РАСЧЕТА МАГНИТО-ТЕЛЛУРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НАД ВЕРТИКАЛЬНЫМ КОНТАКТОМ

Для развития теории глубинного МТЗ большое значение имеет теоретическое исследование влияния возможных неоднородностей границы хорошо проводящей верхней мантии Земли. В связи с этим представляет интерес решение ряда задач, в которых геоэлектрическая модель Земли состоит из двух проводящих слоев, лежащих на идеально проводящем подстилающем основании с неоднородной границей. Причем проводимость  $\sigma_2$  второго слоя много меньше проводимости  $\sigma_1$  первого слоя ( $\sigma_2 \ll \sigma_1$ ), глубина  $H$  до проводящего основания на порядок и больше превосходит мощность  $h$  первого слоя.

Здесь рассмотрены три задачи нахождения импеданса над средами с различным распределением проводимости слоев и неоднородности подстилающего основания. Задача нахождения импеданса на дневной поверхности сводится методом, предложенным в [1—3], к решению одномерных интегральных уравнений либо их систем.

**1. Постановка задачи.** Пусть имеется изотропная среда, состоящая из двух полупространств с границей раздела  $z=0$ ; при  $z < 0$  — изолятор ( $\sigma_0=0$ ), при  $z > 0$  — проводящая среда (Земля с кусочно-постоянным распределением проводимости), имеющая идеально проводящее подстилающее основание. Магнитную проницаемость среды будем считать всюду постоянной и равной  $\mu_0$ .

Рассмотрим различные случаи распределения проводимости и неоднородности границы проводящего основания. Во всех этих случаях параметры среды и первичного поля не будут зависеть от координаты  $x$  ( $\frac{\partial}{\partial x} \equiv 0$ ). При этом полное поле распадается на две поляризации, которые будем рассматривать отдельно.

1. Электрическая поляризация.

$$\vec{E} = \{E_x, 0, 0\}, \quad \vec{H} = \{0, H_y, H_z\},$$

$$H_y = -\frac{i}{\omega\mu_0} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad H_z = \frac{i}{\omega\mu_0} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial y}.$$

Компонента электрического поля  $E_x$  удовлетворяет следующей задаче:

$$\Delta E_x + k^2(M) E_x = 0, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

на границах раздела сред непрерывны  $E_x$  и  $\frac{\partial E_x}{\partial n}$  ( $n$  — нормаль к границе раздела),  $E_x = 0$  на границе идеально проводящего подстилающего основания. Предполагается, что возбуждение электромагнитных колебаний в среде происходит с помощью плоской волны, падающей из верхнего полупространства:

$$E_x^0 = E_{x0}^0 e^{ik_0 z}, \quad E_{x0}^0 = 1.$$

Импеданс  $Z_e$  на дневной поверхности определяется следующим образом:

$$Z_e = \frac{E_x}{H_y} \Big|_{z=0} = \frac{i\omega\mu_0 E_x}{\frac{\partial E_x}{\partial z}} \Big|_{z=0}.$$

## 2. Магнитная поляризация.

$$\vec{E} = \{0, E_y, E_z\}, \quad \vec{H} = \{H_x, 0, 0\},$$

$$E_y = \frac{i\omega\mu_0}{k^2(M)} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad E_z = -\frac{i\omega\mu_0}{k^2(M)} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial y}.$$

Компонента вектора магнитной напряженности  $H_x$  является решением следующей задачи:

$$\Delta H_x + k^2(M) H_x = 0,$$

на границах раздела сред непрерывны  $H_x$  и  $\frac{1}{k^2(M)} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial n}$ ,  $\frac{\partial H_x}{\partial n} = 0$  на границе идеально проводящего основания,  $H_x = \text{const}$  на границе  $z=0$ , первичное поле представляет собой плоскую волну. Поскольку нас интересует импеданс  $Z_m$  при  $z=0$

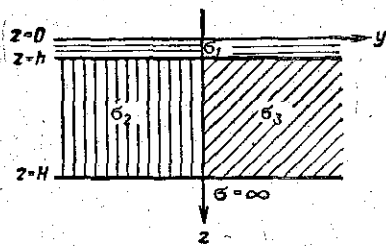


Рис. 1

распределение проводимости:

$$Z_m = \frac{E_y}{H_x} \Big|_{z=0} = \frac{\frac{\partial H_x}{\partial z}}{H_x \sigma(M)} \Big|_{z=0},$$

то будем предполагать, что  $H_x = 1$  при  $z=0$ .

2. Сведение задачи к системе одномерных интегральных уравнений для вертикального контакта. Рассмотрим (рис. 1) следующее

$$k^2(M) = \begin{cases} i\omega\mu_0\sigma_1, & 0 \leq z \leq h, \quad -\infty < y < \infty, \\ i\omega\mu_0\sigma_2, & h < z \leq H, \quad -\infty < y \leq 0, \\ i\omega\mu_0\sigma_3, & h < z \leq H, \quad 0 < y < \infty, \end{cases}$$

$z=H$  — граница подстилающего основания.

1.  $E$ -поляризация. В случае  $E$ -поляризации предельный переход  $\sigma_0 \rightarrow 0$  осуществляется непосредственно в интегральных уравнениях.

Пусть  $G_1(M, M_0)$  решение следующей задачи:

$$\Delta G_1 + k^2(M) G_1 = -\delta(M, M_0),$$

$$-\infty < y < \infty, \quad -\infty < z < \infty,$$

$$k^2(M) = \begin{cases} i\omega\mu_0\sigma_0, & z < 0, \\ i\omega\mu_0\sigma_1, & z > 0, \end{cases}$$

$$G_1 \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \pm \infty,$$

$$[G_1] \Big|_{z=0} = \left[ \frac{\partial G_1}{\partial z} \right] \Big|_{z=0} = 0.$$

$G_2(M, M_0)$  — решение следующей задачи:

$$\Delta G_2 + k^2(M) G_2 = -\delta(M, M_0),$$

$$-\infty < y < \infty, \quad -\infty < z < \infty,$$

$$k^2(M) = \begin{cases} i\omega\mu_0\sigma_2, & -\infty < y \leq 0, \\ i\omega\mu_0\sigma_3, & 0 < y < +\infty, \end{cases}$$

$$G_2 \rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow \pm \infty,$$

$$[G_2] \Big|_{y=0} = \left[ \frac{\partial G_2}{\partial y} \right] \Big|_{y=0} = 0.$$

$E_x^1$  — решение исходной задачи в случае, когда среда состоит из двух полупространств с границей  $z=0$ , причем

$$k^2(M) = \begin{cases} i\omega\mu_0\sigma_0, & z \leq 0, \\ i\omega\mu_0\sigma_1, & z > 0. \end{cases}$$

Применим вторую формулу Грина к функциям  $E_x - E_x^1$  и  $G_1$  в области  $V_1$ :  $-\infty < z < h$ ,  $-\infty < y < \infty$  и  $E_x$  и  $G_2$  в области  $V_2$ :  $h < z < H$ ,  $-\infty < y < \infty$ :

$$\int_{z=h} \left\{ [E_x(M) - E_x^1(M)] \frac{\partial G_1(M, M_0)}{\partial n_M} - \frac{\partial}{\partial n_M} [E_x(M) - E_x^1(M)] G_1(M, M_0) \right\} dl_M =$$

$$= \begin{cases} E_x(M_0) - E_x^1(M_0), & z \leq h_1, \\ 0, & z > h_1; \end{cases} \quad (1)$$

$$\int_{z=h} \left\{ E_x(M) \frac{\partial G_2(M, M_0)}{\partial n_M} - \frac{\partial E_x(M)}{\partial n_M} G_2(M, M_0) \right\} dl_M +$$

$$+ \int_{z=H} \left\{ E_x(M) \frac{\partial G_2(M, M_0)}{\partial n_M} - \frac{\partial E_x(M)}{\partial n_M} G_2(M, M_0) \right\} dl_M =$$

$$= \begin{cases} 0, & z < h_1, \\ E_x(M_0), & z \geq h_1; \end{cases} \quad (2)$$

$n$  — есть внутренняя нормаль к границе соответствующей области. Сложив выражения (1) и (2) и учтя граничные условия, получим интегральное соотношение, справедливое для любой точки области  $V = V_1 \cup V_2$ :

$$E_x(M_0) = E_x^1(M_0) - \int_{z=h} \left\{ E_x(M) \frac{\partial}{\partial z} [G_1(M, M_0) - G_2(M, M_0)] - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial E_x(M)}{\partial z} [G_1(M, M_0) - G_2(M, M_0)] \right\} dl_M +$$

$$+ \int_{z=H} \frac{\partial E_x(M)}{\partial z} G_2(M, M_0) dl_M. \quad (3)$$

Продифференцируем это соотношение (3) по  $z$  в точке  $M_0$ :

$$\frac{\partial E_x(M_0)}{\partial z_0} = \frac{\partial E_x^1(M_0)}{\partial z_0} \int_{z=h} \left\{ E_x(M) \frac{\partial^2}{\partial z \partial z_0} [G_1(M, M_0) - G_2(M, M_0)] - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial E_x(M)}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z_0} [G_1(M, M_0) - G_2(M, M_0)] \right\} dl_M +$$

$$+ \int_{z=H} \frac{\partial E_x(M)}{\partial z} \frac{\partial G_2(M, M_0)}{\partial z_0} dl_M. \quad (4)$$

Опустим в выражениях (3) и (4) точку  $M_0$  на границу  $z_0 = h$ , а в выражении (4) — точку  $M_0$  на границу  $z_0 = H$ . Введя обозначения

$$E_x(M)|_{z=h} = u(M), \quad \frac{\partial E_x(M)}{\partial z} \Big|_{z=h} = v(M), \quad \frac{\partial E_x(M)}{\partial z} \Big|_{z=H} = w_1^1(M),$$

получим следующую систему интегральных уравнений относительно функций  $u(M)$ ,  $v(M)$  и  $w(M)$ :

$$u(M_0) = E_x^1(M_0)|_{z_0=h} - \int_{z=h} \left\{ u(M) \frac{\partial}{\partial z} [G_1(M, M_0) - G_2(M, M_0)] - \right.$$

$$\left. - v(M) [G_1(M, M_0) - G_2(M, M_0)] \right\} \Big|_{z_0=h} dl_M +$$

$$+ \int_{z=H} w(M) G_2(M, M_0) \Big|_{z_0=h} dl_M;$$

$$v(M_0) = \frac{\partial E_x^1(M_0)}{\partial z_0} \Big|_{z_0=h} - \int_{z=h} \left\{ u(M) \frac{\partial^2}{\partial z \partial z_0} [G_1(M, M_0) - G_2(M, M_0)] - \right.$$

$$\left. - v(M) \frac{\partial}{\partial z_0} [G_1(M, M_0) - G_2(M, M_0)] \Big|_{z_0=h} \right\} dl_M +$$

$$+ \int_{z=H} w(M) \frac{\partial G_2(M, M_0)}{\partial z_0} \Big|_{z_0=h} dl_M;$$

$$\frac{1}{2} w(M_0) = \frac{\partial E_x^1(M_0)}{\partial z_0} \Big|_{z_0=H} - \int_{z=h} \left\{ u(M) \frac{\partial^2}{\partial z \partial z_0} [G_1(M, M_0) - \right.$$

$$\left. - G_2(M, M_0)] - v(M) \frac{\partial}{\partial z_0} [G_1(M, M_0) - G_2(M, M_0)] \Big|_{z_0=H} \right\} dl_M +$$

$$+ \int_{z=H} w(M) \frac{\partial G_2(M, M_0)}{\partial z_0} \Big|_{z_0=H} dl_M.$$

Решая эту систему, найдем  $E_x(M)$  и  $\frac{\partial E_x}{\partial z}(M)$  при  $z=h$  и  $\frac{\partial E_x}{\partial z}$  при  $z=H$ . Опустив в соотношениях (3) и (4) точку  $M_0$  на границу  $z_0=0$ , получим интегральные выражения, позволяющие получить  $E_x(M)$  и  $\frac{\partial E_x}{\partial z}(M)$  при  $z=0$ :

$$E_x(M_0)|_{z_0=0} = E_x^1(M_0)|_{z_0=0} - \int_{z=h} \left\{ E_x(M) \frac{\partial}{\partial z} [G_1(M, M_0) - \right.$$

$$\left. - G_2(M, M_0)] - \frac{\partial E_x(M)}{\partial z} [G_1(M, M_0) - G_2(M, M_0)] \Big|_{z_0=0} \right\} dl_M +$$

$$+ \int_{z=H} \frac{\partial E_x}{\partial z} G_2(M, M_0) \Big|_{z_0=0} dl_M;$$

$$\frac{\partial E_x(M_0)}{\partial z_0} \Big|_{z_0=0} = \frac{\partial E_x^1(M_0)}{\partial z_0} \Big|_{z_0=0} -$$

$$- \int_{z=h} \left\{ E_x(M) \frac{\partial^2}{\partial z \partial z_0} [G_1(M, M_0) - G_2(M, M_0)] - \right.$$

$$-\frac{\partial E_x(M)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z_0} [G_1(M, M_0) - G_2(M, M_0)] \Big|_{z_0=0} \Big\} dl_M -$$

$$-\int_{z=H} \frac{\partial E_x(M)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z_0} G_2(M, M_0) \Big|_{z_0=0} dl_M.$$

II.  $H$ -поляризация. Пусть  $G_1(M, M_0)$  — решение задачи:

$$\Delta G_1 + i\omega\mu_0\sigma_1 G_1 = -\delta(M, M_0),$$

$$-\infty < y < \infty, \quad 0 < z < \infty,$$

$$G_1|_{z=0} = 0, \quad G_1 \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \infty;$$

$G_2(M, M_0)$  — решение задачи:

$$\Delta G_2 + k_1^2(M) G_2 = -\delta(M, M_0),$$

$$-\infty < y < \infty, \quad -\infty < z < \infty,$$

$$k_1^2(M) = \begin{cases} i\omega\mu_0\sigma_2, & -\infty < y \leq 0, \\ i\omega\mu_0\sigma_3, & 0 < y < \infty, \end{cases}$$

$$[G_2]_{y=0} = \left[ \frac{1}{k^2(M)} \cdot \frac{\partial G_2}{\partial y} \right]_{y=0} = 0,$$

$$G_2 \rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow \pm \infty.$$

Применим вторую формулу Грина к функциям  $H_x$  и  $G_1$  в области  $V_1$ :  $0 \leq z \leq h$ ,  $-\infty < y < \infty$  и  $H_x$  и  $G_2$  в области  $V_2$ :  $h \leq z \leq H$ ,  $-\infty < y < \infty$ :

$$\oint_{L_1} \left\{ H_x(M) \frac{\partial G_1(M, M_0)}{\partial n_M} - G_1(M, M_0) \frac{\partial}{\partial n_M} H_x(M) \right\} dl_M =$$

$$= \begin{cases} H_x(M_0), & M_0 \in V_1, \\ 0, & M_0 \notin V_1, \end{cases} \quad (5)$$

$$\oint_{L_2} \left\{ H_x(M) \frac{\partial G_2(M, M_0)}{\partial n_M} - G_2(M, M_0) \frac{\partial}{\partial n_M} H_x(M) \right\} dl_M =$$

$$= \begin{cases} H_x(M_0), & M_0 \in V_2, \\ 0, & M_0 \notin V_2, \end{cases} \quad (6)$$

где  $L_1$  и  $L_2$  — границы областей  $V_1$  и  $V_2$  соответственно.

Обозначим  $H_x^- = H_x|_{z=h-0}$ ,  $H_x^+ = H_x|_{z=h+0}$ . Из условий разрыва для функции  $H_x$  и ее нормальной производной имеем

$$H_x^- = H_x^+, \quad \frac{\partial H_x^-}{\partial z} = \frac{k_1^2}{k_2^2} \cdot \frac{\partial H_x^+}{\partial z}.$$

Складывая (5) и (6) и учитывая граничные условия для функций  $H_x$ ,  $G_1$  и  $G_2$ , получим интегральное выражение для любой точки  $M_0 \in V_1 \cup V_2$ :

$$H_x(M_0) = \int_{z=0} \frac{\partial G_1(M, M_0)}{\partial z} dl_M -$$

$$- \int_{z=h} \left\{ H_x^+(M) \frac{\partial}{\partial z} [G_1(M, M_0) - G_2(M, M_0)] - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial H_x^+(M)}{\partial z} [G_1(M, M_0) - G_2(M, M_0)] \right\} dl_M +$$

$$+ \left( \frac{k_1^2}{k_2^2} - 1 \right) \int_{z=h} G_2(M, M_0) \frac{\partial H_x^+(M)}{\partial z} dl_M - \int_{z=H} H_x(M) \frac{\partial G_2(M, M_0)}{\partial z} dl_M. \quad (7)$$

Продифференцируем соотношение (7) по  $z$  в точке  $M_0$

$$\frac{\partial H_x(M_0)}{\partial z_0} = \int_{z=0} \frac{\partial^2 G_1(M, M_0)}{\partial z \partial z_0} dl_M -$$

$$- \int_{z=h} \left\{ H_x^+(M) \frac{\partial^2}{\partial z \partial z_0} [G_1(M, M_0) - G_2(M, M_0)] - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial H_x^+(M)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z_0} [G_1(M, M_0) - G_2(M, M_0)] \right\} dl_M +$$

$$+ \left( \frac{k_1^2}{k_2^2} - 1 \right) \int_{z=h} \frac{\partial G_2(M, M_0)}{\partial z_0} \frac{\partial H_x^+(M)}{\partial z} dl_M -$$

$$- \int_{z=H} H_x(M) \frac{\partial^2 G_2(M, M_0)}{\partial z \partial z_0} dl_M. \quad (8)$$

Введем обозначения:  $H_x^+(M)|_{z=h} = u(M)$ ,

$$\frac{\partial H_x^+(M)}{\partial z} \Big|_{z=h} = v(M), \quad H_x|_{z=H} = w(M).$$

Опуская в выражениях (7), (8) точку  $M_0$  на границу  $z_0 = h + 0$ , а в выражении (7) — на границу  $z_0 = H$ , получим систему интегральных уравнений для функций  $u(M)$ ,  $v(M)$  и  $w(M)$ :

$$u(M_0) = \int_{z=0} \frac{\partial G_1(M, M_0)}{\partial z} \Big|_{z_0=h} dl_M -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{z=h} \left\{ u(M) \frac{\partial}{\partial z} [G_1(M, M_0) - G_2(M, M_0)] - \right. \\
& - v(M) [G_1(M, M_0) - G_2(M, M_0)]|_{z=h} \left. \right\} dl_M + \\
& + \left( \frac{k_1^2}{k_2^2} - 1 \right) \int_{z=h} G_2(M, M_0) v(M)|_{z=h} dl_M - \\
& - \int_{z=H} \omega(M) \frac{\partial G_2(M, M_0)}{\partial z} \Big|_{z=H} dl_M; \\
& \frac{k_2^2 \mp k_1^2}{2k_2^2} v(M_0) = \int_{z=0} \frac{\partial^2 G_1(M, M_0)}{\partial z \partial z_0} \Big|_{z=h} dl_M - \\
& - \int_{z=h} \left\{ u(M) \frac{\partial^2}{\partial z \partial z_0} [G_1(M, M_0) - G_2(M, M_0)] - \right. \\
& - v(M) \frac{\partial}{\partial z_0} [G_1(M, M_0) - G_2(M, M_0)]|_{z=h} \left. \right\} dl_M + \\
& + \left( \frac{k_1^2}{k_2^2} - 1 \right) \int_{z=h} v(M) \frac{\partial G_2(M, M_0)}{\partial z_0} \Big|_{z=h} dl_M - \\
& - \int_{z=H} \omega(M) \frac{\partial^2 G_2(M, M_0)}{\partial z \partial z_0} \Big|_{z=H} dl_M; \\
& \frac{1}{2} \omega(M_0) = \int_{z_0=0} \frac{\partial G_1(M, M_0)}{\partial z} \Big|_{z_0=H} dl_M - \\
& - \int_{z=h} \left\{ u(M) \frac{\partial}{\partial z} [G_1(M, M_0) - G_2(M, M_0)] - \right. \\
& - v(M) [G_1(M, M_0) - G_2(M, M_0)]|_{z=H} \left. \right\} dl_M + \\
& + \left( \frac{k_1^2}{k_2^2} - 1 \right) \int_{z=H} v(M) G_2(M, M_0)|_{z=H} dl_M - \\
& - \int_{z=H} \omega(M) \frac{\partial G_2(M, M_0)}{\partial z} \Big|_{z=H} dl_M.
\end{aligned}$$

Решение этой системы позволяет найти  $Z_m$ . Для этого опустим в выражении (8) точку  $M_0$  на границу  $z_0=0$ , получим интегральное выражение для  $\frac{\partial H_x}{\partial z}$  при  $z=0$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial H_x}{\partial z_0}(M_0) \Big|_{z_0=0} = \int_{z=0} \frac{\partial^2 G_1(M, M_0)}{\partial z \partial z_0} \Big|_{z_0=0} dl_M - \\
& - \int_{z=h} \left\{ u(M) \frac{\partial^2}{\partial z \partial z_0} [G_1(M, M_0) - G_2(M, M_0)] - \right. \\
& - v(M) \frac{\partial}{\partial z_0} [G_1(M, M_0) - G_2(M, M_0)]|_{z_0=0} \left. \right\} dl_M + \\
& + \left( \frac{k_1^2}{k_2^2} - 1 \right) \int_{z=h} \frac{\partial G_2(M, M_0)}{\partial z_0} v(M) \Big|_{z_0=0} dl_M - \\
& - \int_{z=H} \omega(M) \frac{\partial^2 G_2(M, M_0)}{\partial z \partial z_0} \Big|_{z_0=0} dl_M.
\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь (рис. 2) следующее распределение проводимости:

$$k^2(M) = \begin{cases} i\omega\mu_0\sigma_1, & 0 \leq z \leq h, & -\infty < y < \infty, \\ i\omega\mu_0\sigma_2, & h < z \leq H_2, & 0 \leq y < \infty, \\ i\omega\mu_0\sigma_2, & h < z \leq H_1, & -\infty < y \leq 0, \\ i\omega\mu_0\sigma_3, & H_1 < z \leq H_2, & -\infty < y \leq 0; \end{cases}$$

$z=H_2$  — граница идеально проводящего основания. Эта модель интересна в связи с исследованием влияния на импеданс ступенчатого изменения границы хорошо проводящей верхней мантии Земли.

Рассмотрим случай  $H$ -поляризации. Пусть  $G_1(M, M_0)$  — решение задачи:

$$\begin{aligned}
\Delta G_1 + k^2(M) G_1 &= -\delta(M, M_0), \\
-\infty < y < \infty, & 0 \leq z \leq H_2,
\end{aligned}$$

$$k^2(M) = \begin{cases} i\omega\mu_0\sigma_1, & 0 \leq z \leq h, \\ i\omega\mu_0\sigma_2, & h < z \leq H_1, \\ i\omega\mu_0\sigma_3, & H_1 < z \leq H_2, \end{cases}$$

$$G_1|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial G_1}{\partial z} \Big|_{z=H_2} = 0;$$

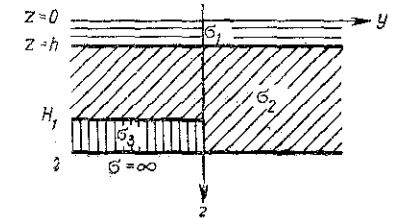


Рис. 2

$G_2(M, M_0)$  — решение задачи:

$$\begin{aligned} \Delta G_2 + k^2(M) G_2 &= -\delta(M, M_0), \\ -\infty < y < \infty, \quad 0 \leq z \leq H_2, \\ k^2(M) &= \begin{cases} i\omega\mu_0\sigma_1, & 0 \leq z \leq h, \\ i\omega\mu_0\sigma_2, & h < z \leq H_2, \end{cases} \\ G_2|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial G_2}{\partial z}|_{z=H_2} &= 0. \end{aligned}$$

Применим вторую формулу Грина к функциям  $H_x$  и  $G_1$  в области  $V_1$ :  $-\infty < y \leq 0$ ,  $0 \leq z \leq H_2$  и к функциям  $H_x$  и  $G_2$  в области  $V_2$ :  $0 \leq y < \infty$ ,  $0 \leq z \leq H_2$ . Аналогично предыдущему, складывая полученные выражения и учитывая граничные условия для  $H_x$ ,  $G_1$  и  $G_2$ , получим следующее интегральное соотношение, справедливое для любой точки области  $V_1 \cup V_2$ :

$$\begin{aligned} H_x(M_0) &= \int_{-\infty < y < 0}^{z=0} \frac{\partial G_1(M, M_0)}{\partial z} dl_M + \int_{0 < y < \infty}^{z=0} \frac{\partial G_2(M, M_0)}{\partial z} dl_M - \\ &- \int_{0 \leq z \leq H_2}^{y=0} \left\{ H_x(M) \frac{\partial}{\partial y} [G_1(M, M_0) - G_2(M, M_0)] - \right. \\ &- [G_1(M, M_0) - G_2(M, M_0)] \frac{\partial H_x(M)}{\partial y} \left. \right\} dl_M + \\ &+ \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right) \int_{H_1 \leq z \leq H_2}^{y=0} G_2(M, M_0) \frac{\partial H_x(M)}{\partial y} dl_M, \quad (9) \end{aligned}$$

где  $H_x^-(M)$  — значение функции  $H_x(M)$  на границе  $y = 0$  в области  $V_1$ .

Опустим в выражении (9) точку  $M_0 \in V_1$  на границу  $y_0 = 0$ . Продифференцируем (9) по  $y$  в точке  $M_0$  и опустим точку  $M_0 \in V_1$  на границу  $y_0 = 0$ . Получим систему интегральных уравнений для определения  $H_x^-(z_0)$  и  $\frac{\partial H_x^-}{\partial y_0}(z_0)$  на отрезке  $y_0 = 0$ ,  $0 \leq z_0 \leq H_2$ :

$$\begin{aligned} H_x^-(z_0) &= \int_{-\infty}^0 \frac{\partial G_1}{\partial z} \Big|_{y_0=0}^{z=0} dy + \int_0^{\infty} \frac{\partial G_2}{\partial z} \Big|_{y_0=0}^{z=0} dy - \\ &- \int_0^{H_2} \left\{ H_x^-(z) \frac{\partial}{\partial y} (G_1 - G_2) - \frac{\partial H_x^-(M)}{\partial y} (G_1 - G_2) \right\} \Big|_{y_0=0} dz + \end{aligned}$$

$$+ \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right) \int_{H_1}^{H_2} G_2 \frac{\partial H_x^-(M)}{\partial y} \Big|_{y_0=0}^{z=0} dz;$$

$$1 - \frac{1}{2} \alpha(z_0) \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right) \frac{\partial H_x^-}{\partial y_0}(z_0) =$$

$$= \int_{-\infty}^0 \frac{\partial^2 G_1}{\partial z \partial y_0} \Big|_{y_0=0}^{z=0} dy + \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 G_2}{\partial z \partial y_0} \Big|_{y_0=0}^{z=0} dy -$$

$$- \int_0^{H_2} \left\{ H_x^-(M) \frac{\partial^2}{\partial y \partial y_0} (G_1 - G_2) - \frac{\partial H_x^-(M)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y_0} (G_1 - G_2) \right\} \Big|_{y_0=0}^{z=0} dz +$$

$$+ \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right) \int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial G_2}{\partial y_0} \frac{\partial H_x^-}{\partial y} \Big|_{y_0=0}^{z=0} dz, \quad \alpha(z_0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq z_0 \leq H_1, \\ 1, & H_1 < z_0 \leq H_2. \end{cases}$$

Продифференцировав по  $z$  в точке  $M_0$  выражение (9) и опустив точку  $M_0$  на линию  $z_0 = 0$ , получим интегральное выражение, позволяющее вычислить  $Z_m$  по найденным  $H_x^-(z_0)$  и  $\frac{\partial H_x^-}{\partial y}(z_0)$ :

$$\frac{\partial H_x^-}{\partial z_0}(y_0) = \int_{-\infty}^0 \frac{\partial^2 G_1}{\partial z \partial z_0} \Big|_{z_0=0}^{z=0} dy + \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 G_2}{\partial z \partial z_0} \Big|_{z_0=0}^{z=0} dy -$$

$$- \int_0^{H_2} \left\{ H_x^- \frac{\partial^2}{\partial y \partial z_0} (G_1 - G_2) - \frac{\partial H_x^-}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z_0} (G_1 - G_2) \right\} \Big|_{z_0=0}^{y=0} dz +$$

$$+ \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right) \int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial}{\partial z_0} G_2 \frac{\partial H_x^-}{\partial y} \Big|_{z_0=0}^{y=0} dz.$$

3. Сведение задачи к интегральным уравнениям для гладкого локального изменения границы идеально проводящего основания. Рассмотрим (рис. 3) следующее распределение проводимости: граница идеально проводящего основания представляет собой функцию  $L(y)$ .

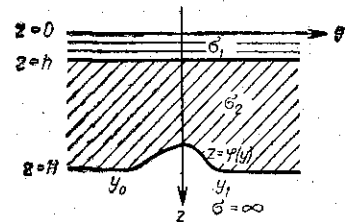


Рис. 3

$$L(y) = \begin{cases} L(y) = H, & -\infty < y \leq y_0, \\ L(y) = \psi(y), & y_0 \leq y \leq y_1, \\ L(y) = H, & y_1 \leq y < \infty. \end{cases}$$



I. E-поляризация. Пусть  $E_x^1$  — решение задачи в случае когда граница подстилающего основания  $z=H$ ,  $G_1$  — решение следующей задачи:

$$\Delta G_1 + k^2(M)G_1 = -\delta(M, M_0),$$

$$-\infty < y < \infty, \quad -\infty < z < H,$$

$$k^2(M) = \begin{cases} i\omega\mu_0\sigma_0, & z < 0, \\ i\omega\mu_0\sigma_1, & 0 \leq z \leq h, \\ i\omega\mu_0\sigma_2, & h < z < H, \end{cases} \quad [G]_{z=0}^{z=h} = \left[ \frac{\partial G}{\partial z} \right]_{z=0}^{z=h},$$

$$G \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow -\infty, \quad G|_{z=H} = 0.$$

Применим 2 формулу Грина к функциям  $E_x - E_x^1$  и  $G$  в области  $V$ :  $-\infty < y < \infty$ ,  $-\infty < z < L(y)$ ; с учетом граничных условий

$$E_x(M_0) = E_x^1(M_0) - \int_{z=\varphi(y)} \left[ E_x^1(M) \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n_M} - \frac{\partial E_x^1(M)}{\partial n_M} G_1(M, M_0) \right] dl_M - \int_{\varphi(y)} \frac{\partial E_x(M)}{\partial n_M} G(M, M_0) dl_M.$$

Продифференцируем по нормали к  $\varphi(y)$  в т.  $M_0$  и опустим т.  $M_0$  на  $z_0 = \varphi(y)$ . Получим интегральное уравнение относительно  $\frac{\partial H_x}{\partial n_M}$  по границе  $z = \varphi(y)$ :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial E_x(M_0)}{\partial n_M} \Big|_{M_0 \in \varphi(y)} = - \int_{\varphi(y)} \frac{\partial E_x(M)}{\partial n_M} \left[ \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n_{M_0}} \right]_{M_0 \in \varphi(y)} dl_M + F(M_0),$$

$$F(M_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial E_x^1(M_0)}{\partial n_{M_0}} \Big|_{M_0 \in \varphi(y)} - \int_{z=\varphi(y)} \left\{ E_x^1(M_0) \frac{\partial^2 G(M, M_0)}{\partial n_M \partial n_{M_0}} - \frac{\partial E_x^1(M_0)}{\partial n_M} \frac{\partial^2 G(M, M_0)}{\partial n_{M_0}} \right\} dl_M.$$

Решая это уравнение и используя выражения,

$$\frac{\partial E_x(M_0)}{\partial z_0} \Big|_{z_0=0} = - \int_{\varphi(y)} \frac{\partial E_x(M)}{\partial n_M} \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial z_0} \Big|_{z_0=0} dl_M + \frac{\partial E_x^1(M_0)}{\partial z_0} \Big|_{z_0=0} - \int_{z=\varphi(y)} \left\{ E_x^1(M_0) \frac{\partial^2 G(M, M_0)}{\partial n_M \partial z_0} - \frac{\partial E_x^1(M_0)}{\partial n_M} \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial z_0} \Big|_{z_0=0} \right\} dl_M,$$

можно определить импеданс  $Z_e$ .

II. H-поляризация. Пусть функция  $G$  — решение задачи

$$\Delta G + k^2(M)G = -\delta(M, M_0),$$

$$-\infty < y < \infty, \quad 0 < z < H,$$

$$k^2(M) = \begin{cases} i\omega\mu_0\sigma_1, & 0 < z \leq h, \\ i\omega\mu_0\sigma_2, & h < z < H, \end{cases}$$

$$G|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0.$$

Применим вторую формулу Грина к функциям  $H_x$  и  $G$  в области  $V_1$ :  $-\infty < y < \infty$ ,  $0 < z < L(y)$ .

С учетом граничных условий получим интегральное уравнение относительно  $H_x(M_0)|_{z_0=\varphi(y)}$  по границе  $z = \varphi(y)$ :

$$\frac{1}{2} H_x(M_0) \Big|_{z_0=\varphi(y)} = \int_{\varphi(y)} H_x(M) \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n_M} \Big|_{z_0=\varphi(y)} dl_M + \int_{z=0} \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n_M} \Big|_{z_0=\varphi(y)} dl_M.$$

Решив это уравнение, найдем импеданс  $Z_m$ , используя следующее интегральное соотношение:

$$\frac{\partial H_x(M_0)}{\partial z_0} \Big|_{z_0=0} = \int_{z=0} \frac{\partial^2 G(M, M_0)}{\partial n_M \partial z_0} \Big|_{z_0=0} dl_M + \int_{\varphi(y)} H_x(M) \frac{\partial^2 G(M, M_0)}{\partial n_M \partial z_0} dl_M.$$

Итак, в случае E- и H-поляризации решение этой задачи сводится к решению интегрального уравнения по изгибу нижней границы. Аналогичное уравнение было получено в работе [4].

Таким образом, все задачи редуцированы к интегральным уравнениям второго рода или к их системам, численное решение которых можно получить, сводя их каким-либо способом к системам линейных алгебраических уравнений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Метод решения задач электродинамики неоднородных сред. ЖВМ и МФ, № 6, 1970.
2. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Метод расчета магнито-теллурического поля над наклонным контактом. «Изв. АН СССР», сер. физика Земли, № 11, 1970.
3. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Об интегральных уравнениях некоторого класса граничных задач электродинамики неоднородных сред. В сб.: «Вычисл. методы и программирование», вып. XVI. Изд-во МГУ, 1971.
4. Дмитриев В. И. Электромагнитные поля в неоднородных средах. ВЦ МГУ, ротопринт, 1969.

В. И. ДМИТРИЕВ, Е. В. ЗАХАРОВ, Я. Я. КОКИН  
**ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА  
 ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕМ ДИСКЕ, ПОГРУЖЕННОМ  
 В СЛОИСТУЮ СРЕДУ**

Во многих задачах радиофизики и геофизики возникает необходимость решения и исследования задач дифракции электромагнитных волн на телах, расположенных в слоистых средах. В частности, такие задачи представляют определенный интерес для теории магнито-теллурического зондирования, которая является одним из основных методов исследования глубинных слоев земной коры.

Решение задач дифракции на телах произвольной формы сопряжено с большими математическими трудностями. Поэтому для выяснения основных физических закономерностей поведения электромагнитных полей в присутствии неоднородностей целесообразнее исследовать задачи дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих телах простейшей геометрической формы.

В настоящей работе рассматривается задача дифракции электромагнитных волн на идеально проводящем диске, погруженном в слоистую среду соосно с ней. Данная модель будет хорошо аппроксимировать изометричную в горизонтальных направлениях хорошо проводящую неоднородность с очень малыми вертикальными размерами.

Будем рассматривать модель трехслойной плоско-слоистой среды, состоящей из слоев  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$ . Ось  $z$  направим нормально к плоским границам раздела среды, а границу раздела слоев  $T_1$  и  $T_2$  примем за плоскость  $z=0$ . В слоистую среду соосно с ней на глубину  $h$  в слое  $T_3$  погружен идеально проводящий диск радиуса  $R$ . Комплексную диэлектрическую проницаемость среды  $\tilde{\epsilon}_p = \tilde{\epsilon}_p(z)$  считаем кусочно-постоянной функцией

$$\tilde{\epsilon}_p(z) = \begin{cases} \tilde{\epsilon}_1 & \text{при } -\infty < z < 0, \\ \tilde{\epsilon}_2 & \text{при } 0 \leq z \leq h_1, \\ \tilde{\epsilon}_3 & \text{при } z > h_1, \end{cases} \quad h > h_1,$$

Среду будем считать магнито-однородной, т. е. везде магнитная проницаемость среды  $\mu = \text{const}$ .

Для данной модели среды рассмотрим следующие две задачи, отличающиеся характером первичных полей  $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ .

1. Осесимметричное возбуждение диска полем специального вида, имеющим только вертикальную магнитную компоненту:

$$\vec{H}_0 = H_0 e^{-i\omega t} \vec{e}_z,$$

где  $H_0 = \text{const}$ ,  $\omega$  — круговая частота электромагнитных колебаний,  $t$  — время.

Рассмотрение этой задачи необходимо для выяснения влияния вертикальной магнитной компоненты возбуждающего поля на аномальное поле диска в слоистой среде.

2. Возбуждение диска плоской волной:

$$\vec{E}_0 = E_{0x} e^{-i\omega t + ik_1 z} \vec{e}_x, \quad \vec{H}_0 = H_{0y} e^{-i\omega t + ik_1 z} \vec{e}_y,$$

нормально падающей на поверхность  $z=0$ ,  $k_1$  — волновое число среды  $T_1$ .

В обоих случаях нужно найти аномальное поле  $\vec{E}'_a = \vec{E}_a e^{-i\omega t}$ ,  $\vec{H}'_a = \vec{H}_a e^{-i\omega t}$ , которое вне диска удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E}_a &= i\omega\mu \vec{H}_a, & \text{rot } \vec{H}_a &= -i\omega\tilde{\epsilon}_a \vec{E}_a, \\ \text{div } \vec{E}_a &= 0, & \text{div } \vec{H}_a &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

при условии, что касательные компоненты  $\vec{E}_a$  и  $\vec{H}_a$  непрерывны при переходе через плоские границы раздела среды ( $z=0, h_1$ ), а на диске суммарная касательная компонента электрической составляющей поля равна нулю:  $\vec{E}_{a\tau} + \vec{E}_{0\tau} = 0$ . На бесконечности аномальное поле удовлетворяет условию убывания.

Рассмотрим решение каждой из поставленных задач.

1. **Осесимметричное возбуждение.** В этом случае на диске индуцируется ток с плотностью  $\vec{j} = j_\varphi(r) \vec{e}_\varphi$ , имеющей только азимутальную составляющую ( $r, \varphi, z$  — цилиндрические координаты точки наблюдения, начало цилиндрической системы координат взято над центром диска на границе раздела слоев  $T_1$  и  $T_2$ ). Так как плотность индуцированного на диске тока имеет только азимутальную компоненту, то, как показано в [4], векторный потенциал  $\vec{A}$  в цилиндрической системе координат имеет вид:  $\vec{A} = A(r, z) \vec{e}_\varphi$ .

В прямоугольной системе координат векторный потенциал представим в виде

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu}{4\pi} \iint_S \hat{G}(M, M_0) \vec{j}(M_0) dS_{M_0},$$

где тензор Грина

$$\hat{G}(M, M_0) = \begin{pmatrix} G(M, M_0) & 0 \\ 0 & G(M, M_0) \end{pmatrix},$$

$\vec{A}(M) = \{A_x, A_y\}$ ,  $\vec{j} = \{j_x, j_y\}$ ,  $S$  — поверхность диска. Функция  $G(M, M_0)$  удовлетворяет краевой задаче

$$\Delta G + K^2 G = -4\pi\delta(R_{MM_0}), \quad k^2 = \omega^2 \tilde{\epsilon} \mu$$

с граничными условиями  $[G] = 0$ ,  $\left[\frac{\partial G}{\partial z}\right] = 0$  при  $z = 0$ ,  $h_1 \cdot R_{MM_0}$  — расстояние между точками  $M$  и  $M_0$ . На бесконечности  $G(M, M_0)$  удовлетворяет условию убывания.

При помощи преобразования Ханкеля функцию  $G(M, M_0)$  ищем в следующем виде:

$$\text{в } T_1: G(M, M_0) = \int_0^\infty C_1(\lambda, z_0) \mathcal{J}_0(\lambda R_{MM_0}) \lambda e^{l_1 z} d\lambda,$$

$$\text{в } T_2: G(M, M_0) = \int_0^\infty [C_2(\lambda, z_0) e^{l_2 z} + C_3(\lambda, z_0) e^{-l_2 z}] \times \\ \times \mathcal{J}_0(\lambda, R_{MM_0}) \lambda d\lambda,$$

$$\text{в } T_3: G(M, M_0) = \frac{e^{i k_3 R_{MM_0}}}{R_{MM_0}} + \int_0^\infty C_4(\lambda, z_0) e^{-l_3 z} \mathcal{J}_0(\lambda R_{MM_0}) \lambda d\lambda,$$

где  $\mathcal{J}_0(\lambda R_{MM_0})$  — функция Бесселя первого рода,  $l_p = \sqrt{\lambda^2 - k_p^2}$ ,  $\text{Re } l_p > 0$ ,  $k_p^2 = \omega^2 \tilde{\epsilon}_p \mu$  ( $p = 1, 2, 3$ ),  $C_n(\lambda, z_0)$ , где  $C_n$  находим из граничных условий. Векторный потенциал будет известен, если будем знать плотность тока  $\vec{j}$ . Для этого нужно знать значение векторного потенциала  $\vec{A}$  на диске. В цилиндрической системе координат аномальное поле имеет вид

$$\vec{E}_a = i\omega \vec{A} = \{0, E_\varphi, 0\}, \quad \vec{H}_a = \{H_r, 0, H_z\}.$$

Пользуясь уравнениями Максвелла и тем, что на диске  $H_z = -H_0$  и  $E_\varphi$  ограничена, получаем, что  $\vec{A}(r) = -\frac{\mu H_0 r}{2}$ ,  $0 \leq z \leq R$ . Для получения интегрального уравнения относительно  $j_\varphi(r)$  воспользуемся соотношением

$$\vec{A}_y = \frac{\mu}{4\pi} \iint_S G(M, M_0) j_y(M_0) dS_{M_0}. \quad (2)$$

В выражении (2) перейдем к полярной системе координат]

$$\vec{A}_y(r, \varphi) = \frac{\mu}{4\pi} \iint_S G(r, \varphi, \rho, \psi) \rho j_\varphi(\rho) \cos \psi d\rho d\psi, \quad (3)$$

где  $\rho, \psi, z_0$  — координаты точки  $M_0 \in S$ ,  $\vec{A}_y(r, \varphi) = \vec{A}(r) \cos \varphi$ ,

$$\vec{A}_y(r, \varphi) = -\frac{\mu H_0 r \cos \varphi}{2}.$$

Выражение (3) представляет искомое интегральное уравнение. Упростим это уравнение. Очевидно, что

$$\vec{A}_y(r, \varphi) = \frac{\mu}{4\pi} \iint_S \vec{G}(r, \rho, \beta) \rho j_\varphi(\rho) \cos \psi d\rho d\psi, \quad (4)$$

где

$$\beta = \psi - \varphi, \quad \vec{G}(r, \rho, \beta) = \int_0^\infty \lambda \vec{C}_4(\lambda, h) \mathcal{J}_0(\lambda \bar{R}) d\lambda,$$

$$\vec{C}_4(\lambda, h) = l_3^{-1} + C_4(\lambda, h) e^{-l_3 h},$$

$$\bar{R} = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2\rho r \cos \beta}.$$

Применив теорему «сложения» к  $\mathcal{J}_0(\lambda \bar{R})$  и проинтегрировав в уравнении (4) по  $\psi$ , получим интегральное уравнение Фредгольма I рода

$$-H_0 r = \int_0^R \vec{g}(r, \rho) \rho j_\varphi(\rho) d\rho, \quad (5)$$

где

$$\vec{g}(r, \rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{e^{i k_3 \bar{R}_0 \cos \tau d\tau}}{\bar{R}_0} + \int_0^\infty \lambda C_4(\lambda, h) \cdot e^{-l_3 h} \cdot \mathcal{J}_1(\lambda r) \times \\ \times \mathcal{J}_1(\lambda \rho) d\lambda,$$

$$\bar{R}_0 = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2\rho r \cos \tau}.$$

$\mathcal{J}_1(\lambda r)$  — функция Бесселя первого рода первого порядка. Решив уравнение (5), нетрудно найти компоненты аномального поля (следовательно и суммарное поле)

$$E_\varphi = i\omega A_\varphi = i\omega [-A_x(r, \varphi, z) \sin \varphi + A_y(r, \varphi, z) \cos \varphi],$$

$$H_r = H_{ax}(r, \varphi, z) \cos \varphi + H_{ay}(r, \varphi, z) \sin \varphi,$$

$$H_z^c = H_0 + H_z(r, \varphi, z),$$

где  $H_z^c$  — суммарная вертикальная магнитная компонента.

Уравнение (5) хотя и одномерное, но имеет довольно сложное ядро. В общем случае его приходится решать численно методом саморегуляризации, предложенном в работе [2]. Из уравнения (5) легко находим низкочастотную асимптотику плотности тока

$$j_\varphi^{(0)}(r) = \lim_{\omega \rightarrow 0} j_\varphi(r) = -\frac{4H_0 r}{\pi \sqrt{R^2 - r^2}},$$

которой можно пользоваться при расчете компонент поля на низких частотах.

**2. Возбуждение диска плоской волной.** При этом возникает ток с плотностью  $j = \{j_x, j_y, 0\}$ . В декартовой системе координат векторный потенциал в данном случае имеет вид:  $\vec{A} = \{A_x, A_y, A_z\}$ . Компоненты аномального поля через векторный потенциал выражаются следующим образом:

$$\vec{H}_a = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}, \quad \vec{E}_a = i\omega \vec{A} + \text{grad } f,$$

где

$$f = \frac{i}{\omega \epsilon \mu} \text{div } \vec{A}.$$

Для векторного потенциала справедливо интегральное представление

$$\vec{A}(M) = \frac{1}{2\pi} \iint_S \hat{G}(M, M_0) \vec{j}(M_0) dS_{M_0}, \quad (6)$$

где тензор Грина

$$\hat{G}(M, M_0) = \begin{pmatrix} G_1(M, M_0) & 0 & 0 \\ 0 & G_1(M, M_0) & 0 \\ \frac{\mu \partial g(M, M_0)}{\partial x} & \frac{\mu \partial g(M, M_0)}{\partial y} & G_2(M, M_0) \end{pmatrix}.$$

Чтобы вывести интегральные уравнения для  $j_x$  и  $j_y$ , достаточно знать функции  $G_1(M, M_0)$  и  $g(M, M_0)$ , которые удовлетворяют следующей краевой задаче:

$$\Delta G_1 + k^2 G_1 = -4\pi \delta(R_{MM_0}),$$

$$\Delta g + k^2 g = 0, \quad R_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

с граничными условиями на плоских границах раздела среды

$$[G_1] = 0, \quad \left[ \frac{\partial G_1}{\partial z} \right] = 0, \quad [g] = 0,$$

$$\left[ \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial g}{\partial z} \right] = - \left[ \frac{1}{\epsilon \mu} \right] G_1 \quad \text{при } z = 0, h_1. \quad (7)$$

Функции  $G_1(M, M_0)$  и  $g(M, M_0)$  удовлетворяют на бесконечности условию убывания. Пользуясь преобразованием Ханкеля и условием убывания, находим  $G_1(M, M_0)$  и  $g(M, M_0)$ :

$$\text{в } T_1: N_m(M, M_0) = \int_0^\infty C_{m1}(\lambda, z_0) e^{l_1 z} \mathcal{J}_0(\lambda R_{MM_0}) \lambda d\lambda,$$

$$\text{в } T_2: N_m(M, M_0) = \int_0^\infty [C_{m2}(\lambda, z_0) e^{l_2 z} + C_{m3}(\lambda, z_0) e^{-l_2 z}] \times \\ \times \mathcal{J}_0(\lambda R_{MM_0}) \lambda d\lambda,$$

$$\text{в } T_3: N_m(M, M_0) = \frac{\delta_m e^{ik_3 R_{MM_0}}}{R_{MM_0}} + \int_0^\infty C_{m4}(\lambda, z_0) e^{-l_3 z} \mathcal{J}_0(\lambda R_{MM_0}) \lambda d\lambda,$$

где  $m = 1, 2$ ,  $N_1(M, M_0) = G_1(M, M_0)$ ,  $N_2(M, M_0) = g(M, M_0)$ ,  $\delta_1 = 1$ ,  $\delta_2 = 0$ ,  $l_p = \sqrt{\lambda^2 - k_p^2}$ ,  $\text{Re } l_p > 0$ ,  $p = 1, 2, 3$ .

Из граничных условий (7) находим  $C_{mq}(\lambda, z_0)$ ,  $q = 1, 2, 3, 4$ .

Методом, изложенным в [3], устанавливаем, что в полярной системе координат

$$j_x(M_0) = j_x^{(0)}(\rho) + j_x^{(2)}(\rho) \cos 2\psi, \quad j_y(M_0) = j_y^{(2)}(\rho) \sin 2\psi,$$

где

$$j_x^{(0)}(\rho) = \frac{j_r(\rho) - j_\varphi(\rho)}{2}, \quad j_x^{(2)}(\rho) = j_y^{(2)}(\rho) = \frac{j_r(\rho) + j_\varphi(\rho)}{2}.$$

На диске суммарная тангенциальная составляющая электрического поля равна нулю. В цилиндрической системе координат справедливы соотношения

$$\sigma_\mu \bar{E}_{0\varphi} = k_3^2 \bar{A}_\varphi(r, \varphi) + \overline{(\text{grad } F_1)_\varphi},$$

$$\sigma_\mu \bar{E}_{0r} = k_3^2 \bar{A}_r(r, \varphi) + \overline{(\text{grad } F_1)_r}, \quad (8)$$

где

$$F_1 = \text{div } \vec{A}.$$

Черта над величинами означает их значения на диске.

На диске  $\bar{F}_1(r, \varphi) = f_{10}(r) \cos \varphi$  ограничена и удовлетворяет уравнению

$$\Delta \bar{F}_1 + k_3^2 \bar{F}_1 = -L(r),$$

где

$$L(r) = k_3^2 \mu \int_0^\infty \lambda^2 I_3 C_{24}(\lambda, h) e^{-\lambda h} F_{10}(\lambda) \mathcal{J}_1(\lambda r) d\lambda, \quad (9)$$

$$F_{10}(\lambda) = \int_0^R \rho [\mathcal{J}_2(\lambda \rho) j_x^{(2)}(\rho) - \mathcal{J}_0(\lambda \rho) j_x^{(0)}(\rho)] d\rho.$$

Из (9) находим, что

$$f_{10}(r) = C_0 \mathcal{J}_1(k_3 r) - \frac{\pi}{2} \left[ \mathcal{J}_1(k_3 r) \int_r^R Y_1(k_3 s) L(s) ds + Y_1(k_3 r) \int_0^r s \mathcal{J}_1(k_3 s) L(s) ds \right],$$

где  $\mathcal{J}_2(\lambda \rho)$  и  $Y_1(k_3 r)$  — функции Бесселя и Неймана, соответственно II и I порядков;  $C_0$  — постоянная, которую находим из условия, что радиальная составляющая плотности тока на краю диска  $j_r(R) = 0$ .

Если воспользоваться интегральным представлением (6) векторного потенциала  $\vec{A}(M)$  и теоремой «сложения» для  $\mathcal{J}_0(\lambda R)$ , то после некоторых преобразований из (8) получаем для нахождения гармоник плотностей токов систему одномерных интегральных уравнений Фредгольма I рода

$$\int_0^R V_1(r, \rho) \rho j_x^{(0)}(\rho) d\rho + \int_0^R V_2(r, \rho) \rho j_x^{(2)}(\rho) d\rho = i\omega^{-1} \bar{E}_{0x} - 2^{-1} k_3^{-1} C_0 \mathcal{J}_0(k_3 r), \quad (10)$$

$$\int_0^R V_3(r, \rho) \rho j_x^{(0)}(\rho) d\rho + \int_0^R V_4(r, \rho) \rho j_x^{(2)}(\rho) d\rho = 2^{-1} k_3^{-1} C_0 \mathcal{J}_2(k_3 r),$$

где

$$V_1(r, \rho) = \pi^{-1} \int_0^\pi \frac{e^{ik_3 \bar{R}_0}}{\bar{R}_0} d\tau + \int_0^\infty [\lambda C_{14}(\lambda, h) e^{-\lambda h} - M_1(\lambda, r)] \mathcal{J}_0(\lambda r) d\lambda,$$

$$\bar{R}_0 = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2\rho r \cos \tau},$$

$$V_2(r, \rho) = \int_0^\infty M_1(\lambda, r) \mathcal{J}_2(\lambda \rho) d\lambda,$$

$$V_3(r, \rho) = \int_0^\infty M_2(\lambda, r) \mathcal{J}_0(\lambda \rho) d\lambda,$$

$$V_4(r, \rho) = \pi^{-1} \int_0^\pi \frac{e^{ik_3 \bar{R}_0}}{\bar{R}_0} \cos 2\tau d\tau +$$

$$+ \int_0^\infty [\lambda C_{14}(\lambda, h) e^{-\lambda h} - M_2(\lambda, r)] \mathcal{J}_2(\lambda, r) d\lambda.$$

$$M_1(\lambda, r) = T_1(\lambda, r) + T_2(\lambda, r),$$

$$M_2(\lambda, r) = T_3(\lambda, r) + T_4(\lambda, r),$$

$$T_1(\lambda, r) = Z_1(\lambda, r) \mathcal{J}_0(k_3 r),$$

$$T_2(\lambda, r) = Z_2(\lambda, r) Y_0(k_3 r),$$

$$T_3(\lambda, r) = Z_1(\lambda, r) \mathcal{J}_2(k_3 r),$$

$$T_4(\lambda, r) = Z_2(\lambda, r) Y_2(k_3 r),$$

$$Z_p(\lambda, r) = Z(\lambda) Q_p(\lambda, r), \quad p = 1, 2,$$

$$Z(\lambda) = \lambda^2 I_3 C_{24}(\lambda, h) e^{-\lambda h},$$

$$Q_1(\lambda, r) = -\frac{\pi}{4} k_3 \mu \int_r^R s Y_1(k_3 s) \mathcal{J}_1(\lambda s) ds,$$

$$Q_2(\lambda, r) = -\frac{\pi}{4} k_3 \mu \int_0^r s \mathcal{J}_1(\lambda s) \mathcal{J}_1(k_3 s) ds,$$

$Y_2(k_3 r)$  — функция Неймана II порядка. Интегралы, входящие в  $Q_1(\lambda, r)$  и  $Q_2(\lambda, r)$ , легко вычисляются в квадратурах.

Таким образом, задача дифракции электромагнитных волн сведена к системе интегральных уравнений, которая может быть решена численно методом саморегуляризации.

Определив гармоники плотности тока  $j_x^{(0)}(r)$  и  $j_x^{(2)}(r)$ , можно рассчитать компоненты аномального поля. Учитывая осевую симметрию, компоненты аномального поля лучше выражать в цилиндрической системе координат. Для компонент поля имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 E_{ax}(r, \varphi, z) &= B_{1x}(r, z) + B_{2x}(r, z) \cos 2\varphi, \\
 E_{ay}(r, \varphi, z) &= B_{1y}(r, z) \sin 2\varphi, \\
 H_{ax}(r, \varphi, z) &= D_{1x}(r, z) \sin 2\varphi, \\
 H_{ay}(r, \varphi, z) &= D_{1y}(r, z) + D_{2y}(r, z) \cos 2\varphi, \\
 H_{az}(r, \varphi, z) &= D_{1z}(r, z) \sin \varphi,
 \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned}
 B_{1x}(r, z) &= i\omega \int_0^\infty [G_0(\lambda, h, z) f_0(\lambda) + \\
 &+ g_0(\lambda, h, z) f_2(\lambda)] \mathcal{J}_0(\lambda r) d\lambda, \\
 B_{2x}(r, z) &= i\omega \int_0^\infty [G_0(\lambda, h, z) f_2(\lambda) + \\
 &+ g_0(\lambda, h, z) f_0(\lambda)] \mathcal{J}_2(\lambda r) d\lambda, \\
 B_{1y}(r, z) &= i\omega \int_0^\infty [F(\lambda, h, z) f_2(\lambda) - \\
 &- g_0(\lambda, h, z) f_1(\lambda)] \mathcal{J}_2(\lambda r) d\lambda, \\
 D_{1x}(r, z) &= \int_0^\infty \left\{ \frac{\lambda^2}{2} L(\lambda, h, z) f_0(\lambda) - \right. \\
 &- \left. \left[ \frac{\lambda^2}{2} L(\lambda, h, z) + \frac{\partial F(\lambda, h, z)}{\mu \partial z} \right] f_2(\lambda) \right\} \mathcal{J}_2(\lambda r) d\lambda, \\
 D_{1y}(r, z) &= \int_0^\infty \left[ \frac{\partial F(\lambda, h, z)}{\mu \partial z} f_0(\lambda) - \right. \\
 &- \left. \frac{\lambda^2}{2} L(\lambda, h, z) f_1(\lambda) \right] \mathcal{J}_0(\lambda r) d\lambda, \\
 D_{2y}(r, z) &= \int_0^\infty \left[ \frac{\partial F(\lambda, h, z)}{\mu \partial z} f_2(\lambda) + \frac{\lambda^2}{2} L(\lambda, h, z) f_1(\lambda) \right] \times \\
 &\quad \times \mathcal{J}_2(\lambda r) d\lambda, \\
 D_{1z}(r, z) &= \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \lambda F(\lambda, h, z) [f_0(\lambda) + f_2(\lambda)] \mathcal{J}_1(\lambda r) d\lambda, \\
 G_0(\lambda, h, z) &= F(\lambda, h, z) - g_0(\lambda, h, z),
 \end{aligned}$$

$$g_0(\lambda, h, z) = \frac{\lambda^2}{2k_p^2} \left[ F(\lambda, z_0, z) + \frac{\mu \partial L(\lambda, z_0, z)}{\partial z} \right]_{z_0=h},$$

$$p = 1, 2, 3$$

$$f_0(\lambda) = \int_0^R \rho j_x^{(0)}(\rho) \mathcal{J}_0(\lambda \rho) d\rho,$$

$$f_2(\lambda) = \int_0^R \rho j_x^{(2)}(\rho) \mathcal{J}_2(\lambda \rho) d\rho,$$

$$f_1(\lambda) = f_2(\lambda) - f_0(\lambda),$$

$$F(\lambda, h, z) = \begin{cases} \lambda C_{11}(\lambda, h) e^{l_1 z} & \text{при } -\infty < z < 0, \\ \lambda [C_{12}(\lambda, h) e^{l_2 z} + C_{13}(\lambda, h) e^{-l_2 z}] & \text{при } 0 \leq z \leq h_1, \\ \lambda \left[ \frac{e^{-l_3(z-h_1)}}{l_3} + C_{14}(\lambda, h) e^{-l_3 z} \right] & \text{при } z > h_1, \end{cases}$$

$$L(\lambda, h, z) = \begin{cases} \lambda C_{21}(\lambda, h) e^{l_1 z} & \text{при } -\infty < z < 0, \\ \lambda [C_{22}(\lambda, h) e^{l_2 z} + C_{23}(\lambda, h) e^{-l_2 z}] & \text{при } 0 \leq z \leq h_1, \\ \lambda C_{24}(\lambda, h) e^{-l_3 z} & \text{при } z > h_1. \end{cases}$$

Рассчитав по формулам (11)  $E_{ax}$ ,  $E_{ay}$ ,  $H_{ax}$ ,  $H_{ay}$  и  $H_{az}$ , найдем электромагнитные поля в слоистой среде в присутствии диска.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И. Электромагнитные поля в неоднородных средах. ВЦ МГУ, роталпринт, 1969.
2. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. О численном решении некоторых интегральных уравнений Фредгольма I рода. В сб.: «Вычисл. методы и программирование», вып. X. Изд-во МГУ, 1968.
3. Гринберг Г. А., Пименов Ю. В. К вопросу о дифракции электромагнитных волн на бесконечно тонких идеально проводящих экранах. ЖТФ, вып. 10, XXVII, 1957.
4. Гургенидзе Т. А., Захаров Е. В., Пименов Ю. В. Осесимметричное возбуждение системы двух идеально проводящих соосных дисков. «Радиотехника», 25, № 8, 1970.
5. Захаров Е. В., Пименов Ю. В. Дифракция электромагнитных волн, излучаемых вертикальным электрическим диполем, на идеально проводящем диске. В сб.: «Вычисл. методы и программирование», вып. XII. Изд-во МГУ, 1969.
6. Хёйл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. «Теория дифракции». М., «Мир», 1964.

И. М. ДЕНИСОВА, Е. В. ЗАХАРОВ, Г. А. КОКОТУШКИН  
**МАГНИТО-ТЕЛЛУРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В КУСОЧНО-СЛОИСТОЙ СРЕДЕ**

Решение большого класса задач магнито-теллурического зондирования (МТЗ) основано на исследовании электромагнитных полей в слоистых неоднородных средах. В настоящей работе дана математическая постановка задачи в случае  $E$ - и  $H$ -поляризации для одной модели кусочно-слоистой среды (рис. 1). Поставленная задача сведена к системам одномерных интегральных уравнений методом работы [1], численное решение которых на ЭВМ позволяет рассчитать компоненты электромагнитного поля и импеданс на дневной поверхности  $z=0$ .

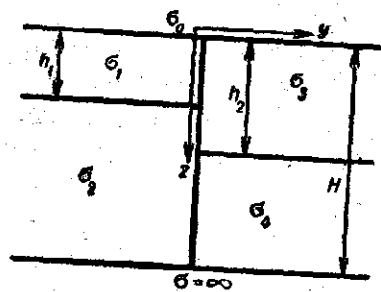


Рис. 1

1. **Постановка задачи.** Пусть дана кусочно-слоистая среда (рис. 1). Будем называть кусочно-слоистыми такие среды, которые можно разбить на конечное число областей, представляющих собой горизонтально-однородные слоистые структуры по оси  $z$ . В рассматриваемом случае таких областей две: область (I) —  $\{y < 0\}$  и область (II) —  $\{y > 0\}$ . Распределение проводимостей показано на рис. 1.

В случае плоской задачи, т. е. когда параметры среды и первичного поля не зависят от координаты  $x$  ( $\frac{\partial}{\partial x} \equiv 0$ ), полное поле распадается на две поляризации, которые будут рассмотрены отдельно. В качестве источника поля берется плоская электромагнитная волна, падающая нормально на поверхность  $z=0$ . Токами смещения по сравнению с токами проводимости пренебрегаем во всем пространстве.

1. Электрическая поляризация.

$$\vec{E} = \{E_x, 0, 0\}, \quad \vec{H} = \{0, H_y, H_z\}.$$

Составляющие векторов поля удовлетворяют уравнениям

$$H_y = \frac{1}{i\omega\mu} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad H_z = \frac{i}{\omega\mu} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial y}, \quad (1)$$

$$\Delta E_x + k_j^2 E_x = 0, \quad -\infty < z < H, \quad -\infty < y < \infty,$$

где  $k_j^2 = ik_j^2 = i\omega\mu\sigma_j$ ,  $\text{Re } k_j > 0$  — волновые числа соответствующих участков полупространства  $z < H$ . На границах раздела слоев выполняются условия непрерывности электрического поля и его нормальной производной. На линии  $z=H$ ,  $E_x=0$ .

2. Магнитная поляризация.

$$\vec{E} = \{0, E_y, E_z\}, \quad \vec{H} = \{H_x, 0, 0\}.$$

Составляющие векторов поля удовлетворяют уравнениям

$$E_y = \frac{1}{\sigma_j} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad E_z = -\frac{1}{\sigma_j} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\Delta H_x + k_j^2 H_x = 0, \quad 0 < z < H, \quad -\infty < y < \infty$$

и условиям на границах

$$H_x = 1 \text{ при } z = 0, \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} = 0 \text{ при } z = H,$$

$$[H_x] = \left[ \frac{1}{\sigma_j} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial z} \right] = 0 \text{ при } z = h_1, \quad y < 0$$

и

$$z = h_2, \quad y > 0.$$

На бесконечности

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} \rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow \pm \infty.$$

2. **Вывод интегральных уравнений.** Начнем рассмотрение с задачи (1). Будем решать ее методом интегральных уравнений [1]. Сведение задач для уравнений в частных производных к достаточно простым интегральным уравнениям можно осуществить следующим образом. Плоскость  $yOz$  линией  $y=0$  разбивается на две области: (I) и (II). Волновые числа  $\tilde{k}_1(M)$  и  $\tilde{k}_2(M)$  соответствующих областей имеют вид

$$\tilde{k}_1(M) = \begin{cases} k_0, & z < 0 \\ k_1, & 0 < z < h_1 \\ k_2, & h_1 < z < H \\ \infty, & z > H \end{cases} \text{ при } y < 0,$$

$$\tilde{k}_2(M) = \begin{cases} k_0, & z < 0 \\ k_3, & 0 < z < h_2 \\ k_4, & h_2 < z < H \\ \infty, & z > H \end{cases} \text{ при } y > 0.$$

Каждое из волновых чисел  $\tilde{k}_i(M)$  ( $i=1, 2$ ) можно очевидным образом так продолжить на все пространство, что функция Грина полученной задачи в этом случае выписывается в явном виде. Например, продолжая волновое число  $\tilde{k}_1(M)$  на все пространство следующим образом:

$$\tilde{k}_1(M) = \begin{cases} k_0, & z_0 < 0, \\ k_1, & 0 < z < h_1, \\ k_2, & h_1 < z < H, \\ \infty, & z > H, \end{cases} \quad (3)$$

для функции Грина  $G_1(M, M_0)$  имеем задачу

$$\Delta G_1(M, M_0) + \tilde{k}_1^2 G_1(M, M_0) = -\delta(r_{M, M_0}), \quad (4)$$

$$r_{M, M_0} = \sqrt{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

$$G_1|_{z=H} = 0, \quad [G_1]_{z=h_1} = \left[ \frac{\partial G_1}{\partial z} \right]_{z=h_1} = 0$$

и  $G_1$  — убывающая на бесконечности. Методом интегральных преобразований [2] нетрудно найти явное выражение для функции  $G_1(M, M_0)$

$$G_1(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \cos \lambda (y - y_0) g_1(\lambda, z, z_0) d\lambda, \quad (5)$$

где при  $z < 0, z_0 < 0$

$$g_1 = -\frac{e^{\eta_0(z+z_0)}}{P_1 \eta_0} [e^{-2\eta_1 h_1} (\eta_1 + \eta_2 t) (\eta_0 + \eta_1) + (\eta_1 - \eta_2 t) (\eta_0 - \eta_1)] + \frac{e^{-\eta_0 |z-z_0|}}{\eta_0};$$

при  $0 < z < h_1, z_0 < 0$

$$g_1 = -\frac{2e^{\eta_0 z_0}}{P_1} [(\eta_1 + \eta_2 t) e^{\eta_1(z-2h_1)} + (\eta_1 - \eta_2 t) e^{-\eta_1 z}];$$

при  $h_1 < z < H, z_0 < 0$

$$g_1 = -\frac{4e^{\eta_0 z_0} \eta_1 e^{-\eta_1 h_1}}{P_1 (e^{-2\eta_2(H-h_1)} - 1)} [e^{\eta_2(z-2H+h_1)} - e^{\eta_2(h_1-z)}];$$

при  $z < 0, 0 < z_0 < h_1$

$$g_1 = -\frac{2}{P_1} [(\eta_1 - \eta_2 t) e^{\eta_0 z} e^{-\eta_1 z_0} + (\eta_1 + \eta_2 t) e^{\eta_0 z} e^{\eta_1(z_0-2h_1)}];$$

при  $0 < z < h_1, 0 < z_0 < h_1$

$$g_1 = \frac{1}{P_1 \eta_1} [(\eta_1 + \eta_2 t) (\eta_0 - \eta_1) e^{-\eta_1(2h+z_0-z)} - (\eta_1 + t\eta_2) (\eta_0 + \eta_1) e^{-\eta_1(2h_1-z_0-z)} + (\eta_0 - \eta_1) (\eta_1 + t\eta_2) e^{-\eta_1(2h_1-z_0+z)} + (\eta_1 - t\eta_2) (\eta_0 - \eta_1) e^{-\eta_1(z_0+z)}] + \frac{e^{-\eta_1 |z-z_0|}}{\eta_1};$$

при  $h_1 < z < H, 0 < z_0 < h_1$

$$g_1 = \frac{2}{P_1 (e^{2\eta_2(h_1-H)} - 1)} \{ [e^{-\eta_1(z_0+h_1)} (\eta_0 - \eta_1) - e^{\eta_1(z_0-h_1)} (\eta_0 + \eta_1)] \times \\ \times e^{\eta_2(z+h_1-2H)} - [e^{-\eta_1(z_0+h_1)} (\eta_0 - \eta_1) - e^{\eta_1(z_0-h_1)} (\eta_0 + \eta_1)] e^{\eta_2(h_1-z)} \};$$

при  $z < 0, h_1 < z_0 < H$

$$g_1 = -\frac{4\eta_1}{P_1} e^{-\eta_1 h_1} e^{\eta_0 z} \frac{e^{\eta_2(h_1-z_0)} - e^{\eta_2(z_0+h_1-2H)}}{1 - e^{-2\eta_2(H-h_1)}};$$

при  $0 < z < h_1, h_1 < z_0 < H$

$$g_1 = \frac{2 (e^{\eta_2(h_1-z_0)} - e^{\eta_2(-2H+z_0+h_1)})}{P_1 (1 - e^{-2\eta_2(H-h_1)})} [ -(\eta_0 + \eta_1) e^{\eta_1(z-h_1)} + (\eta_0 - \eta_1) e^{-\eta_1(z+h_1)}];$$

при  $h_1 < z < H, h_1 < z_0 < H, z > z_0$

$$g_1 = \frac{1}{\eta_2 (e^{-2\eta_2(H-h_1)} - 1)} \{ F(z) - e^{\eta_2(2h_1-2H-z_0+z)} + e^{\eta_2(z+z_0-2H)} - e^{\eta_2(z_0-z)} + e^{\eta_2(2h_1-z_0-z)} \};$$

при  $h_1 < z < H, h_1 < z_0 < H, z < z_0$

$$g_1 = \frac{1}{\eta_2 (e^{-2\eta_2(H-h_1)} - 1)} [ F(z) + e^{\eta_2(z+z_0-2H)} + e^{\eta_2(2h-z_0-z)} - e^{\eta_2(z-z_0)} - e^{\eta_2(-z+z_0-2H+2h_1)} ],$$

$$F(z) = \frac{2\eta_2 (e^{\eta_2(h_1-z_0)} - e^{\eta_2(z_0+h_1-2H)})}{P_1 (1 - e^{-2\eta_2(H-h_1)})} [ -(\eta_0 + \eta_1) + (\eta_0 - \eta_1) e^{-2\eta_1 h_1} ] \times \\ \times [ e^{\eta_2(h_1+z-2H)} - e^{\eta_2(h_1-z)} ],$$

$$t = \frac{1 + e^{-2\eta_2(H-h_1)}}{e^{-2\eta_2(H-h_1)} - 1}, \quad \eta_j = \sqrt{\lambda^2 - k_j^2} \quad (j = 0, 1, 2),$$



$$P_1 = -(\eta_0 - \eta_1)(\eta_1 + \eta_2 t) e^{-2\eta_1 t} - (\eta_0 + \eta_1)(\eta_1 - \eta_2 t).$$

Продолжая аналогичным образом волновое число  $\tilde{k}_2(M)$ , получим функцию  $G_2(M, M_0)$  (для этого в предыдущих формулах величины  $h_1, k_1$  и  $k_2$  заменим на  $h_2, k_3$  и  $k_4$ ).

Перейдем непосредственно к выводу интегральных уравнений. Для этого представим  $E_x$  в виде

$$E_x = \begin{cases} E_{x0}^1 + V_1 \frac{k_0}{k_1}, & y < 0, \\ E_{x0}^2 + V_2 \frac{k_0}{k_1}, & y > 0, \end{cases} \quad (6)$$

где  $E_{x0}^{1(2)}$  — компонента напряженности электрического поля в горизонтально-однородной среде с параметрами

$$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2(\sigma_0, \sigma_3, \sigma_4),$$

$E_{x0}^{1(2)}$  удовлетворяют уравнениям

$$\Delta E_{x0}^{1(2)} + k_j^2 E_{x0}^{1(2)} = 0, \quad (7)$$

$j = 0$  при  $z < 0$ ,  $j = 1(3)$  при  $0 < z < h_1(h_2)$ ,  $i = 2(4)$  при  $h_1(h_2) < z < H$ , и условиям непрерывности функции  $E_{x0}^{1(2)}$  и ее первых производных при  $z = 0$ ,  $z = h_1(h_2)$ , а также условию  $E_{x0}^{1(2)} = 0$  при  $z = H$ .

Выпишем  $E_{x0}^1$

$$E_{x0}^1(z) = \begin{cases} e^{ik_0 z} + a_1 e^{-ik_0 z}, & z < 0, \\ a_2 e^{ik_1 z} + b_2 e^{-ik_1 z}, & 0 < z < h_1, \\ a_3 (e^{ik_2 z} - e^{-ik_2(z-2H)}), & h_1 < z < H. \end{cases} \quad (8)$$

Коэффициенты  $a_1, a_2, b_2$  и  $a_3$  имеют вид

$$a_2 = \frac{2k_0(k_1 + k_2 t) e^{-ik_1 h_1}}{P};$$

$$a_3 = \frac{4k_0 k_1}{P (e^{ik_2 h_1} - e^{-ik_2(h_1-2H)}),}$$

$$b_2 = \frac{2k_0(k_1 - k_2 t)}{P} e^{ik_1 h_1}, \quad a_1 = a_2 + b_2 - 1,$$

$$t = \frac{e^{ik_2 h_1} + e^{-ik_2(h_1-2H)}}{e^{ik_2 h_1} - e^{-ik_2(h_1-2H)}},$$

$$P = (k_0 + k_1)(k_1 + k_2 t) e^{-ik_1 h_1} - (k_1 - k_0)(k_1 - k_2 t) e^{ik_1 h_1}. \quad (9)$$

Из условия непрерывности  $E_x$  при  $y = 0$  получим

$$V_2|_{y=0} = \left[ E_{x0}^1 - E_{x0}^2 + V_1 \frac{k_0}{k_1} \right] \frac{k_1}{k_0}. \quad (10)$$

Введем функцию  $u_0^{12}$  равенством

$$\frac{k_0}{k_1} u_0^{12} = (E_{x0}^1 - E_{x0}^2).$$

Применяя формулу Грина к функциям  $V_1$  и  $G_1(M, M_0)$  в области  $y < 0$  и к функциям  $V_2$  и  $G_2(M, M_0)$  в области  $y > 0$ , будем иметь

$$V_1(y_0, z_0) = \int_{-\infty}^H \left\{ V_1(y, z) \frac{\partial G_1}{\partial n} - G_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} \right\} \Big|_{y=0} dz, \quad (11)$$

$$V_2(y_0, z_0) = \int_{-\infty}^H \left\{ V_2(y, z) \frac{\partial G_2}{\partial n} - G_2 \frac{\partial V_2}{\partial n} \right\} \Big|_{y=0} dz. \quad (12)$$

Учитывая граничные условия для  $E_x$  и условие (10), после сложения выражений (11) и (12) получим интегральное представление в области  $z < H$  ( $y_0 \neq 0$ ):

$$V - \int_{-\infty}^H \left[ V_1 \frac{\partial G_{12}}{\partial y} - \frac{\partial V_1}{\partial y} G_{12} \right] \Big|_{y=0} dz = - \int_{-\infty}^H u_0^{12} \frac{\partial G_2}{\partial y} dz; \quad (13)$$

где

$$G_{12} \equiv G_1 - G_2,$$

$$V = \begin{cases} V_1 & \text{при } y_0 < 0, \\ V_2 & \text{при } y_0 > 0. \end{cases}$$

Продифференцировав по  $y$  выражение (13) и устремив точку  $M_0(y_0, z_0)$  на прямую  $y_0 = 0$ , получим систему интегральных уравнений по линии  $y = 0$  ( $-\infty < z < H$ )

$$\left\{ \begin{aligned} V_1 + \int_{-\infty}^H \frac{\partial V_1}{\partial y} G_{12} dz \Big|_{y=0} &= \frac{1}{2} u_0^{12}, \\ \frac{\partial V_1}{\partial y} - \int_{-\infty}^H V_1 \frac{\partial^2 G_{12}}{\partial y \partial y_0} dz \Big|_{y=0} &= - \int_{-\infty}^H u_0^{12} \frac{\partial^2 G_2}{\partial y \partial y_0} dz. \end{aligned} \right. \quad (14)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial y} - \int_{-\infty}^H V_1 \frac{\partial^2 G_{12}}{\partial y \partial y_0} dz \Big|_{y=0} &= - \int_{-\infty}^H u_0^{12} \frac{\partial^2 G_2}{\partial y \partial y_0} dz. \end{aligned} \right. \quad (15)$$

Преобразуем правую часть уравнения (15), учитывая свойства функций  $G_2$  и  $u_0^{12}$ . Тогда система примет вид

$$\begin{cases} V_1 + \int_{-\infty}^H \frac{\partial V_1}{\partial y} G_{12} dz \Big|_{y=0} = \frac{1}{2} u_0^{12}, \\ \frac{\partial V_1}{\partial y} - \int_{-\infty}^H V_1 \frac{\partial^2 G_{12}}{\partial y \partial y_0} dz \Big|_{y=0} = - \int_{-\infty}^H G_2 (k_1^2 u_0^{12} + (u_0^{12})'') dz. \end{cases} \quad (16)$$

Для численного решения системы (16) необходимо заменить бесконечные пределы интегрирования конечными. Такая замена возможна в силу полной непрерывности интегральных операторов, порождаемых ядрами уравнений (16) в классе непрерывных функций с условием  $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} f(y) = 0$ . При этом параметр  $k_0$  считается отличным от нуля. Полученную систему с конечными пределами будем решать численно. Из условий  $\frac{k_0}{k_1} \ll 1$  и  $\frac{k_0}{k_2} \ll 1$  видно, что при решении этой системы можно считать  $k_0$  равным нулю. Тогда окончательно система будет иметь вид

$$\begin{cases} V_1 + \int_{-H_1}^H \frac{\partial V_1}{\partial y} G_{12} dz \Big|_{y=0} = \frac{1}{2} u_0^{12}, \\ \frac{\partial V_1}{\partial y} - \int_{-H_1}^H V_1 \frac{\partial^2 G_{12}}{\partial y \partial y_0} dz \Big|_{y=0} = - \int_{-\infty}^H G_2 u_0^1 (k_{3(4)}^2 - k_{1(2)}^2) dz, \end{cases} \quad (17)$$

где

$$\frac{k_0}{k_1} u_0^1 = E_{x0}^1.$$

При решении системы (17) получим значения  $V_1$  и  $\frac{\partial V_1}{\partial y}$  на линии  $y = 0$ ,  $-H_1 \leq z \leq H$ . Тогда, используя уравнение (13) и выражение для  $E_{x0}^{1(2)}$ , находим значения  $\frac{E_x}{E_{x0}^1}$ ,  $\frac{H_y}{H_{y0}^1}$  и  $\frac{H_z}{H_{z0}^1}$  на поверхности  $z_0 = 0$  по формулам:

$$\begin{aligned} \frac{E_x(y_0)}{E_{x0}^1} &= \frac{E_{x0}^{1(2)}}{E_{x0}^1} + \\ &+ \frac{\int_{-H_1}^H \left( V_1 \frac{\partial G_{12}}{\partial y} - \frac{\partial V_1}{\partial y} G_{12} \right) \Big|_{y=0} dz - \int_{-\infty}^H \frac{k_1}{k_0} u_0^{12} \frac{\partial G_2}{\partial y} dz}{\frac{2k_1}{p} [(k_1 + k_2 t) e^{-ik_1 h_1} + (k_1 - k_2 t) e^{ik_1 h_1}]}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{H_y(y_0)}{H_{y0}^1} = \frac{H_{y0}^{1(2)}}{H_{y0}^1} + \frac{1}{2ik_1} \left\{ \int_{-H_1}^H \left( V_1 \frac{\partial^2 G_{12}}{\partial z_0 \partial y} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \frac{\partial G_{12}}{\partial z_0} \right) \Big|_{y=0} dz - \int_{-\infty}^H \frac{k_1}{k_0} u_0^{12} \frac{\partial^2 G_2}{\partial z_0 \partial y} dz \right\}, \quad (19)$$

$$\frac{H_z(y_0)}{H_{z0}^1} = \frac{1}{2ik_1} \left\{ \int_{-H_1}^H \left( V_1 \frac{\partial^2 G_{12}}{\partial y \partial y_0} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \frac{\partial G_{12}}{\partial y_0} \right) \Big|_{y=0} dz - \int_{-\infty}^H \frac{k_1}{k_0} u_0^{12} \frac{\partial^2 G_2}{\partial y_0 \partial y} dz \right\}. \quad (20)$$

Как видно из формул (18), (19), (20) при  $y_0 \rightarrow \pm\infty$  предельные выражения для нормированных компонент полей равны соответствующим значениям для горизонтально-однородных сред.

Перейдем к рассмотрению  $H$ -поляризованного поля. Теперь в отличие от  $E$ -поляризации задача рассматривается в слое  $0 < z < H$ , который разбивает ось  $y = 0$  на две области:  $y < 0$  и  $y > 0$ .

Функция Грина для слоя  $0 < z < H$

$$\Delta G_i + \tilde{k}_i^2 G_i = -\delta(r_{M,M_0}) \quad (21)$$

с условиями

$$G|_{z=0} = 0, \quad [k^2 G]|_{z=H} = 0,$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0, \quad \left[ \frac{\partial G}{\partial z} \right] \Big|_{z=H} = 0, \quad i = 1, 2,$$

имеет вид

$$G = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \cos \lambda (y - y_0) g(\lambda, z, z_0) d\lambda,$$

а выражения для функций  $g(\lambda, z, z_0)$  находятся так же, как это было сделано в случае  $E$ -поляризации. Конкретный вид функций  $g(\lambda, z, z_0)$  приведен для этого случая в работе [2].

Функции  $u(M)$  и  $v(M)$

$$u(z) = H_x(y = 0, z) \quad \text{и} \quad v(z) = \frac{\partial H_x}{\partial y}(y = 0, z)$$

удовлетворяют следующей системе интегральных уравнений:

$$u(z_0) + \int_0^H v \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty g_{21} d\lambda dz + (1 - \alpha^2) \int_{h_1}^{h_2} v \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty g_1 d\lambda dz = F,$$

$$\frac{1}{2} (1 + \alpha_1^2) v(z_0) - \int_0^H u \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \lambda^2 g_{21} d\lambda dz = F',$$

где

$$\alpha^2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{k_2^2}{k_1^2}, \quad \alpha_1 = \begin{cases} \alpha, & h_1 < z_0 < h_2, \\ 1, & (z_0 < h_1) \cup (z_0 > h_2), \end{cases}$$

$$F = \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (g_2 + g_1) \Big|_{z=0},$$

$$F' = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\partial g_{21}}{\partial z} \Big|_{z=0} d\lambda, \quad g_{21} = g_2 - g_1.$$

Мы рассмотрим данную задачу для случая скачкообразного изменения нижней границы поверхностного слоя при  $\sigma_1 = \sigma_3$  и  $\sigma_2 = \sigma_4$ . Это оправдано тем, что для  $H$ -поляризованного поля изменение границы раздела слоев сказывается существенно сильнее, чем неоднородности типа контакта, ибо плотность тока практически не меняется при переходе через контакт (если выполнено условие  $\frac{\max(\sigma_3, \sigma_4)}{\max(\sigma_1, \sigma_2)} \ll 1$ ).

В отличие от этого неоднородность типа «уступ» вызывает существенное перераспределение тока при переходе из одной области в другую, что, естественно, вызывает сильные изменения как поля, так и импеданса.

Решая данную систему и получая значения  $u(z)$  и  $v(z)$ , найдем импеданс на поверхности  $z=0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_x}{\partial z_0} (y_0, z_0 = 0) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_0^1}{\partial z_0} + \frac{\partial u_0^2}{\partial z_0} \right) \Big|_{z_0=0} + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \lambda y_0}{\lambda} (R_2 - R_1) + \int_0^H u_1 \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \lambda \sin \lambda y_0 \frac{\partial g_{21}}{\partial z_0} d\lambda dz - \\ &- \int_0^\infty v \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \cos \lambda y_0 \frac{\partial g_{21}}{\partial z_0} d\lambda dz - \\ &- (1 - \alpha^2) \int_{h_1}^{h_2} v \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \cos \lambda y_0 \frac{\partial g_1}{\partial z_0} d\lambda dz, \end{aligned}$$

где

$$R_i = \eta e^{-2\eta h_i} \times$$

$$\times \frac{\alpha \eta_1 (1 + e^{-2\eta_2(H-h_i)}) - \eta_2 (1 - e^{-2\eta_2(H-h_i)})}{\alpha^2 \eta_2 (1 + e^{-2\eta_1 h_i}) (1 + e^{-2\eta_2(H-h_i)}) + \eta_2 (1 - e^{-2\eta_1 h_i}) (1 - e^{-2\eta_2(H-h_i)})}$$

Интересно отметить, что при  $y_0 \rightarrow \pm \infty$  первый интеграл в правой части представляет «дельтообразную» последовательность, а остальные интегралы стремятся к нулю. Таким образом при  $y_0 \rightarrow \pm \infty$  импеданс стремится к выражениям

$$\frac{\partial H_x}{\partial z_0} (y_0, z_0 = 0) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_0^1}{\partial z_0} + \frac{\partial u_0^2}{\partial z_0} \right) \Big|_{z_0=0} + (R_1 - R_2) \Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial u_0^1}{\partial z_0} \\ \text{при } y_0 \rightarrow -\infty, \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_0^1}{\partial z_0} + \frac{\partial u_0^2}{\partial z_0} \right) \Big|_{z_0=0} + (R_2 - R_1) \Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial u_0^2}{\partial z_0} \\ \text{при } y_0 \rightarrow \infty, \end{cases}$$

т. е. к значениям импеданса в соответствующей однородной среде.

На рис. 2 и 3 приведены графики модуля величины

$$\bar{E}_y = \frac{E_y(y_0, 0)}{E_{y0}^2(0)}$$

— горизонтальной компоненты электрического поля,

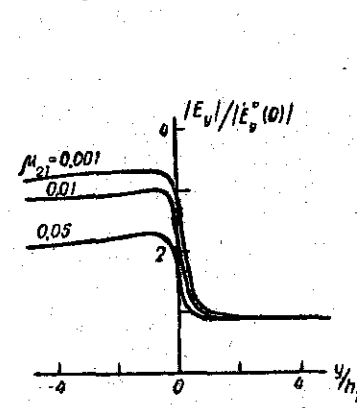


Рис. 2

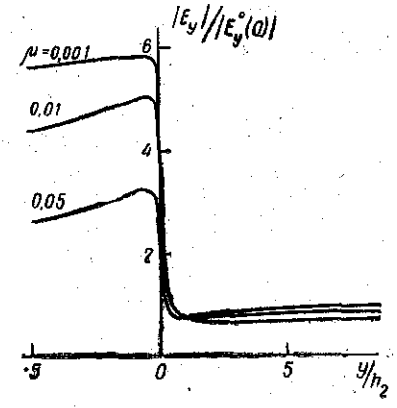


Рис. 3

отнесенной к своему нормальному значению на поверхности  $z=0$ , для следующих значений параметров:

$$\frac{\Lambda_1}{h_2} = 20 \quad (\Lambda_1 \text{ — длина волны в первом слое),}$$

$$\frac{h_1}{h_2} = 0,25 \text{ (рис. 2) и } \frac{h_1}{h_2} = 0,1 \text{ (рис. 3),}$$

$$\frac{H}{h_2} = 21.$$

$$\text{Индекс кривых } \mu_{21} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

Приведенные графики демонстрируют эффект «затекания» тока в область плохопроводящего кристаллического фундамента и, кроме того, сильную зависимость установления поля при удалении от уступа от величины уступа, т. е. отношения  $\frac{h_1}{h_2}$ .

В заключение авторы выражают глубокую благодарность профессору В. И. Дмитриеву за постановку рассмотренных задач.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Метод решения задач электродинамики неоднородных сред. ЖВМ и МФ, 10, № 6, 1970.
2. Дмитриев В. И., Захаров Е. В., Кокотушкин Г. А. О влиянии локальных поверхностных неоднородностей на магнито-теллурическое зондирование. Настоящий сборник.

В. И. ДМИТРИЕВ, Т. Л. РУДНЕВА

#### ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ГЛУБИННОГО МАГНИТО-ТЕЛЛУРИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

Особенностью глубинного магнито-теллурического зондирования является специфический характер изменения сопротивления с глубиной. В верхних слоях Земли мы можем с хорошей степенью точности считать, что проводимость каждого «слоя» условно «постоянна». Для глубинных слоев это предположение согласуется с экспериментом, поэтому была опробована другая гипотеза:

А именно будем предполагать, что зависимость проводимости от глубины (в связи с ростом температуры) имеет вид

$$\sigma(z) = \begin{cases} \sigma_i & \text{при } z_{i-1} < z < z_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (z_0 = 0) \\ \sigma_{n-1} e^{-a \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{z_{n-1}} \right)} & \text{при } z_{n-1} \leq z \leq z_n, \\ \sigma_n & z \geq z_n = H. \end{cases}$$

При  $z_{n-1} \leq z \leq z_n$  для вычисления импеданса мы могли использовать какой-либо численный метод интегрирования, но это оказалось неэффективным. Поэтому был использован следующий приближенный метод расчета.

При каждом параметре  $a$  проводилась кусочно-постоянная аппроксимация функции  $\sigma(z)$  на участке  $z_{n-1} \leq z \leq z_n$ . Это позволило заметно ускорить счет при хорошей степени согласованности результатов интерпретации с экспериментом. Параметр  $a$  выбирается из условия

$$\sigma_{n-1} e^{-a \left( \frac{1}{z_n} - \frac{1}{z_{n-1}} \right)} = \sigma_n.$$

Откуда

$$a = \frac{\ln \sigma_{n-1} - \ln \sigma_n}{\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z_{n-1}}}.$$

$$\frac{H}{h_2} = 21.$$

$$\text{Индекс кривых } \mu_{21} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

Приведенные графики демонстрируют эффект «затекания» тока в область плохопроводящего кристаллического фундамента и, кроме того, сильную зависимость установления поля при удалении от уступа от величины уступа, т. е. отношения  $\frac{h_1}{h_2}$ .

В заключение авторы выражают глубокую благодарность профессору В. И. Дмитриеву за постановку рассмотренных задач.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Метод решения задач электродинамики неоднородных сред. ЖВМ и МФ, 10, № 6, 1970.
2. Дмитриев В. И., Захаров Е. В., Кокотушкин Г. А. О влиянии локальных поверхностных неоднородностей на магнито-теллурическое зондирование. Настоящий сборник.

В. И. ДМИТРИЕВ, Т. Л. РУДНЕВА

#### ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ГЛУБИННОГО МАГНИТО-ТЕЛЛУРИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

Особенностью глубинного магнито-теллурического зондирования является специфический характер изменения сопротивления с глубиной. В верхних слоях Земли мы можем с хорошей степенью точности считать, что проводимость каждого «слоя» условно «постоянна». Для глубинных слоев это предположение согласуется с экспериментом, поэтому была опробована другая гипотеза.

А именно будем предполагать, что зависимость проводимости от глубины (в связи с ростом температуры) имеет вид

$$\sigma(z) = \begin{cases} \sigma_i & \text{при } z_{i-1} < z < z_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (z_0 = 0) \\ \sigma_{n-1} e^{-a \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{z_{n-1}} \right)} & \text{при } z_{n-1} \leq z \leq z_n, \\ \sigma_n & z \geq z_n = H. \end{cases}$$

При  $z_{n-1} \leq z \leq z_n$  для вычисления импеданса мы могли использовать какой-либо численный метод интегрирования, но это оказалось неэффективным. Поэтому был использован следующий приближенный метод расчета.

При каждом параметре  $a$  проводилась кусочно-постоянная аппроксимация функции  $\sigma(z)$  на участке  $z_{n-1} \leq z \leq z_n$ . Это позволило заметно ускорить счет при хорошей степени согласованности результатов интерпретации с экспериментом. Параметр  $a$  выбирается из условия

$$\sigma_{n-1} e^{-a \left( \frac{1}{z_n} - \frac{1}{z_{n-1}} \right)} = \sigma_n.$$

Откуда

$$a = \frac{\ln \sigma_{n-1} - \ln \sigma_n}{\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z_{n-1}}}.$$

Таким образом:  $a = a(\sigma_n, \sigma_{n-1}, h_{n-1}, \sum_{i=1}^{n-2} h_i, \sum_{i=1}^{n-1} h_i)$ . Заменяя интервал  $(z_{n-1}, z_n)$  некоторой совокупностью слоев равной толщины  $\Delta$ , определяем при фиксированном  $a$

$$\sigma(\Delta_k) = \sigma_{n-1} e^{-a \left( \frac{1}{z(\Delta_k)} - \frac{1}{z_{n-1}} \right)}, \quad z \in \Delta_k,$$

где  $z(\Delta_k) = z_{n-1} + (k-1)\Delta$ .

Этот прием позволяет использовать алгоритм решения обратной задачи МТЗ, применяемый для обычной модели с кусочно-постоянной функцией проводимости. При этом увеличение количества слоев не приводит к увеличению числа варьируемых параметров.

Предложенный учет плавного роста проводимости верхней мантии с глубиной фактически, с точки зрения расчета прямой задачи, сводит задачу к кусочно-постоянной слоистой среде. С точки зрения обратной задачи определения параметров среды мы на участке  $(z_{n-1}, z_n)$  имеем не совокупность слоев каждый со своими произвольными параметрами, а один слой с экспоненциально изменяющейся проводимостью и определяемый всего двумя параметрами  $z_n$  и  $\sigma_n$ . Это резко облегчает решение обратной задачи.

Расчет прямой задачи для кусочно-постоянной слоистой среды хорошо известен. Следуя работе [1], используем рекуррентное соотношение

$$W_{k-1} = \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{\mu_k}{\mu_{k+1}}} W_k\right) - \left(1 - \sqrt{\frac{\mu_k}{\mu_{k+1}}} W_k\right) e^{-\frac{(1-i)\alpha \sqrt{\mu_k} v_k}{\sqrt{T}}}}{\left(1 + \sqrt{\frac{\mu_k}{\mu_{k+1}}} W_k\right) + \left(1 - \sqrt{\frac{\mu_k}{\mu_{k+1}}} W_k\right) e^{-\frac{(1-i)\alpha \sqrt{\mu_k} v_k}{\sqrt{T}}}},$$

где

$$\mu_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_0}, \quad v_k = \frac{h_k}{h_0}, \quad \alpha = \sqrt{4\pi\mu_0\sigma_0}h_0,$$

причем расчет начинается с  $k=n-1$  ( $n$  — число слоев) и  $w_{n-1}=1$ . Величины  $\sigma_k$  и  $h_k$  — соответственно проводимость и толщина каждого слоя. Параметры  $\sigma_0$  и  $h_0$  — соответственно нормирующие множители размерности проводимости и толщин, выбираемые в зависимости от масштабов задачи. Величина  $T$  обозначает период колебаний, а  $\mu_0$  — магнитную проницаемость вакуума.

Зная  $W_0$ , определяют кажущееся сопротивление

$$\rho_\tau(T) = \rho_1 |W_0(T)|^2.$$

Зная набор экспериментальных значений кажущегося сопротивления при различных периодах колебаний  $T_j$ , который мы обозначим  $\rho_k(T_j)$  можно сформулировать обратную задачу как опре-

деление такого набора параметров слоев  $\rho_m$  и  $h_m$ , чтобы значения  $\rho_\tau(T_j)$  в некотором смысле были близки к значениям  $\rho_k(T_j)$ .

Математически можно сформулировать задачу, например, следующим образом: найти минимум функционала

$$f(h_1, \dots, h_n, \rho_1, \dots, \rho_n) = \sum_{j=1}^N F(T_j) \left[ \frac{\rho_\tau(T_j) - \rho_k(T_j)}{\rho_k(T_j)} \right]^2.$$

Здесь деление на  $\rho_k(T_j)$  означает нормировку, которая уравнивает роль разных слагаемых. С другой стороны, с помощью веса  $F(T_j)$  возможно усилить или ослабить влияние отдельных измерений на результат интерпретации.

Итак, мы имеем задачу минимизации функционала, зависящего от довольно большого числа параметров. Существует много различных методов для решения задач подобного типа. Общим недостатком всех этих методов обычно является медленная сходимость, и, тем самым, использование их привело бы к большему времени счета; чтобы ускорить решение задачи минимизации, была использована специфика задачи.

Как известно, влияние различных параметров  $(h_i, \rho_i)$  на значение функционала  $f(h_i, \rho_i)$  зависит от периода колебаний, а скорость метода минимизации определяется количеством вычислений. Наибольшее время счета уходит на вычисление значений  $W_0[T_j]$ . Таким образом, уменьшая количество точек  $T_j$ , мы тем самым можем ускорить счет. Поэтому на первом этапе минимизации функционал  $f(h_1, \dots, h_{n-1}, \rho_1, \dots, \rho_n)$  будем заменять некоторым другим функционалом, требующим меньшего количества вычислений.

А именно, используя метод покоординатного спуска, т. е. минимизируя последовательно по параметрам  $\rho_1, h_1, \rho_2, h_2, \dots, \rho_{n-1}, h_{n-1}, \rho_n$ , для каждого параметра будем строить свой функционал, например:

$$f^{h_k} = \sum_{i \in M(h_k)} F(T_j) \left[ \frac{1}{\rho_\tau(T_j)} (\rho_\tau(T_j) - |W_0(T_j)|^2 \rho_1) \right]^2.$$

Множество  $M(h_k)$  или  $M(\rho_k)$  — это набор точек, который мы включаем в сумму при минимизации функционала  $f^{h_k}$  или  $f^{\rho_k}$ . При выборе множеств  $M(h_k)$  и  $M(\rho_k)$  будем руководствоваться следующими соображениями: влияние очередного параметра  $h_k$  или  $\rho_k$  начинает сказываться только при некотором значении  $T(h_k)$  или  $T(\rho_k)$ . На самом деле точные значения  $T(h_k)$  или  $T(\rho_k)$  нам, конечно, не известны, но качественный предварительный анализ экспериментальной кривой (с помощью которого, мы, кстати, задаем предполагаемое число слоев) позволяет определить эти значения приближенно, например, как точки вблизи максимумов и минимумов.

Поэтому исследуемую кривую мы можем разделить на некоторые участки, количество которых равно количеству неизвестных параметров. На первом участке (если кривая измерена в достаточно большом диапазоне по  $T$ ) кривая зависит только от  $\rho_1$  на втором — от  $\rho_1$  и  $h_1$ , на третьем — от  $\rho_1$ ,  $h_1$  и  $\rho_2$  и т. д.

Множества  $M(h_k)$  или  $M(\rho_k)$  будем образовывать по следующему принципу: включать в него точки, лежащие в окрестности  $T(h_k)$  или  $T(\rho_k)$ , и точки, соответствующие наиболее достоверным измерениям; как правило, сюда всегда попадают последние точки, которые соответствуют выходу кривой на асимптоту.

Конечно, переход к функционалу  $f^{h_k}$  или  $f^{\rho_k}$  значительно снижает точность вычисления минимума  $f$ , но зато позволяет довольно быстро получить неплохое первое приближение.

Кроме того, в алгоритме минимизации предусмотрен контроль за поведением функционала  $f$ . После каждого цикла минимизации функционалов  $f^{h_k}$  и  $f^{\rho_k}$  ( $k=1, \dots, n$ ) происходит контрольное вычисление  $f$  и сравнение с его предыдущим значением. Если  $f$  перестает убывать, то выдается результат — первое приближение. Затем процесс повторяется (второй этап), но шаги по каждому параметру уменьшаются с целью повышения точности вычислений. Так же как и на первом этапе, контролируется убывание функционала. Результатом счета на втором этапе является второе приближение.

На третьем этапе идет минимизация непосредственно функционала  $f$ . Порядок перебора параметров сохраняется ( $\rho_1, h_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ ).

Рассмотрим один шаг минимизации, когда закреплены все значения параметров, кроме одного. При этом процесс не зависит от того, минимум какого функционала мы ищем.

Пусть переменный параметр равен  $h_k$ . Вычисляем значение функционала в точках  $h_k - \Delta_k, h_k, h_k + \Delta_k$ .

По этим трем точкам находим вторую разностную производную функционала. Если она не слишком мала (по модулю), делаем квадратичную аппроксимацию. В противном случае находим первую разностную производную и, если она не слишком мала, по модулю, делаем линейную экстраполяцию. В каждом из этих случаев проверяем, уменьшилось ли значение функционала в найденной точке по сравнению с исходной точкой  $h_k$ . Если нет — уточняем.

Все с той же целью (ускорить счет в алгоритме) предусмотрены следующие меры. Существуют два массива, размеры которых совпадают с количеством неизвестных параметров. В одном из этих массивов фиксируются значения функционалов, полученные при минимизации по каждому параметру, в другом — изменение этих значений при двух последовательных просмотрах.

В том случае, если изменение функционала по какому-либо параметру (или само значение функционала) сравнимо с задан-

ной точностью, и значение предыдущего параметра фиксировано, закрепляем значение исследуемого параметра. Тем самым количество варьируемых параметров на каждом этапе изменяется.

В начале каждого этапа все (если это не оговорено в исходной информации) параметры свободны, но постепенно, начиная с первого, они фиксируются. Один из критериев выхода из каждого этапа — зафиксированы все параметры. Алгоритм предусматривает возможность зафиксировать часть параметров с самого начала на все время счета.

Все описанные выше приемы позволили резко сократить время счета обратной задачи. Интерпретация пяти-семислойной задачи занимает от 3 до 5 мин времени счета на машине БЭСМ-6.

Алгоритм решения задачи написан на АЛГОЛ. Первый вариант программы был издан [2]. Имеются различные варианты программы, связанные с моделью, по которой проводится интерпретация: плоская модель, плоская модель с плавным температурным ростом проводимости в верхней мантии, сферическая слоистая модель. Во всех случаях заменяется лишь процедура вычислений  $\rho_k(T)$ , сам алгоритм минимизации сохраняется.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И. Прямая и обратная задачи магнито-теллурического зондирования. «Физика Земли», № 1, 1970.
2. Дмитриев В. И., Руднева Т. Л. Алгоритм решения обратной задачи магнито-теллурического зондирования. ВЦ МГУ, ротапринт, 1971.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ АНТЕНН

А. Н. ТИХОНОВ, В. И. ДМИТРИЕВ, А. В. ЧЕЧКИН,  
Н. И. БЕРЕЗИНА

РАЗВИТИЕ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ  
ЗАДАЧ СИНТЕЗА АНТЕНН

1. Введение. В связи с бурным развитием вычислительной техники во многих областях прикладной математики стали широко применяться вариационные методы. Это хорошо видно на примере теории синтеза антенн. В настоящей статье мы рассмотрим основные этапы развития вариационных методов решения задач синтеза антенн с целью определения наиболее перспективных направлений их дальнейшего развития.

Задача синтеза антенны состоит в определении распределения тока в антенне, которое порождает диаграмму направленности, удовлетворяющую заданным требованиям.

Связь между током в антенне  $j(x)$  и диаграммой направленности по полю для линейной антенны имеет вид

$$G(\theta) = \int_{-1}^1 j(x) e^{-ikhx \cos \theta} dx, \quad (1)$$

$\theta \in [0, \pi]$  — угловая координата точки наблюдения,  $k$  — волновое число,  $l$  — половина длины антенны.

Диаграмма направленности

$$G(\theta) = \text{mod } G(\theta) e^{i \arg G(\theta)} \quad (2)$$

комплексная функция действительного переменного  $\theta$ .

Соотношение (1) между током и диаграммой направленности можно рассматривать как линейный интегральный оператор

$$G(\theta) = g[j] = \int_{-1}^1 \mathcal{G}(\theta, x) j(x) dx \quad (3)$$

с ядром

$$\mathcal{G}(\theta, x) = e^{-ikh \cos \theta} \quad (4)$$

В дальнейшем будем считать, что оператор  $g[j]$  действует из  $L_2[-1, 1]$  в  $C[0, \pi]$ .

Развитие теории синтеза антенн началось с решения задачи нахождения комплексного тока  $j(x)$ , который давал бы заданную комплексную диаграмму направленности  $G(\theta)$ . Первые работы, посвященные этим вопросам, появились в конце 30-х годов. Долгое время методы синтеза развивались в основном как методы построения приближенного решения интегрального уравнения (1). Подробный обзор этих методов решения задач синтеза, основанных на теории целых функций, сделан в [1—4].

Почти с самого начала развития теории антенн наметился и вариационный подход к решению задач синтеза излучающих систем. Этот подход состоит в постановке задачи синтеза как некоторой вариационной задачи, описывающей излучающую систему. Следует подчеркнуть естественность вариационных постановок задач синтеза антенн. Дело в том, что физические требования, предъявляемые к диаграмме, математически записываются как условия минимальности или максимальности различных функционалов. На языке функционалов также наиболее удобно записать требования к характеру тока, создающего диаграмму с желаемыми характеристиками.

2. Вариационные постановки задач синтеза антенн. Как уже говорилось, основная цель при решении задач синтеза антенн — получить ток, создающий диаграмму направленности, удовлетворяющую некоторым требованиям. Эти требования математически формулируются с помощью функционалов от диаграммы направленности. Рассмотрим примеры двух наиболее типичных требований.

I. Получить диаграмму, близкую в некотором смысле к заданной диаграмме  $\tilde{G}(\theta)$ .

Функционал, характеризующий отклонение диаграммы, определяемой током  $j(x)$ , от заданной функции  $\tilde{G}(\theta)$  имеет вид

$$\delta(j) = \|g[j] - \tilde{G}\|_Z^2, \quad (5)$$

где  $Z$  — нормированное пространство.

В зависимости от выбора  $Z$  отклонение  $\delta(j)$  может быть равномерным, непрерывным среднеквадратичным, можно учесть гладкость и т. д.

II. Получить максимальный коэффициент направленного действия антенны

$$\text{КНД}_\theta(j) = \frac{|G(\theta)|^2}{\int_0^\pi |G(\theta)| \sin^2 \theta d\theta} = \frac{|g[j]|^2}{\int_0^\pi |g[j]| \sin^2 \theta d\theta} \quad (6)$$



а) В начале 40-х годов Вольман [5] предложил решение задачи синтеза I в виде

$$j(x) = \frac{kl}{2\pi} \int_0^\pi \tilde{G}(\theta) e^{-iklx \cos \theta} \sin \theta d\theta. \quad (7)$$

По существу это есть решение следующей вариационной задачи:

$$\min_{j \in L_2} \left\{ \int_0^\pi |g[j] - \tilde{G}|^2 kl \sin \theta d\theta + \int_{-\infty}^{-kl} |F[j]|^2 d\lambda + \int_{kl}^{\infty} |F[j]|^2 d\lambda \right\}, \quad (8)$$

где  $F[j]$  — спектральная функция тока  $j(x)$ ,

$$F[j] = \int_{-1}^1 j(x) e^{i\lambda x} dx, \quad \lambda \in (-\infty, \infty). \quad (9)$$

б) Михельсон и Шомер [11] использовали минимизирующие последовательности соответствующих функционалов. Например, для нахождения решения задач I и II предлагается построить последовательности токов  $j_k(x)$  и  $j_i(x)$  такие, что

$$\delta(j_{i+1}) < \delta(j_i), \quad \text{кнд}_\theta(j_{k+1}) > \text{кнд}_\theta(j_k). \quad (10)$$

Аналогичный подход предложили Бахрах и Троицкий [17].

в) Другой подход связан с представлением искомой функции  $j(x)$  через конечное число заданных функций (Попович и Сурутка [20]). В этом случае функционалы  $\delta(j)$  и  $\text{КНД}_\theta(j)$  превращаются в функции конечного числа переменных. Задача синтеза ставится как задача нахождения минимума функции  $\delta(j_1, \dots, j_n)$  или максимума  $\text{КНД}_\theta(j_1, \dots, j_n)$ , где  $j_1, \dots, j_n$  — коэффициенты в разложении  $j(x)$  по заданным базисным функциям.

г) В случае антенных решеток, состоящих из малого числа элементов, функционалы сразу представляют собой функции конечного числа переменных, а соответствующие вариационные постановки задач синтеза сводятся к обычным задачам на экстремум функций многих переменных [24, 46].

д) Еще одним примером вариационного подхода к задачам синтеза является постановка, предложенная Каратыгиным в [13] для построения диаграммы направленности с максимальным  $\text{КНД}_\theta$ :

$$\max_{j \in L_2[-1,1]} \frac{|G(\theta)|^2}{\int_0^\pi |G(\theta)|^2 \sin^2 \theta d\theta + \int_{-1}^1 |j(x)|^2 \rho(x) dx}, \quad (11)$$

где  $\rho(x)$  — сопротивление антенны.

Тем самым накладывается ограничение на тепловые потери в антенне. Решение задачи (11) определяется из интегрального уравнения Фредгольма II рода

$$\rho(x) j(x) + \int_{-1}^1 K(x, y) j(y) dy = e^{-iklx \cos \theta},$$

где

$$K(x, y) = \int_0^\pi \sin^2 \theta e^{ikl(x-y) \cos \theta} d\theta. \quad (12)$$

Аналогичный подход в общем виде был предложен Дмитриевым и Чечкиным [29].

е) Широко применение в задачах синтеза антенн нашли методы нелинейного программирования. Такой подход к задачам синтеза антенн предложен в работах: Скольнико, Немхаузер, Шеммен [9]; Прузан, Мунч-Андерсен [21]; Поповкин, Маторин [47, 51].

**3. Методы, основанные на корректных постановках задач синтеза антенн.** Решение любой задачи прикладной математики начинается с математической постановки. Эта постановка, должна быть корректной. Желательно также, чтобы она приводила к простым численным алгоритмам.

В теории синтеза антенн проблемам корректности постановки задач приходится уделять особое внимание. Оператор  $g[j]$ , определяемый выражением (3), является вполне непрерывным оператором, поэтому задача на экстремум того или иного функционала от функции  $G(\theta)$  часто оказывается некорректно поставленной.

Впервые на это обратил внимание А. Н. Тихонов, по инициативе которого с 1965 г. в ВЦ МГУ занимаются проблемами корректных постановок задач синтеза антенн и основанными на них методами решения.

Остановимся подробнее на физической стороне проблем, связанных с корректностью, возникающих в теории синтеза антенных устройств.

Покажем, что имеются токи сколь угодно большой мощности, излучающие сколь угодно малую энергию в пространство.

Рассмотрим токи следующего вида:

$$j_m(x) = \sqrt{m} \sin(\pi mx). \quad (13)$$

Мощность тока определяется величиной

$$\|j_m\|_2^2 = \int_{-1}^1 |j_m(x)|^2 dx = \int_{-1}^1 m \sin^2(\pi mx) dx = m. \quad (14)$$

Очевидно, что с ростом  $m$  мощность  $j_m(x)$  может быть сделана сколь угодно большой. Поле излучения токов  $j_m(x)$  определяется диаграммой направленности

$$G_m(\theta) = \int_{-1}^1 \sqrt{m} \sin(\pi m x) e^{-iklx \cos \theta} dx =$$

$$= -i\sqrt{m} \left[ \frac{\sin(\pi m - kl \cos \theta)}{\pi m - kl \cos \theta} - \frac{\sin(\pi m + kl \cos \theta)}{\pi m + kl \cos \theta} \right]. \quad (15)$$

Плотность мощности излучения пропорциональна величине

$$|G_m(\theta)|^2 = m \left| \frac{\sin(\pi m - kl \cos \theta)}{\pi m - kl \cos \theta} - \frac{\sin(\pi m + kl \cos \theta)}{\pi m + kl \cos \theta} \right|^2. \quad (16)$$

Из формулы (16) видно, что с ростом  $m$  плотность мощности излучения может быть сделана сколь угодно малой одновременно для всех направлений  $\theta \in [0, \pi]$ , так как

$$|G_m(\theta)|^2 \leq m \left| \frac{1}{\pi m - kl \cos \theta} + \frac{1}{\pi m + kl \cos \theta} \right|^2 \leq \frac{4\pi^2}{m} \quad (17)$$

при

$$m > \frac{kl}{\sqrt{\pi^2 - 1}}.$$

Наличие токов сколь угодно большой мощности, которые почти не излучают в пространство, приводит к следующему. Представим себе, что имеется некоторый ток  $j(x)$ , поле излучения которого удовлетворяет желаемым требованиям.

Рассмотрим ток

$$j(x) + j_m(x), \quad (18)$$

где  $j_m(x)$  определяется формулой (13).

Диаграммы направленности, создаваемые токами  $j(x)$  и  $j(x) + j_m(x)$ , мало отличаются друг от друга, в то время как  $j(x) + j_m(x)$  может быть мало приемлемым с точки зрения практической реализации.

Основная цель при решении задач синтеза антенн — получить поле излучения с желаемыми свойствами. Но в связи с наличием почти не излучающих, быстроосциллирующих токов большой мощности (13) одним требований к полю излучения не достаточно для корректной постановки задач синтеза. Необходимы дополнительные условия на решение задачи синтеза, т. е. на ток для того, чтобы исключить неизлучающие токи большой мощности. Отсутствие дополнительных требований к току приводит к некорректности постановки задач синтеза антенн.

*Замечание.* Необходимость дополнительных требований к функции распределения токов в источниках несколько меньше для дискретных антенн, в частности для антенных решеток. Но надо учитывать, что с ростом числа излучателей дискретная антенна по своим свойствам приближается к непрерывной антенне. В связи с этим возникает необходимость в дополнительных условиях

к функции распределения токов для корректной постановки задачи.

Обратимся снова к задачам синтеза I и II.

Из теории линейной антенны известно, что

$$I) \inf_{j \in L_2} \delta(j) = 0, \quad II) \sup_{j \in L_2} \text{КНД}_\theta(j) = \infty, \quad (19)$$

причем ни та, ни другая грань в общем случае не достигается. Поэтому ставить вариационные задачи сразу на функционалы  $\delta(j)$  и  $\text{КНД}_\theta(j)$  нельзя.

Кроме того, необходимо учитывать существование неизлучающих токов, поэтому следует наложить ограничения на ток. Ограничения на ток можно записать в виде функционалов от функции распределения тока, которые в дальнейшем мы будем называть дополнительными.

Так, например, в постановке Вольмана (8) дополнительным функционалом является

$$\Psi(j) = \int_{-\infty}^{-kl} |F[j]|^2 d\lambda + \int_{kl}^{\infty} |F[j]|^2 d\lambda, \quad (20)$$

а в постановке Каратыгина В. А. (11)

$$\Psi(j) = \int_{-1}^1 |j(x)|^2 \rho(x) dx. \quad (21)$$

Общий подход к решению задач синтеза антенн методами, основанными на корректных постановках, изложен в работе Тихонова, Дмитриева [31]. В этой работе предложена следующая корректная вариационная постановка задачи I, основанная на регуляризирующем алгоритме А. Н. Тихонова:

$$\min_{j \in L_2} \{\delta(j) + \alpha \Omega(j)\}, \quad \alpha = \text{const}. \quad (22)$$

Параметр  $\alpha$  играет роль регулятора между функционалом, отражающим требования к диаграмме направленности, и дополнительным сглаживающим функционалом  $\Omega(j)$ .

Для случая

$$\delta(j) = \int_0^\pi |g[j] - \tilde{G}(\theta)|^2 d\theta, \quad (23)$$

$$\Omega(j) = \int_{-1}^1 |j(x)|^2 dx \quad (24)$$

решение экстремальной задачи (22)  $j_\alpha(x)$  определяется из простого интегрального уравнения Фредгольма II рода

$$\alpha_j(x) + \int_{-1}^1 K(x, y) j(y) dy = \int_0^\pi \tilde{G}(\theta) e^{-iklx \cos \theta} d\theta, \quad (25)$$

где

$$K(x, y) = \int_0^\pi e^{ikl(x-y) \cos \theta} d\theta, \quad (26)$$

причем

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \delta(j_\alpha(x)) = 0.$$

Для решения задачи II в [35] предложен метод, основанный на постановке

$$\max_{j \in L_2} \frac{|G(\theta)|^2}{\beta \int_0^\pi |G(\theta)|^2 \sin^3 \theta d\theta + \int_{-1}^1 |j(x)|^2 dx}. \quad (27)$$

Функция  $j_\beta(x)$ , дающая максимум функционалу, определяется из уравнения

$$j(x) + \beta \int_{-1}^1 K(x, y) j(y) dy = e^{-iklx \cos \theta},$$

$$K(x, y) = \int_0^\pi \sin^3 \theta e^{ikl(x-y) \cos \theta} d\theta. \quad (28)$$

Причем

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \text{КНД}_\theta(j_\beta(x)) = \infty. \quad (29)$$

Методам, основанным на корректных постановках задач синтеза антенн, посвящены также работы Бахраха, Кременецкого [30], Дмитриева, Чечкина [29], Поповкина, Елумеева, Щербакова [36]. Кроме регуляризующих алгоритмов А. Н. Тихонова в этих работах использованы идеи В. К. Иванова по решению некорректно поставленных задач.

**4. Многопараметрические методы.** Все вариационные методы решения задач синтеза антенн, рассмотренные в п. 3, сходны в том, что требования к диаграмме направленности описываются с помощью одного функционала и введен дополнительный функционал, необходимый для корректной постановки задачи, причем используется один параметр, регулирующий соотношение между основным и дополнительным функционалом.

Однако обычно к диаграмме и току предъявляется несколько различных требований, которые можно учесть с помощью нескольких функционалов. При этом приходится вводить несколько параметров, регулирующих соотношение между функционалами. Идея

многопараметрического метода решения задач антенн изложена в работе Тихонова, Дмитриева [31]. Она состоит в следующем.

Ставится корректная экстремальная задача для многопараметрического функционала  $\Phi_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(j)$ , составленного из основных и дополнительных функционалов. Решение этой задачи  $j(x, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  зависит от значений всех входящих в функционал параметров. Путем многократного решения экстремальной задачи для различных наборов параметров  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  подбираются такие их значения, которые дают наиболее подходящее решение задачи синтеза.

Сложность метода заключается в написании такого функционала  $\Phi_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(j)$ , в котором изменение одного параметра влияло бы на степень удовлетворения какого-либо одного требования к диаграмме направленности или к току и по возможности мало влияло на выполнение других условий. Другая трудность связана с машинным решением задачи, так как для нахождения значений параметров  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , дающих наилучшее решение  $j(x, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , требуется многократный целенаправленный перебор параметров  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

В работе [31] многопараметрический функционал, позволяющий учесть различные требования к диаграмме и току, предлагается записывать в виде

$$\Phi_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_i(j(x)), \quad (30)$$

где каждый из функционалов  $\Phi_i(j(x))$  связан с каким-либо условием на диаграмму направленности или ток.

Обычно в качестве дополнительного функционала, необходимого для корректной постановки задачи синтеза, используется функционал

$$\Psi(j) = \int_{-1}^1 |j(x)|^2 dx. \quad (31)$$

Чечкин [32] предложил использовать более общий вид дополнительного функционала

$$\Psi(j) = \int_{-\infty}^{\infty} |F[j] - h(\lambda)|^2 R(\lambda) d\lambda, \quad (32)$$

где  $F[j] = \int_{-1}^1 j(x) e^{i\lambda x} dx$  — спектральная функция распределения тока, т. е. решения задачи,  $h(\lambda)$  — желаемая спектральная характеристика,  $R(\lambda) \geq 0$  — весовая функция специального вида

$$R(\lambda) = \begin{cases} r(\lambda) \geq 0 & \text{при } \lambda \in [\rho_1, \rho_2], \\ \alpha = \text{const} & \text{при } \lambda \in (-\infty, \rho_1) \cup (\rho_2, +\infty). \end{cases} \quad (33)$$

Выбор  $r(\lambda)$  влияет на спектральную функцию в области низких и средних гармоник  $[\rho_1, \rho_2]$ , параметр  $\alpha$  оказывает влияние на спектральную функцию в области высоких гармоник. Тем самым решение задачи синтеза будет зависеть не только от  $h(\lambda)$ , но и от функции  $R(\lambda)$  дополнительного функционала. Исследование влияния параметров дополнительного функционала на решение задачи синтеза проведено в [35].

Заметим, что функционал (32) включает как частный случай функционал (31) при  $h(\lambda) \equiv 0$  и  $R(\lambda) = \frac{1}{2\pi}$ .

Рассмотрение дополнительного функционала, зависящего от нескольких величин, имеет глубокий смысл. Решая задачу синтеза для различных наборов этих величин, мы будем получать решения, отличающиеся сложностью. В этом состоит новый подход к решению задач синтеза антенн, который заключается в следующем.

С самого начала ищется не одно решение, а несколько решений с различной структурой, причем все решения удовлетворяют поставленным требованиям. Выбор одного из них предоставляется заказчику.

Наиболее ранними работами по многопараметрическим методам являются следующие: [7] (Проктор, Аблю); [12] (Михельсон, Шомер). Однако в этих работах авторы не обращали внимания на корректность постановок задач синтеза антенн.

Следует также отметить работу Мартынова, Устинова, Царякина [24], в которой при решении задач синтеза антенн многопараметрическими методами особое внимание уделяется использованию ЭВМ для перебора параметров.

Всестороннее развитие многопараметрические методы получили в ВЦ МГУ. В настоящее время здесь разработаны метод заданных диаграмм для решения задач синтеза антенн с требованиями к уклонению [33] и метод оптимальных диаграмм для решения задач, в которых требования предъявляются к амплитудной диаграмме [49, 50].

**5. Заключение.** Ретроспективный взгляд на развитие вариационных методов решения задач синтеза антенн позволяет увидеть взаимосвязь между развитием вычислительной техники и эволюцией методов решения задач.

На первом этапе в основе методов решения задач синтеза лежали беспараметрические вариационные постановки, которые позволяли учесть только одно относительно общее требование к антенне. В вычислительном плане такие методы приводили к необходимости одноразового решения соответствующей экстремальной задачи. Возможности ЭВМ первого поколения позволяли провести всю необходимую вычислительную работу.

Следующий этап связан с однопараметрическими методами, в которых кроме основного требования введено дополнительное требование, необходимое для корректной постановки задачи. Эти ме-

тоды предполагают многоразовое решение вариационной задачи при различных значениях параметра и выбор наиболее подходящего решения из множества полученных решений. На этом этапе требовался известный прогресс в организации связи человек — машина, для реализации этих методов необходимы ЭВМ второго поколения.

Для третьего этапа характерны многопараметрические методы, в которых могут быть учтены весьма различные требования к антенным системам. На этом этапе машинное решение задач синтеза превратилось в исследовательский процесс работы с параметрами, а сам процесс численного решения задачи стал напоминать математическое экспериментирование. Этот этап связан с использованием ЭВМ третьего поколения.

В дальнейшем развитие методов решения задач синтеза антенн пойдет, по-видимому, по пути дальнейшего превращения процесса решения задач в процесс математического экспериментирования, который будет включать в себя все большую и большую часть работы физиков-экспериментаторов. Экспериментирование с реальными физическими величинами, которое проводят физики и инженеры, все в большей степени будет заменяться работой с математическими параметрами. Как правило, это экономически более выгодно и быстрее приводит к окончательному результату.

В связи с этим в ВЦ МГУ проводится широкое исследование возможностей многопараметрических методов, совершенствуются вариационные постановки, которые лежат в основе этих методов, автоматизируются процессы решения задач синтеза антенн многопараметрическими методами на ЭВМ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Пистолькорс А. А. Проблемы синтеза антенн. В сб.: «К 100-летию со дня рождения А. С. Попова». М., Изд-во АН СССР, 1960.
2. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике. М., «Физматгиз», 1962.
3. Зелкин Е. Г. Построение излучающей системы по заданной диаграмме направленности. М., Госэнергоиздат, 1963.
4. Фельд Я. Н., Бахрах Л. Д. Современное состояние теории синтеза антенн. «Радиотехника и электроника», 8, № 2, 1963.
5. Вольман И. И. Связь между характеристикой направленности и распределением тока по линейному проводнику. «Электросвязь», № 4, 1941.
6. Минкович Б. М., Яковлев В. П. Теория синтеза антенн. М., «Советское радио», 1969.
7. Proctor E. K., Ablow S. M. *Electromagnetic Theory and Antennas*, Part 2. Oxford—London—New York—Paris. P. 1225—1228, 1963.
8. Harthill William P., Swarm H. Myron. Synthesis of antenna patterns in terms of azimuthal angle. «Trend. Engng. Univ. Wash.», 15, No. 3, 1963.
9. Skolnik M. I., Nemhauser G., Sherman J. W. Dynamik programming applied to unequally spaced arrays. «IEEE. Transaction on Antennas and Propagation», 12, No. 1, 1964.
10. Дымский В. Н. К теории синтеза антенн с объемным распределением источников. «Тр. Казанского авиационного института», вып. 82, 1964.

11. Michelson R. A., Schomer J. W. A radiation pattern synthesis technique for end-fire arrays. «IEEE International Convention Record», 12, No. 2, 1964.
12. Michelson R. A., Schomer J. W. A three parameter antenna pattern synthesis technique. «Microwave Journal», 8, No. 9, 1965.
13. Каратыгин В. А. О максимальном коэффициенте усиления антенны с непрерывным распределением тока. «Тр. Ленинградского политехнического института», № 255, 1965.
14. Butler J. K., Unz H. Optimization of beam efficiency and synthesis of nonuniformly spaced arrays. «Proceeding IEEE», 54, No. 12, 1966.
15. Бахрах Л. Д., Кременецкий С. Д. Метод регуляризации в прямых и смешанных задачах теории синтеза излучающих систем. «Вопросы радиоэлектроники», сер. общетехническая, вып. 17, 1967.
16. Fong Thomas S. On the problem of optimum antenna aperture distribution. «Journal Franklin Inst.», 283, No. 3, 1967.
17. Бахрах А. Д., Троицкий В. И. Смешанные задачи синтеза антенн. «Радиотехника и электроника», 12, № 3, 1967.
18. Мироненко И. Г. Синтез антенны конечной апертуры, излучающей максимальную долю мощности в заданный телесный угол пространства. «Радиотехника», 22, № 4, 1967.
19. Содин Л. Г. К теории оптимальных антенн. «Радиотехника и электроника», 12, № 12, 1967.
20. Pronic B. D., Surutka J. V. A variational approach to the problem of asymmetrically driven cylindrical antenna. «Publ. Elektrotekn. fak. Univ. Beogradu. Ser. Mat. fiz.», No. 198—199, 1967.
21. Pruzan P. M., Munch-Andersen B. On the application of dynamic programming type algorithms to antenna design. «SIAM J. Appl. Math.», 15, 1967.
22. Чони Ю. И. Синтез излучателей, расположенных на клине. «Тр. Казанского авиационного института», вып. 94, 1968.
23. Поповкин В. И., Елумеев В. И. Оптимизация и регуляризация решений задачи синтеза антенн. «Радиотехника и электроника», 13, № 5, 1968.
24. Мартынов Н. А., Устинов Э. Д., Цараппин С. А. Применение математического программирования к синтезу антенных решеток. В сб.: «Антенны», вып. 3, М., «Связь», 1968.
25. Рамм А. Г. Оптимальное решение задачи синтеза линейной антенны. ДАН СССР, 180, № 5, 1968.
26. Butler J. K. Linear array synthesis for the best mean-square approximation of radiation patterns. «Radio Sci.», 8, No. 5, 1968.
27. Чони Ю. И. К синтезу антенной системы по заданной амплитудной диаграмме направленности. «Изв. вузов», сер. радиоэлектроника, 11, № 12, 1968.
28. Кременецкий С. Д., Жуковина Н. Е. Принцип регуляризации и синтез линейного излучателя. «Вопросы радиоэлектроники», сер. общетехническая, 19, 1968.
29. Дмитриев В. И., Чечкин А. В. Один метод решения обратных задач теории антенн. В сб.: «Вычисл. методы и программирование», вып. X. Изд-во МГУ, 1968.
30. Бахрах Л. Д., Кременецкий С. Д. Некорректно поставленные задачи и теория синтеза излучающих систем. ДАН СССР, 178, № 4, 1968.
31. Тихонов А. Н., Дмитриев В. И. О методах решения обратной задачи теории антенн. В сб.: «Вычисл. методы и программирование», вып. XIII. Изд-во МГУ, 1969.
32. Чечкин А. В. Метод функциональных пространств для решения обратной задачи теории антенн. В сб.: «Вычисл. методы и программирование», вып. XIII. Изд-во МГУ, 1969.
33. Чечкин А. В. Исследование решений обратной задачи теории линейной антенны методом функциональных пространств. В сб.: «Вычисл. методы и программирование», вып. XIII. Изд-во МГУ, 1969.
34. Поповкин В. И., Елумеев В. И., Щербаков Г. И. Оптимальный синтез антенн при ограничении отклонения функций распределения источников от заданной. «Радиотехника и электроника», 14, № 8, 1969.
35. Дмитриев В. И., Чечкин А. В. Методы решения задач синтеза антенн. Изд-во МГУ, ротاپринт, 1969.
36. Поповкин В. И., Щербаков Г. И., Елумеев В. И. Оптимальные решения задач теории синтеза антенн. «Радиотехника и электроника», 14, № 7, 1969.
37. Кременецкий С. Д., Скачков В. А. О синтезе плоского криволинейного излучателя. «Радиотехника и электроника», 14, № 10, 1969.
38. Бахрах Л. Д., Кременецкий С. Д., Троицкий В. И. Метод последовательных приближений в некорректно поставленных задачах теории синтеза антенн. ДАН СССР, 187, № 5, 1969.
39. Кременецкий С. Д. О смешанных задачах теории синтеза излучающих систем. «Вопросы радиоэлектроники», сер. общетехническая, 12, 1969.
40. Кременецкий С. Д., Кременецкий М. Д. Синтез излучающей системы по разностной диаграмме направленности. «Вопросы радиоэлектроники», сер. общетехническая, 11, 1969.
41. Вешникова И. Е. Исследование вариационным методом кольцевых антенных решеток с вынесенным фазовым центром. В сб.: «Антенны», вып. 6, М., «Связь», 1969.
42. Рамм А. Г. Оптимальное решение задачи синтеза линейной антенны. «Изв. вузов», сер. радиофизика, 12, № 12, 1969.
43. Юрьев А. Н. Синтез антенны с минимальным уровнем боковых лепестков. «Радиотехника и электроника», 15, № 1, 1970.
44. Steyskal H. On antenna power pattern synthesis. «IEEE Transactions on Antennas and Propagation», 18, No. 1, 1970.
45. Кременецкий С. Д., Радиг Ю. Ю., Скачков В. А. Теория и практика синтеза плоских криволинейных излучателей. «Радиотехника и электроника», 15, № 10, 1970.
46. Perimi T., Idselis M. N. Antenna pattern synthesis using a computer implementation of the steepest descent. «G—AP. Symp. Columbus Ohio, 1970. Program. and Dig.», No. 4, 1970.
47. Поповкин В. И., Маторин А. В. Синтез аксиально-симметричных распределений токов на телах вращения по заданной векторной воронкообразной диаграмме направленности. «Радиотехника и электроника», 15, № 7, 1970.
48. Дмитриев В. И., Чечкин А. В. Об одном методе теории синтеза дискретной антенны. «Радиотехника и электроника», 16, № 3, 1971.
49. Чечкин А. В. Метод оптимальных диаграмм для решения задач синтеза антенн. «Радиотехника и электроника», 16, № 2, 1971.
50. Дмитриев В. И., Ильинский А. С., Кокотушкин Г. А., Чечкин А. В. Решение на ЭВМ задач синтеза дискретных антенн методом оптимальных диаграмм. Научный отчет ВЦ МГУ, ротاپринт, 1971.
51. Поповкин В. И., Маторин А. В. Синтез антенной решетки и щелевых излучателей с пассивными элементами. «Радиотехника и электроника», 16, № 7, 1971.



А. В. ЧЕЧКИН

## МЕТОД ФОРМИРОВАНИЯ АМПЛИТУДНОЙ ДИАГРАММЫ

Развивается метод решения задач синтеза антенн, позволяющий получать любую возможную амплитудную диаграмму. При этом на фазовую диаграмму никаких ограничений не накладывается.

**1. Введение.** Для удобства изложения будем рассматривать диаграмму направленности по полю в виде

$$g[j] = \int_{\sigma} \mathcal{G}(\theta, \varphi, x) j(x) dx = G(\theta, \varphi), \quad (1)$$

где  $\theta, \varphi$  — угловые координаты, диаграммы направленности  $G(\theta, \varphi) \in L_2(\Omega)$ ,  $\Omega = \{\theta, \varphi : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ ,  $j(x), x \in \sigma$  — комплексная функция — плотность распределения источников излучения в антенне, будем считать, что  $j(x) \in L_2(\sigma)$ ,  $\sigma$  — ограниченная  $k$ -мерная область,  $x$  — точка области. Размерность области  $\sigma$  может быть единицей, например, для линейных антенн и для любых дискретных антенн [1], может быть двумя и тремя, т. е.  $k=1, 2, 3$ . Далее, в (1)  $g$  — интегральный оператор из  $L_2(\sigma)$  в  $L_2(\Omega)$  с ядром  $\mathcal{G}(\theta, \varphi, x)$ .

До сих пор мы решали задачи синтеза, в которых требовалось найти такую  $j(x) \in L_2(\sigma)$ , чтобы ряд функционалов, характеризующих поле излучения, и ряд функционалов, характеризующих эксплуатационные свойства антенны, были бы как можно меньше или как можно больше [2]. Обычно возникала ситуация, когда мы не могли получить экстремумы этих функционалов одновременно, т. е. для одной  $j(x) \in L_2(\sigma)$ , тогда приходилось идти на компромисс. Среди всех функционалов выделять более важные и менее важные и для них получать решения с более или менее близкими значениями к их экстремумам. Именно такие задачи синтеза решались большинством известных вариационных методов, разбиравшихся в предыдущей обзорной статье этого сборника.

Часто возникают задачи синтеза, в которых не требуется найти  $j(x)$  с экстремальными или близкими к экстремальным значениям функционалов, а наоборот, требуется, чтобы функционалы имели

некоторые промежуточные значения. Именно такая задача, например, возникает, когда мы хотим получить с некоторой точностью заданную амплитудную диаграмму.

**2. Постановка задачи.** Амплитудной диаграммой называется функция

$$|G(\theta, \varphi)| = |g[j]|_{\theta\varphi}. \quad (2)$$

Пусть требуется найти ток  $j(x)$  такой, чтобы амплитудная диаграмма принимала в выбранных точках области  $\Omega$ ;  $(\theta_m, \varphi_m)$  значения из заданных отрезков  $[a_m, A_m]$

$$a_m \leq |g[j]|_{\theta_m\varphi_m} \leq A_m, \quad m = 1, \dots, M, \quad (3)$$

где  $a_m \geq 0, A_m \geq 0$  — действительные числа, являющиеся допустимыми отклонениями значений амплитудной диаграммы (2) в выбранных точках  $(\theta_m, \varphi_m) \in \Omega$ .

Обычно на вершину главного лепестка накладывают жесткие требования, например, чтобы точка максимума была заданной  $(\theta_0, \varphi_0) \in \Omega$ . Эта точка может быть среди  $(\theta_m, \varphi_m) \in \Omega$ . Для удержания вершины в заданной точке  $(\theta_0, \varphi_0)$  мы наложим условия на некоторый функционал

$$d_{\theta_0\varphi_0}(g[j]) = \left| \frac{\partial G(\theta_0, \varphi_0)}{\partial \theta} \right|^2 + \left| \frac{\partial G(\theta_0, \varphi_0)}{\partial \varphi} \right|^2. \quad (4)$$

Чем меньше этот квадратичный функционал, тем меньше дифференциал диаграммы  $G(\theta, \varphi)$  в точке  $(\theta_0, \varphi_0) \in \Omega$ , а необходимым условием экстремума является нулевой дифференциал.

Иногда накладывают условия на фронт главного лепестка вдоль заданных направлений в некоторых выбранных точках  $(\theta^n, \varphi^n)$  области  $\Omega$

$$l_n = \{\cos \beta_n, \sin \beta_n\}. \quad (5)$$

Для удовлетворения условий на фронт будем использовать функционалы, описывающие крутизну фронта в точках  $(\theta^n, \varphi^n)$  вдоль направлений  $l_n$  (5), в области  $\Omega$

$$D_{l_n}(g[j]) = \frac{d}{dl_n} |G(\theta^n, \varphi^n)|^2 = \\ = \left[ \frac{\partial G(\theta^n, \varphi^n)}{\partial \theta} G^*(\theta^n, \varphi^n) + \frac{\partial G^*(\theta^n, \varphi^n)}{\partial \theta} G(\theta^n, \varphi^n) \right] \cos \beta_n + \\ + \left[ \frac{\partial G(\theta^n, \varphi^n)}{\partial \varphi} G^*(\theta^n, \varphi^n) + \frac{\partial G^*(\theta^n, \varphi^n)}{\partial \varphi} G(\theta^n, \varphi^n) \right] \sin \beta_n. \quad (6)$$

Производную по направлению  $l_n$  в точке  $(\theta^n, \varphi^n)$  двумерной области  $\Omega$  мы брали не от самой амплитудной диаграммы, а от ее квадрата. Это не имеет принципиального значения, но зато функционалы  $D_{l_n}(g[j])$  (ф-ла (6)) получились у нас квадратичными.

Замечание 1. Направления  $l_n$  в точках  $(\theta^n, \varphi^n)$  области  $\Omega$  должны быть выбраны в сторону подъема фронта главного лепестка, чтобы значения функционалов  $D_{l_n}(g[j])$  были неотрицательными.

Итак, основные требования, предъявляемые к току  $j(x)$ , который мы хотим получить, следующие:

$$\begin{aligned} a_m^2 &\leq |g[j]|_{\theta_m \varphi_m}^2 \leq A_m^2, \quad m = 1, \dots, M, \\ b_n^2 &\leq D_{l_n}(g[j]) \leq B_n^2, \quad n = 1, \dots, N, \\ 0 &\leq d_{\theta_0 \varphi_0}(g[j]) \leq C^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Вместо условий (3) мы записали им эквивалентные для квадратичных функционалов

$$|g[j]|_{\theta_m \varphi_m}^2 = |G(\theta_m, \varphi_m)|^2. \quad (8)$$

Постановка задачи. Решение задачи синтеза (7) будем искать, используя следующую вариационную задачу:

$$\inf_{j \in L_2} \left\{ \frac{\Phi_1(j, j) + \Psi(j)}{\Phi_2(j, j) + 1} \right\}, \quad (9)$$

где  $\Phi_1(j, j)$  — квадратичный функционал, с помощью которого мы будем уменьшать значения (4), (6), (8):

$$\Phi_1(j, j) = \sum_{m=1}^M s_m |g[j]|_{\theta_m \varphi_m}^2 + \sum_{n=1}^N t_n D_{l_n}(g[j]) + Q_0 d_{\theta_0 \varphi_0}(g[j]). \quad (10)$$

Далее,  $\Phi_2(j, j)$  — квадратичный функционал, с помощью которого мы будем увеличивать значения (6), (8):

$$\Phi_2(j, j) = \sum_{m=1}^M s'_m |g[j]|_{\theta_m \varphi_m}^2 + \sum_{n=1}^N t'_n D_{l_n}(g[j]). \quad (11)$$

Здесь в (10), (11)  $s_m \geq 0$ ,  $s'_m \geq 0$ ,  $t_n \geq 0$ ,  $t'_n \geq 0$ ,  $Q_0 \geq 0$  — действительные параметры. Знаменатель в (9) выбран таким, чтобы ни при каких наборах параметров он не обращался в нуль. Наконец,  $\Psi(j)$  — дополнительный функционал, необходимый для корректной постановки задачи синтеза, так как одних требований (7) для этого недостаточно.

Итак, наряду с основными требованиями (7) мы дополнительно потребуем минимальности значения специального функционала

$$\Psi(j) = \|F[j] - h(\lambda)\|_H^2 = \int_{E_k} |F[j] - h(\lambda)|^2 \mathcal{R}(\lambda) d\lambda, \quad (12)$$

где  $\bar{E}_k$  — евклидово действительное пространство той же размерности, что и область  $\sigma$  в (1),  $F[j]$  — спектральная функция тока

$$F[j] = \int_{\sigma} j(x) e^{i\lambda x} dx, \quad \lambda \in E_k, \quad (13)$$

далее,  $h(\lambda)$  — желаемая спектральная функция решения из пространства  $H$  (см. (12)), она задана. Наконец,  $\mathcal{R}(\lambda)$ ,  $\lambda \in E_k$  — весовая функция следующего вида:

$$\mathcal{R}(\lambda) = \begin{cases} R(\lambda) \geq 0, & \lambda \in \rho \subset E_k, \\ \alpha = \text{const} > 0, & \lambda \in E_k \setminus \rho, \end{cases} \quad (14)$$

где  $\rho$  — область пространства  $E_k$ .

Замечание 2. Из самого вида задачи (9), т. е. из самой математической постановки ясно, что мы ожидаем увеличения значений соответствующих функционалов с ростом параметров  $s'_m$ ,  $t'_n$  и уменьшения их с ростом параметров  $s_m$ ,  $t_n$ . Поэтому логично считать, что параметры  $s_m$  и  $s'_m$ , а также  $t_n$  и  $t'_n$  с одинаковыми индексами не могут иметь одновременно ненулевые значения, т. е. либо  $s_m \neq 0$ ,  $s'_m = 0$ , либо  $s_m = 0$ ,  $s'_m \neq 0$ , либо  $s_m = s'_m = 0$ .

Аналогично для параметров  $t_n$ ,  $t'_n$ .

**3. Метод формирования.** Метод решения задачи синтеза (7) представляет итерационный процесс. На каждой  $i$ -ой итерации мы получаем решение  $j_i(x) \in L_2(\sigma)$  задачи (9) при некотором наборе параметров. Затем проверяем выполнение основных требований (7). Если они удовлетворены, то на этом решение задачи синтеза заканчивается. Если не удовлетворены, тогда производится  $(i+1)$ -я итерация, т. е. решается задача (9) со специальными измененными параметрами.

По многим причинам удобнее иметь дело не с задачей (9), а с ей эквивалентной

$$\inf_{j \in L_2} \{ \Phi_1(j, j) + \Psi(j) - \mu \Phi_2(j, j) \}, \quad (15)$$

где  $\mu$  — множитель Лагранжа.

Сделаем ряд преобразований в задаче (15). Обозначим

$$\begin{aligned} P_m &= s_m - \mu s'_m, \quad m = 1, \dots, M, \\ Q_n &= t_n - \mu t'_n, \quad n = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (16)$$

Тогда задачу (15) можно переписать в следующем виде:

$$\inf_{j \in L_2} \left\{ \sum_{m=1}^M P_m |g[j]|_{\theta_m \varphi_m}^2 + Q_0 d_{\theta_0 \varphi_0}(g[j]) + \right.$$

$$+ \sum_{n=1}^N Q_n D_{t_n}(g[j]) + \|F[j] - h(\lambda)\|_{H}^2. \quad (17)$$

Отметим, что, если мы непрерывно меняем параметры  $s_m$ ,  $s_m$  и  $t_n$ ,  $t_n$ , то новые параметры  $P_m, Q_n$  (см. (16)) будут тоже непрерывно меняться, так как множитель Лагранжа  $\mu$  непрерывно зависит от старых параметров. Поэтому вместо того, чтобы на каждой итерации менять параметры  $s_m, s_m$  и  $t_n, t_n$ , можно менять сразу новые параметры  $P_m, Q_n$  и решать задачу (17). Этим мы избежим трудоемкой операции по нахождению множителя Лагранжа.

Найдем границы изменения новых параметров. Так как в силу замечания 2 с ростом  $s_m$  или  $t_n$  у нас  $s_m = 0$  или  $t_n = 0$ , то параметры  $P_m, Q_n$  сверху не ограничены. Далее при  $s_m \neq 0$  или  $t_n \neq 0$  множитель  $\mu > 0$ , а  $s_m = 0$  или  $t_n = 0$ , поэтому параметры  $P_m, Q_n$  могут принимать отрицательные значения. Таким образом,

$$\begin{aligned} -p_m^2 &\leq P_m < \infty, \quad m = 1, \dots, M, \\ -q_n^2 &\leq Q_n < \infty, \quad n = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (18)$$

Нижние пределы изменения параметров  $P_m, Q_n$  зависят также от остальных параметров  $Q_0, R(\lambda), \lambda \in \rho, \alpha$  и определяются из условия положительной определенности следующего квадратичного функционала:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(j, j) &= \sum_{m=1}^M P_m |g[j]|_{\theta_m \varphi_m}^2 + Q_0 d_{\theta_0 \varphi_0}(g[j]) + \\ &+ \sum_{n=1}^N Q_n D_{t_n}(g[j]) + \|F[j]\|_{H}^2 \end{aligned} \quad (19)$$

для любой  $j(x) \neq 0, \mathcal{K}(j, j) > 0$ .

**Теорема 1.** Для любых наборов параметров  $P_m \geq -p_m^2, Q_0 \geq 0, Q_n \geq -q_n^2, R(\lambda) \geq 0, \lambda \in \rho, \alpha > 0$ , удовлетворяющих условию (19) и любой желаемой спектральной характеристике  $h(\lambda) \in H$ , задача (17) имеет единственное решение.

Обозначим решение  $j(x)$  задачи (17) так, чтобы выделить зависимость его от параметров  $P_m, Q_n$

$$j(x) = j(P_1, P_2, \dots, P_M, Q_0, Q_1, \dots, Q_N). \quad (20)$$

Решение (20) зависит также и от параметров дополнительного функционала  $\Psi(j)$ , но будем пока считать все остальные параметры, т. е.  $R(\lambda)$  и  $\alpha$  неизменными.

Наш итерационный метод основывается на специальном выборе параметров  $P_m, Q_n$  с целью сформировать значения основных функционалов от решения (20), т. е. удовлетворить требованиям (7). Выбор параметров на каждой итерации происходит с учетом следующих фактов.

**Теорема 2.** Пусть  $j_1(x) = j(P_1, P_2, \dots, P_M, Q_0, Q_1, \dots, Q_N)$  и  $j_2(x) = j(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \dots, \tilde{P}_M, \tilde{Q}_0, \tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_N)$  — два решения задачи (17) при различных наборах параметров  $P_m, Q_n$ . Тогда имеет место неравенство

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^M (\tilde{P}_m - P_m) |g[j_2]|_{\theta_m \varphi_m}^2 + (\tilde{Q}_0 - Q_0) d_{\theta_0 \varphi_0}(g[j_2]) + \\ &+ \sum_{n=1}^N (\tilde{Q}_n - Q_n) D_{t_n}(g[j_2]) \leq \\ &\leq \sum_{m=1}^M (\tilde{P}_m - P_m) |g[j_1]|_{\theta_m \varphi_m}^2 + (\tilde{Q}_0 - Q_0) d_{\theta_0 \varphi_0}(g[j_1]) + \\ &+ \sum_{n=1}^N (\tilde{Q}_n - Q_n) D_{t_n}(g[j_1]). \end{aligned} \quad (21)$$

Из этой важной теоремы, в частности, следует, что с уменьшением какого-либо одного параметра будет монотонно возрастать значение соответствующего ему функционала, так как в (21) все разности, кроме одной, будут нули. Аналогично с увеличением какого-нибудь параметра будет монотонно уменьшаться значение соответствующего функционала от решения задачи (17).

Следующая теорема имеет принципиальное значение. Она отвечает положительно, например, на вопрос, можно ли, уменьшая значение того или иного функционала, сделать это значение достаточно малым.

**Теорема 3.** Для любой  $j_0(x) \in L_2(\sigma)$  и любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое значение параметра  $P_m(j_0, \varepsilon)$  или  $Q_n(j_0, \varepsilon)$  при фиксированных значениях остальных параметров, что решения  $j_1(x), j_2(x), \dots, j_{M+N+1}(x)$  будут удовлетворять неравенствам

$$\begin{aligned} |g[j_1]|_{\theta_1 \varphi_1}^2 &\leq |g[j_0]|_{\theta_1 \varphi_1}^2 + \varepsilon, \\ |g[j_2]|_{\theta_2 \varphi_2}^2 &\leq |g[j_0]|_{\theta_2 \varphi_2}^2 + \varepsilon, \\ &\dots \dots \dots \\ |g[j_M]|_{\theta_M \varphi_M}^2 &\leq |g[j_0]|_{\theta_M \varphi_M}^2 + \varepsilon, \\ d_{\theta_0 \varphi_0}(g[j_{M+1}]) &\leq d_{\theta_0 \varphi_0}(g[j_0]) + \varepsilon, \end{aligned} \quad (22)$$



$$D_{L_1}(g[j_{M+2}]) \leq D_{L_1}(g[j_0]) + \varepsilon,$$

$$\dots$$

$$D_{L_N}(g[j_{M+N+1}]) \leq D_{L_N}(g[j_0]) + \varepsilon.$$

где

$$j_1(x) = j(\tilde{P}_1, P_2, \dots, P_M, Q_0, Q_1, \dots, Q_N) \text{ при } \tilde{P}_1 > P_1(j_0, \varepsilon),$$

$$j_2(x) = j(P_1, \tilde{P}_2, \dots, P_M, Q_0, Q_1, \dots, Q_N) \text{ при } \tilde{P}_2 > P_2(j_0, \varepsilon),$$

$$\dots$$

$$j_{M+N+1}(x) = j(P_1, P_2, \dots, P_M, Q_0, Q_1, \dots, \tilde{Q}_N) \text{ при } \tilde{Q}_N > Q_N(j_0, \varepsilon).$$

Эта теорема говорит о том, что, увеличивая тот или иной параметр, мы обязательно удовлетворим соответствующему неравенству из (22). Отметим, что теорема ничего не говорит о возможности одновременного удовлетворения всем неравенствам (22).

Обе приведенные теоремы 2 и 3 обосновывают метод формирования амплитудной диаграммы. Как мы видели, для удовлетворения основным требованиям (7) надо работать с параметрами  $P_m$  и  $Q_n$ . Для чего же нужны остальные параметры, т. е. параметры дополнительного функционала?

**Замечание 3.** Вообще говоря, системе функциональных неравенств (7) может удовлетворять сразу множество токов  $\in L_2(\sigma)$ . Для выделения решений из этого множества служит дополнительный функционал. Рассматривая различные значения  $R(\lambda)$ ,  $\lambda \in \rho$  и  $\alpha$ , мы будем получать различные варианты решения задачи синтеза (7). Эти варианты решения задачи синтеза будут отличаться между собой видом спектральной функции, так сказать, различной структурой. С этим связаны дополнительные возможности метода формирования амплитудной диаграммы.

**4. Доказательства.** Проведем доказательства сформулированных ранее теорем.

**Доказательство теоремы 1.** Перепишем задачу (17) с учетом (12) и обозначения (19)

$$\inf_{j \in L_2} \{ \mathcal{K}(j, j) - (F[j], h)_H - (h, F[j])_H \}. \quad (23)$$

Так как все слагаемые в (19) — эрмитовы квадратичные функционалы, то  $\mathcal{K}(j, j)$  — положительно определенный эрмитовый квадратичный функционал. Определим гильбертово пространство  $K$  со скалярным произведением

$$(j_1, j_2)_K = \mathcal{K}(j_1, j_2). \quad (24)$$

Далее всякий линейный функционал в гильбертовом пространстве по теореме Рисса имеет вид

$$(F[j]), h)_H = (j, \tilde{j})_K, \quad (25)$$

где  $\tilde{j}(x) \in K$  (24). Таким образом, задача (23), а значит (17), переписывается в виде

$$\inf_{j \in K} \{ \|j - \tilde{j}\|_K^2 \}, \quad (26)$$

откуда следует утверждение теоремы 1.

**Доказательство теоремы 2.** В силу определения нижней грани имеем неравенства

$$\sum_{m=1}^M \tilde{P}_m |g[j_2]|_{\theta_m \varphi_m}^2 + \tilde{Q}_0 d_{\theta_0 \varphi_0}(g[j_2]) +$$

$$+ \sum_{n=1}^N \tilde{Q}_n D_{L_n}(g[j_2]) + \Psi(j_2) \leq$$

$$\leq \sum_{m=1}^M \tilde{P}_m |g[j_1]|_{\theta_m \varphi_m}^2 + \tilde{Q}_0 d_{\theta_0 \varphi_0}(g[j_1]) +$$

$$+ \sum_{n=1}^N \tilde{Q}_n D_{L_n}(g[j_1]) + \Psi(j_1). \quad (27)$$

Так как  $j_2(x)$ , (27) доставляет наименьшее значение. Аналогично имеем

$$\sum_{m=1}^M P_m |g[j_1]|_{\theta_m \varphi_m}^2 + Q_0 d_{\theta_0 \varphi_0}(g[j_1]) +$$

$$+ \sum_{n=1}^N Q_n D_{L_n}(g[j_1]) + \Psi(j_1) \leq$$

$$\leq \sum_{m=1}^M P_m |g[j_2]|_{\theta_m \varphi_m}^2 + Q_0 d_{\theta_0 \varphi_0}(g[j_2]) +$$

$$+ \sum_{n=1}^N Q_n D_{L_n}(g[j_2]) + \Psi(j_2). \quad (28)$$

Вычтем из левой части неравенства (27) большую величину (правую часть неравенства (28)), а из правой части неравенства (27) меньшую величину (левую часть неравенства (28)), тогда знак неравенства (27) сохранится и мы будем иметь требуемое неравенство (21).

**Доказательство теоремы 3.** Все неравенства (22) доказываются аналогично. Поэтому проведем доказательство только первого из них. В силу определения нижней грани

$$\begin{aligned}
& \tilde{P}_1 |g[j_1]|_{\theta, \varphi_1}^2 + \sum_{m=2}^M P_m |g[j_1]|_{\theta, \varphi_m}^2 + Q_0 d_{\theta, \varphi_0}(g[j_1]) + \\
& + \sum_{n=1}^N Q_n D_{l_n}(g[j_1]) + \Psi(j_1) \leq \\
& \leq \tilde{P}_1 |g[j_0]|_{\theta, \varphi_1}^2 + \sum_{m=2}^M P_m |g[j_0]|_{\theta, \varphi_m}^2 + \\
& + Q_0 d_{\theta, \varphi_0}(g[j_0]) + \sum_{n=1}^N Q_n D_{l_n}(g[j_0]) + \Psi(j_0), \quad (29)
\end{aligned}$$

так как функция  $j_1(x)$  доставляет наименьшее значение.

Подберем значение  $P_1$  такое, чтобы вместе с остальными параметрами  $P_m$  и  $Q_n$  удовлетворялось неравенство (19). Тогда (29) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
& (\tilde{P}_1 - P_1) |g[j_1]|_{\theta, \varphi_1}^2 + \|j_1 - \tilde{j}\|_K^2 \leq \\
& \leq (\tilde{P}_1 - P_1) |g[j_0]|_{\theta, \varphi_1}^2 + \|j_0 - \tilde{j}\|_K^2, \quad (30)
\end{aligned}$$

где  $\tilde{j}(x)$  определяется по  $h(\lambda)$  (25).

Далее, в силу того, что  $\|j_1 - \tilde{j}\|_K^2$  при  $\tilde{P}_1 > P_1$  будем иметь

$$|g[j_1]|_{\theta, \varphi_1}^2 \leq |g[j_0]|_{\theta, \varphi_1}^2 + \frac{\|j_0 - \tilde{j}\|_K^2}{\tilde{P}_1 - P_1}. \quad (31)$$

Для значений параметра  $\tilde{P}_1$

$$\tilde{P}_1 > P_1 + \frac{1}{\varepsilon} \|j_0 - \tilde{j}\|_K^2 = P_1(j_0, \varepsilon) \quad (32)$$

будет выполняться первое неравенство из (22).

Аналогично доказываются остальные неравенства (22). Теорема 3 доказана.

**5. Заключение.** Метод формирования амплитудной диаграммы предполагает широкое применение ЭВМ. Причем, не столько для численного решения задачи (17), сколько для автоматического перебора параметров. В виду влияния любого параметра не только на значения соответствующего ему функционала от решения, но и на значение всех остальных функционалов, вопрос о переборе параметров приобретает особую важность. Поэтому необходима хорошо обоснованная система автоматического перебора параметров. Все относящееся к этой системе будет рассмотрено в следующей статье настоящего сборника. Отметим еще, что развиваемый в статье метод имеет универсальный характер, т. е. может применяться при решении системы неравенств типа (7) и для других

функционалов из различных разделов прикладной математики.  
В заключение хочу выразить благодарность за постоянное внимание к работе и ценные советы В. И. Дмитриеву.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И., Чечкин А. В. Об одном методе теории синтеза дискретной антенны. «Радиотехника и электроника», XIV, № 3, 1971.
2. Чечкин А. В. Метод заданных диаграмм. В сб.: «Вычисл. методы и программирование», вып. XVI. Изд-во МГУ, 1971.

Н. И. БЕРЕЗИНА, А. В. ЧЕЧКИН  
**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СИНТЕЗА АНТЕНН МЕТОДОМ  
 ФОРМИРОВАНИЯ АМПЛИТУДНОЙ ДИАГРАММЫ**

Рассматриваются вопросы численной реализации метода формирования амплитудной диаграммы. Предполагается система выбора параметров с помощью ЭВМ, позволяющая автоматизировать сложный процесс решения задачи синтеза методом формирования.

**1. Введение.** Методом формирования амплитудной диаграммы решается следующая задача [1]. Найти  $f(x) \in L_2(\sigma)$ , удовлетворяющую системе неравенств

$$\begin{cases} a_m^2 \leq |g[f]|_{\theta_m, \varphi_m}^2 \leq A_m^2, \quad m = 1, 2, \dots, M, \\ 0 \leq d_{\theta_0, \varphi_0}(g[f]) \leq C^2, \\ b_n^2 \leq D_{l_n}(g[f]) \leq B_n^2, \quad n = 1, 2, \dots, N, \end{cases} \quad (1)$$

где  $a_m, A_m, C, b_n, B_n$  — заданные действительные числа,

$$|g[f]|_{\theta_m, \varphi_m}^2 = \left| \int_{\sigma} \mathcal{G}(\theta_m, \varphi_m, x) f(x) dx \right|^2 \quad (2)$$

амплитудная диаграмма направленности в точке  $(\theta_m, \varphi_m)$ ,  $\sigma$  — ограниченная  $k$ -мерная область ( $k=1, 2, 3$ ),  $x$  — точка из этой области,  $(\theta, \varphi)$  — угловые координаты из области

$$\Omega = \{\theta, \varphi: 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\}, \quad (3)$$

$f(x) \in L_2(\sigma)$  — ток в антенне. Предполагается, что ядро оператора  $g$  (см. (2))  $\mathcal{G}(\theta, \varphi, x)$  принадлежит пространству  $L_2(\Omega, \sigma)$ . Далее  $(\theta_m, \varphi_m) \in \Omega$  ( $m=1, 2, \dots, M$ ) — это точки, в которых амплитудная диаграмма не должна выходить из заданного коридора значений.

$$d_{\theta_0, \varphi_0}(g[f]) = \left| \int_{\sigma} \mathcal{G}_{\theta}(\theta_0, \varphi_0, x) f(x) dx \right|^2 + \left| \int_{\sigma} \mathcal{G}_{\varphi}(\theta_0, \varphi_0, x) f(x) dx \right|^2 \quad (4)$$

— это функционал, который влияет на малость дифференциала диаграммы в заданной точке  $(\theta_0, \varphi_0)$  — вершине главного лепестка.

$$\begin{aligned} D_{l_n}(g[f]) = & \left[ \int_{\sigma} \mathcal{G}'_{\theta}(\theta^n, \varphi^n, x) f(x) dx \int_{\sigma} \mathcal{G}^*(\theta^n, \varphi^n, x) f^*(x) dx + \right. \\ & \left. + \int_{\sigma} \mathcal{G}(\theta^n, \varphi^n, x) f(x) dx \int_{\sigma} \mathcal{G}'^*_{\theta}(\theta^n, \varphi^n, x) f^*(x) dx \right] \cos \beta_n + \\ & + \left[ \int_{\sigma} \mathcal{G}'_{\varphi}(\theta^n, \varphi^n, x) f(x) dx \int_{\sigma} \mathcal{G}^*(\theta^n, \varphi^n, x) f^*(x) dx + \right. \\ & \left. + \int_{\sigma} \mathcal{G}(\theta^n, \varphi^n, x) f(x) dx \int_{\sigma} \mathcal{G}'^*_{\varphi}(\theta^n, \varphi^n, x) f^*(x) dx \right] \sin \beta_n \end{aligned} \quad (5)$$

есть функционалы, с помощью которых мы влияем на крутизну фронта главного лепестка в точках  $(\theta^n, \varphi^n) \in \Omega$ ,  $n=1, 2, \dots, N$ , вдоль заданных направлений  $l_n = \{\cos \beta_n, \sin \beta_n\}$ .

Решение задачи синтеза (1) ищется с помощью вариационной задачи

$$\inf_{f \in L_2} \left\{ \sum_{m=1}^M P_m |g[f]|_{\theta_m, \varphi_m}^2 + Q_0 d_{\theta_0, \varphi_0}(g[f]) + \sum_{n=1}^N Q_n D_{l_n}(g[f]) + \Psi(f) \right\}, \quad (6)$$

где  $P_m, Q_n$  — действительные параметры, которые мы стремимся подобрать так, чтобы значения функционалов (2), (4), (5) на функции

$$\tilde{f}(x) = f(P_1, \dots, P_M, Q_0, Q_1, \dots, Q_N), \quad (7)$$

дающей минимум функционалу (6), удовлетворяли системе неравенств (1).

Дополнительный функционал имеет вид [1]

$$\begin{aligned} \Psi(f) = & \alpha (2\pi)^k \int_{\sigma} |f(x)|^2 dx + \int_{\rho} |F[f]|^2 [R(\lambda) - \alpha] d\lambda - \\ & - 2\operatorname{Re} \int_{\sigma} \tilde{f}(x) f^*(x) dx, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\rho$  — область  $k$ -мерного евклидова пространства  $E_k$ ,

$$F[f] = \int_{\sigma} f(x) e^{i\lambda x} dx, \quad \lambda \in E_k \quad (9)$$

спектральная функция,  $R(\lambda) \geq 0$  — весовая функция

$$\tilde{f}(x) = \int_{\rho} h(\lambda) e^{-i\lambda x} R(\lambda) d\lambda + \alpha \int_{E_k \setminus \rho} h(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda \quad (10)$$

Функция из  $L_2(\sigma)$ , связанная с желаемой спектральной характеристикой  $h(\lambda)$ .

В формуле (8) была использована теорема Планшереля

$$\int_{E_k} |F[f]|^2 d\lambda = (2\pi)^k \int_{\sigma} |f(x)|^2 dx \quad (11)$$

и отброшена константа  $\int_{E_k} |h(\lambda)|^2 d\lambda$ .

## 2. Уравнение Эйлера.

$$|g[f]|_{\theta_m \varphi_m}^2 = \iint_{\sigma} \mathcal{G}(\theta_m, \varphi_m, y) \mathcal{G}^*(\theta_m, \varphi_m, x) f(y) f^*(x) dy dx,$$

$$d_{\theta_0 \varphi_0}(g[f]) = \iint_{\sigma} [\mathcal{G}'_{\theta}(\theta_0, \varphi_0, y) \mathcal{G}^{*'}_{\theta}(\theta_0, \varphi_0, x) + \mathcal{G}'_{\varphi}(\theta_0, \varphi_0, y) \mathcal{G}^{*'}_{\varphi}(\theta_0, \varphi_0, x)] f(y) f^*(x) dy dx, \quad (12)$$

$$D_{I_n} = \iint_{\sigma} \{[\mathcal{G}'_{\theta}(\theta^n, \varphi^n, y) \mathcal{G}^*(\theta^n, \varphi^n, x) +$$

$$+ \mathcal{G}(\theta^n, \varphi^n, y) \mathcal{G}^{*'}(\theta^n, \varphi^n, x)] \cos \beta_n +$$

$$+ [\mathcal{G}'_{\varphi}(\theta^n, \varphi^n, y) \mathcal{G}^*(\theta^n, \varphi^n, x) +$$

$$+ \mathcal{G}(\theta^n, \varphi^n, y) \mathcal{G}^{*'}(\theta^n, \varphi^n, x)] \sin \beta_n\} f(y) f^*(x) dy dx,$$

$$\Psi(f) = \alpha(2\pi)^k \int_{\sigma} |f(x)|^2 dx - 2\text{Re} \int_{\sigma} \tilde{f}(x) f^*(x) dx +$$

$$+ \iint_{\sigma} \left\{ \int_{\rho} [R(\lambda) - \alpha] e^{i\lambda(y-x)} d\lambda \right\} f(y) f^*(x) dy dx.$$

Теперь задачу (6) можно переписать так:

$$\inf_{f \in L_2} \left\{ \alpha(2\pi)^k \int_{\sigma} |f(x)|^2 dx + \iint_{\sigma} S(x, y) f(y) f^*(x) dy dx - 2\text{Re} \int_{\sigma} \tilde{f}(x) f^*(x) dx \right\}, \quad (13)$$

причем ядро  $S(x, y)$  — эрмитово, т. е.  $S(x, y) = S^*(y, x)$ , и равно

$$S(x, y) = \sum_{m=1}^M P_m \mathcal{G}(\theta_m, \varphi_m, y) \mathcal{G}^*(\theta_m, \varphi_m, x) +$$

$$+ Q_0 [\mathcal{G}'_{\theta}(\theta_0, \varphi_0, x) \mathcal{G}'_{\theta}(\theta_0, \varphi_0, y) + \mathcal{G}'_{\varphi}(\theta_0, \varphi_0, y) \mathcal{G}'_{\varphi}(\theta_0, \varphi_0, x)] +$$

$$+ \sum_{n=1}^N Q_n \{[\mathcal{G}'_{\theta}(\theta^n, \varphi^n, y) \mathcal{G}^*(\theta^n, \varphi^n, x) + \mathcal{G}'_{\theta}(\theta^n, \varphi^n, x) \mathcal{G}(\theta^n, \varphi^n, y)] \cos \beta_n +$$

$$+ [\mathcal{G}'_{\varphi}(\theta^n, \varphi^n, y) \mathcal{G}^*(\theta^n, \varphi^n, x) + \mathcal{G}'_{\varphi}(\theta^n, \varphi^n, x) \mathcal{G}(\theta^n, \varphi^n, y)] \sin \beta_n\} +$$

$$+ \int_{\rho} [R(\lambda) - \alpha] e^{i\lambda(y-x)} d\lambda. \quad (14)$$

Уравнением Эйлера задачи (6) является интегральное уравнение Фредгольма II рода

$$\alpha(2\pi)^k f(x) + \int_{\sigma} S(x, y) f(y) dy = \tilde{f}(x), \quad (15)$$

где  $S(x, y)$  определяется формулой (14),  $f(x)$  — заданная функция, определяемая спектральной характеристикой (10).

В работе [1] доказано, что для любых наборов  $P_m, Q_n, R(\lambda)$  и  $\alpha$ , при которых положительно определен функционал

$$K(f, f) = \sum_{m=1}^M P_m |g[f]|_{\theta_m \varphi_m}^2 + Q_0 d_{\theta_0 \varphi_0}(g[f]) + \sum_{n=1}^N Q_n D_{I_n}(g[f]) + \|F[f]\|_{H'}^2, \quad (16)$$

задача (6) имеет единственное решение.

Заметим, что условие (16) является достаточным условием положительности оператора

$$A[f] = \alpha(2\pi)^k f(x) + \int_{\sigma} S(x, y) f(y) dy. \quad (17)$$

Поэтому справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** Для любых наборов параметров  $P_m, Q_n, R(\lambda)$  и  $\alpha$ , при которых положительно определен функционал (16), уравнение (15) имеет единственное решение.

Таким образом, задача (6) свелась к решению интегрального уравнения (15), так как решение задачи (6) всегда находится среди соответствующих экстремалей, т. е. решений уравнения (15).

**Замечание 1.** Уравнение (15) есть равенство в пространстве  $L_2(\sigma)$ , а интегралы в равенстве — интегралы Лебега. Однако для реальных антенн ядро интегрального оператора (2)  $\mathcal{S}(\theta, \varphi, x)$  и его производные  $\mathcal{G}'_{\theta}(\theta, \varphi, x)$  и  $\mathcal{G}'_{\varphi}(\theta, \varphi, x)$  являются непрерывными функциями на множестве  $(\Omega \times \sigma)$ .

Очевидно, что если и функцию  $\tilde{f}(x)$  задать непрерывной, то решение уравнения (15) будет также непрерывным. В этом случае интеграл в (15) можно считать интегралом Римана, а равенство (15) будет справедливо в любой точке  $x \in \sigma$ .

Замечание 2. Вместо того чтобы задавать желаемую спектральную характеристику  $h(\lambda)$ ,  $\lambda \in E_h$  и затем вычислять правую часть  $\tilde{f}(x)$  уравнения (15) по формуле (10), можно сразу задать функцию  $\tilde{f}(x) \in L_2(\sigma)$ .

В методе формирования правая часть  $\tilde{f}(x)$  пропорциональна решению задачи (6) при нулевых параметрах  $P_m = Q_n = 0$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N$  и  $R(\lambda) = \alpha$ . Поэтому функция  $\frac{1}{\alpha(2\pi)^k} \tilde{f}(x)$  является током, с которого мы можем начинать итерационный процесс метода формирования. Функцию  $\tilde{f}(x)$  можно выбрать из каких-либо теоретических соображений или воспользоваться предварительными экспериментальными данными.

3. О способе выбора параметров  $P_m$  и  $Q_n$ . Решение задачи (6), т. е. уравнения (15), зависит от многих параметров  $P_m$ ,  $Q_n$ ,  $R(\lambda)$  и  $\alpha$ . Зафиксируем значения  $\alpha$  и  $R(\lambda)$  и будем менять только параметры  $P_m$  и  $Q_n$ . Решение уравнения (15) обозначим так:

$$f(x) = f(P_1, \dots, P_M, Q_0, Q_1, \dots, Q_N). \quad (18)$$

Теорема 2. Пусть  $f_1(x) = f(P_1, \dots, P_M, Q_0, Q_1, \dots, Q_N)$  и  $f_2(x) = f(\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_M, \tilde{Q}_0, \tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_N)$  — два решения уравнения (15) при различных наборах параметров  $P_m$  и  $Q_n$ . Пусть далее для некоторых функционалов (2), (4), (5) выполняются равенства

$$\begin{aligned} |g[f_1]|_{\theta_{\mu_1}, \varphi_{\mu_1}} &= |g[f_2]|_{\theta_{\mu_1}, \varphi_{\mu_1}}, \dots, \\ D_{l_{v_1}}(g[f_1]) &= D_{l_{v_1}}(g[f_2]), \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Тогда для остальных функционалов выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{m \neq \mu_1, \dots, \mu_k}^M (\tilde{P}_m - P_m) |g[f_2]|_{\theta_m, \varphi_m}^2 + (\tilde{Q}_0 - Q_0) d_{\theta_0, \varphi_0}(g[f_2]) + \\ + \sum_{n \neq \nu_1, \dots, \nu_l}^N (\tilde{Q}_n - Q_n) D_{l_n} [f_2] < \sum_{m \neq \mu_1, \dots, \mu_k}^M (\tilde{P}_m - P_m) |g[f_1]|_{\theta_m, \varphi_m}^2 + \\ + (\tilde{Q}_0 - Q_0) d_{\theta_0, \varphi_0}(g[f_1]) + \sum_{n \neq \nu_1, \dots, \nu_l}^N (\tilde{Q}_n - Q_n) D_{l_n}(g[f_1]). \end{aligned} \quad (20)$$

Доказательство теоремы непосредственно вытекает из теоремы 2 [1]. Из этой теоремы можно сделать следующий вывод.

Предположим, что, работая с одним каким-либо параметром, например, с параметром  $P_\mu$ , мы добились от соответствующего функционала удовлетворения основному неравенству из (1). Теперь мы хотим, чтобы другой функционал также удовлетворял своему неравенству из (1). Для этого надо работать с соответствующим параметром, пусть это будет параметр  $\tilde{P}_m$ ,  $m \neq \mu$ .

Однако при изменении параметра  $P_m$  будет изменяться не только значение соответствующего ему функционала, но и значения других функционалов, в частности того, значение которого уже удовлетворяет основному требованию. Может случиться так, что уже удовлетворенное неравенство нарушится. Как быть в этом случае?

Теорема 2 утверждает, что при каждом изменении параметра  $P_m$ ,  $m \neq \mu$ , надо следить за поведением функционала, соответствующего параметру  $P_\mu$ , и изменять последний параметр соответствующим образом. Тогда с увеличением  $P_m$ ,  $m \neq \mu$  будет монотонно уменьшаться значение соответствующего функционала (или наоборот), и при этом не будет нарушаться достигнутое раньше выполнение основного требования для значений функционала, соответствующего параметру  $P_\mu$ .

Выбор параметров — трудоемкий процесс, поэтому естественно поручить его ЭВМ. Предлагается следующая система автоматического выбора параметров.

4. Система автоматического выбора параметров. Прежде чем рассмотреть конкретную систему выбора весовых параметров  $P_m$  и  $Q_n$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ , необходимо отметить некоторые особенности итерационного процесса, с помощью которого ищется решение задачи (1).

На каждом шаге этого итерационного процесса решается экстремальная задача (6) для выбранных специальным образом значений параметров  $P_m$  и  $Q_n$ , которая, как уже выяснено, сводится к решению интегрального уравнения II рода с ядром  $S(x, y)$ , зависящим от параметров  $P_m$ ,  $Q_n$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ .

Так как параметры  $P_m$  и  $Q_n$  входят в  $S(x, y)$  как коэффициенты при произведениях ядра оператора (2)  $\mathcal{G}(\theta_\mu, \varphi_\mu, x)$  и его производных  $\mathcal{G}'_\varphi(\theta_\mu, \varphi_\mu, x)$  и  $\mathcal{G}'_\theta(\theta_\mu, \varphi_\mu, x)$ , имеет смысл предварительно вычислить значения функции  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{G}'_\varphi$  и  $\mathcal{G}'_\theta$  в нужных точках и записать на внешнем запоминающем устройстве ЭВМ. Тогда пересчет  $S(x, y)$  при изменении весовых параметров  $P_m$  и  $Q_n$  потребует лишь  $2(N + M + 1)$  арифметических операций. Это даст большую экономию машинного времени и позволит осуществить многократный перебор параметров  $P_m$ ,  $Q_n$ , необходимый для реализации метода формирования амплитудной диаграммы.

При реализации метода формирования на ЭВМ необходимо задать в качестве начальных данных:

1) правые и левые части в неравенствах (1), т. е. границы коридора допустимых значений для функционалов (2), (4), (5);  
2) функцию  $\tilde{f}(x)$ , определяемую желаемой спектральной характеристикой;

3) функцию  $R(\lambda)$  и параметр  $\alpha$ , а также начальные значения весовых параметров  $\tilde{P}_m^{(0)}$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$  и  $Q_n^{(0)}$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ ;

4) параметры  $HP_m^{(0)}$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$  и  $HQ_n^{(0)}$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ , с по-

мощью которых будут уменьшаться или увеличиваться параметры  $P_m$  и  $Q_n$ , причем  $HP_m^{(0)} > 0$  и  $HQ_n^{(0)} > 0$ ;

5) минимально допустимые изменения значений функционалов (2), (4), (5) за один шаг итерационного процесса  $\varepsilon_m$  и  $\tilde{\varepsilon}_n$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ .

На первом шаге итерационного процесса находится решение  $f(P_1^{(0)}, \dots, P_M^{(0)}, Q_0^{(0)}, Q_1^{(0)}, \dots, Q_N^{(0)})$  интегрального уравнения (15) при заданных значениях параметров  $P_m^{(0)}, Q_n^{(0)}$ . Для полученного решения  $f(P_1^{(0)}, \dots, Q_N^{(0)})$  вычисляются значения функционалов (2), (4), (5) и проверяется выполнение условий (1). Если все неравенства (1) удовлетворены, то  $f(P_1^{(0)}, \dots, Q_N^{(0)})$  есть искомое решение задачи (1). В противном случае параметры  $P_m^{(0)}, Q_n^{(0)}$  изменяются соответствующим образом.

Пусть сделано  $j$  шагов итерационного процесса, в результате чего получено решение уравнения (15) для значений параметров  $P_m^{(j)}, Q_n^{(j)}$

$$f(P_1^{(j)}, \dots, P_M^{(j)}, Q_0^{(j)}, Q_1^{(j)}, \dots, Q_N^{(j)}). \quad (21)$$

Значения параметров для  $(j+1)$ -го шага выбираются по следующему правилу.

Вычисляются промежуточные значения параметров

$$\hat{P}_m^{(j+1)} = P_m^{(j)} + \delta_m^{(j)} HP_m^{(j)}, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (22)$$

$$\hat{Q}_n^{(j+1)} = Q_n^{(j)} + \tilde{\delta}_n^{(j)} HQ_n^{(j)}, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

где  $\delta_m^{(j)}$  есть расстояние до ближайшей границы коридора допустимых значения для функционала  $|g[f]|_{\theta_m \varphi_m}^2$  и равно

$$\delta_m^{(j)} = \begin{cases} |g[f(P_1^{(j)}, \dots, Q_N^{(j)})]_{\theta_m \varphi_m}^2 - a_m^2, & \text{если } |g[f(P_1^{(j)}, \dots, \\ & \dots, Q_N^{(j)})]_{\theta_m \varphi_m}^2 < a_m^2, \\ 0, & \text{если } a_m^2 \leq |g[f(P_1^{(j)}, \dots, Q_N^{(j)})]_{\theta_m \varphi_m}^2 \leq A_m^2, \\ |g[f(P_1^{(j)}, \dots, Q_N^{(j)})]_{\theta_m \varphi_m}^2 - A_m^2, & \\ \text{если } |g[f(P_1^{(j)}, \dots, Q_N^{(j)})]_{\theta_m \varphi_m}^2 > A_m^2. \end{cases} \quad (23)$$

Заметим, что  $\delta_m^{(j)}$  положительно, если значение рассматриваемого функционала больше, чем позволяют границы коридора, и отрицательно, если значение функционала меньше нижней границы коридора. Так как  $HP_m^{(j)}$  всегда положительно, то  $P_m^{(j+1)}$  со-

ответственно увеличится или уменьшится, т. е. изменится в нужном направлении.

Аналогично вычисляются величины  $\tilde{\delta}_n^{(j)}$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ ,

$$\tilde{\delta}_0^{(j)} = \begin{cases} d_{\theta_0 \varphi_0}(g[f(P_1^{(j)}, \dots, Q_N^{(j)})]) - C^2, & \text{если } d_{\theta_0 \varphi_0}(g[f(P_1^{(j)}, \dots, \\ & \dots, Q_N^{(j)})]) > C^2, \\ 0, & \text{если } d_{\theta_0 \varphi_0}(g[f(P_1^{(j)}, \dots, Q_N^{(j)})]) \leq C^2; \end{cases} \quad (24)$$

$$\tilde{\delta}_n^{(j)} = \begin{cases} D_{i_n}(g[f(P_1^{(j)}, \dots, Q_N^{(j)})]) - b_n^2, & \text{если } D_{i_n}(g[f(P_1^{(j)}, \dots, Q_N^{(j)})]) < b_n^2, \\ 0, & \text{если } b_n^2 \leq D_{i_n}(g[f(P_1^{(j)}, \dots, Q_N^{(j)})]) \leq B_n^2, \\ D_{i_n}(g[f(P_1^{(j)}, \dots, Q_N^{(j)})]) - B_n^2, & \text{если } D_{i_n}(g[f(P_1^{(j)}, \dots, \\ & \dots, Q_N^{(j)})]) > B_n^2, \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (25)$$

Для параметров  $\hat{P}_m^{(j+1)}$  и  $\hat{Q}_n^{(j+1)}$  решается уравнение (15) и вычисляются значения функционалов (2), (4), (5) на полученном решении

$$f(\hat{P}_1^{(j+1)}, \dots, \hat{P}_M^{(j+1)}, \hat{Q}_0^{(j+1)}, \hat{Q}_1^{(j+1)}, \dots, \hat{Q}_N^{(j+1)}). \quad (26)$$

После чего оценивается, насколько удачно выбраны значения параметров  $HP_m^{(j)}$  и  $HQ_n^{(j)}$ . Если параметр  $HP_m^{(j)}$  выбран слишком маленьким, то значение соответствующего ему функционала при переходе от параметра  $P_m^{(j)}$  к  $\hat{P}_m^{(j+1)}$  изменится незначительно. Чтобы добиться выполнения основного неравенства из (1), потребуется много шагов, что замедлит процесс построения решения задачи (1). В этом случае параметры  $HP_m^{(j)}$  надо увеличить.

Если же значение  $HP_m^{(j)}$  выбрано слишком большим, то значение соответствующего функционала при переходе от  $P_m^{(j)}$  к  $\hat{P}_m^{(j+1)}$  может измениться так сильно, что  $\tilde{\delta}_m^{(j+1)}$  изменит знак по сравнению с  $\delta_m^{(j)}$  и увеличится по абсолютной величине. Параметр  $HP_m^{(j)}$  в этом случае надо уменьшить. Естественно также изменить  $HP_m^{(j)}$  только для тех  $m$ , для которых не выполняются основные неравенства (1).

С учетом этих соображений предлагается параметры выбирать так:

$$HP_m^{(j+1)} = \begin{cases} HP_m^{(j)}, & \text{если } \delta_m^{(j)} = 0 \text{ или } \tilde{\delta}_m^{(j+1)} = 0, \\ \frac{HP_m^{(j)}}{2}, & \text{если } \delta_m^{(j)} \neq 0, \tilde{\delta}_m^{(j+1)} \neq 0 \text{ и} \\ |\tilde{\delta}_m^{(j+1)}| > |\delta_m^{(j)}| \text{ и } \text{sign}[\tilde{\delta}_m^{(j+1)}] = -\text{sign}[\delta_m^{(j)}], \\ 2HP_m^{(j)}, & \text{если } \delta_m^{(j)} \neq 0, \tilde{\delta}_m^{(j+1)} \neq 0 \text{ и} \\ |\tilde{\delta}_m^{(j+1)} - \delta_m^{(j)}| < \varepsilon_m, \quad m = 1, 2, \dots, M. \end{cases} \quad (27)$$

Аналогично изменяются параметры  $HQ_n^{(j)}$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ . Затем вычисляются весовые параметры

$$P_m^{(j+1)} = P_m^{(j)} + \delta_m^{(j)} H P_m^{(j+1)}, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (28)$$

$$Q_n^{(j+1)} = Q_n^{(j)} + \delta_n^{(j)} H Q_n^{(j+1)}, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

и делается  $(j+1)$  шаг итерационного процесса.

**Замечание 3.** При выборе весовых параметров  $P_m$ ,  $Q_n$  необходимо помнить о положительной определенности функционала  $K(f, f)$  (16). Если же на каком-то шаге итерационного процесса параметры  $P_m$  и  $Q_n$ , выбранные согласно формулам (28), не будут удовлетворять условию положительной определенности функционала  $K(f, f)$ , возможен следующий выход.

Решение, найденное на предыдущем шаге процесса, можно принять за начальное приближение к току, т. е. за функцию  $\tilde{j}(x)$ , и начать весь процесс сначала с нулевых параметров  $P_m^{(0)} = Q_n^{(0)} = 0$  и  $R(\lambda) = \alpha$ .

В заключение авторы пользуются случаем поблагодарить В. И. Дмитриева за постоянное внимание к работе и ценные советы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Чечкин А. В. Метод формирования амплитудной диаграммы. Настоящий сборник.

А. Г. СВЕШНИКОВ, В. М. РЕПИН

### ОПТИМИЗАЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РАЗМЕРОВ В ЗАДАЧЕ ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ЧЕРЕЗ ЩЕЛИ

Как хорошо известно, (см., например, [1]), задача дифракции волн на щелях в идеально проводящем бесконечном экране может быть сведена к решению интегрального уравнения I рода относительно распределения тангенциальных компонент вектора электрической напряженности на щелях.

Если щели соединяют два плоских волновода (рис. 1), то в случае  $H$ -поляризации ( $\vec{H} = \{0, 0, H_z\}$ ,  $\vec{E} = \{E_x, E_y, 0\}$ ) уравнение принимает следующий вид [2]:

$$\sum_{s=0}^S \int_{r_s-L_s}^{r_s+L_s} G(k|x-x_0') j(x_0') dx_0' = F(x), \quad (1)$$

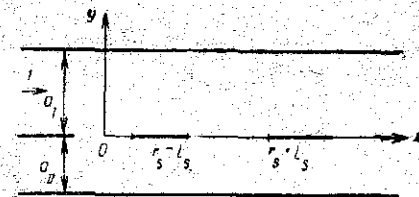


Рис. 1

где  $j(x_0) = -ikE_x$  и имеет особенность на ребрах (краях щелей) вида  $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$  ( $\rho$  — расстояние до ребра),  $F(x)$  — суперпозиция заданных нормальных волн в волноводах,

$$G(k|x-x_0|) = G_I(k|x-x_0|) + G_{II}(k|x-x_0|),$$

$$G_{I,II}(k|x-x_0|) = \frac{i}{2a_{I,II}} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\epsilon_v}{\gamma_{v,I,II}} e^{i|x-x_0|\gamma_{v,I,II}},$$

$$\epsilon_v = \begin{cases} 1, & v=0, \\ 2, & v \neq 0, \end{cases} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

$\gamma$  — длина волны,  $a_{I,II}$  — размеры волнопроводов,

$$\gamma_{v,I,II}^2 = k^2 - \left(\frac{\pi v}{a_{I,II}}\right)^2, \quad \text{Im } \gamma_{v,I,II} \geq 0,$$

$r_s$  и  $2L_s$  — координата середины и ширина  $s$ -той щели соответственно,  $S+1$  — количество щелей.



ставляет половину радиуса, а на рис. 3 — равна радиусу. Из рис. 2 видно, что при  $j < 1$  граница плазмы вогнута, а при  $j > 1$  — выпукла (для данной геометрии).

Плотность тока  $j \sim I$ , по-видимому, соответствует промежуточному случаю, когда граница содержит как вогнутые, так и выпуклые участки. Для случая, представленного на рис. 3, характерна большая выпуклость границы плазмы при тех же значениях плотности тока. Эти результаты будут вполне понятны если учесть, что торец в этом случае отодвинут на половину радиуса.

На рисунках линии, изображающие границу плазмы, не доведены до стенок цилиндра, поскольку процессы, происходящие в пристеночной области, не описываются нашей схемой и реальное положение и форма границы плазмы в окрестности стенок могут быть иными.

Наконец, на рис. 4 представлены фазовые диаграммы потока на выходе системы, соответствующие границам плазмы, изображенным на рис. 2.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1948.
2. Кирштейн П. Т., Кайно Г. С., Уотерс У. Е. Формирование электронных пучков. М., «Мир», 1970.
3. Габович М. Д. Плазменные источники ионов. Киев, «Наукова Думка», 1964.
4. Капцов Н. А. Электрические явления в газах и вакууме. М., ГИТТЛ, 1950.
5. Тихонов А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач. ДАН СССР, 154, вып. 1, 1963.
6. Волков Б. И., Свешников А. Г., Семашко Н. Н. Стационарное движение пучка заряженных частиц с учетом собственного пространственного заряда. ДАН СССР, 189, вып. V, 1969.
7. Волков Б. И., Ефимов В. В., Свешников А. Г., Семашко Н. Н. Расчет движения пучка заряженных частиц в электростатическом поле с учетом пространственного заряда (аксиально-симметричный случай). В сб. «Вычисл. методы и программирование», вып. XVI. Изд-во МГУ, 1971.
8. Волков Б. И., Свешников А. Г., Семашко Н. Н. Фокусировка потока заряженных частиц в электрическом поле с учетом пространственного заряда. ЖТФ, вып. 8, ХЛН, 1971.
9. Кузнецов Ю. Е., Сыровой В. А. О решении уравнений регулярного электростатического пучка при эмиссии с произвольной поверхности. «Прикладная механика и техническая физика», № 2, 1966.
10. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. М., «Наука», 1966.

А. С. БАРАШКОВ, В. И. ДМИТРИЕВ

#### ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ЗОНДИРОВАНИЯ ИОНОСФЕРЫ

Важной задачей электромагнитного зондирования ионосферы является определение строения ионосферы по характеристикам отразившегося от ионосферы сигнала. В настоящей работе будут доказаны теоремы единственности для некоторых постановок этой задачи.

**I. Одномерная обратная задача.** В случае вертикального зондирования ионосферы, когда искомой величиной является распределение концентрации электронов по высоте, мы имеем обратную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$y'' + (\lambda - N(z))y = 0 \quad (-\infty < z < \infty), \quad (1)$$

где  $N(z)$  — искомая непрерывная функция, причем

$$N(z) = 0, \quad z < 0,$$

$\lambda$  — любое комплексное число. Известной величиной, в частности, можно считать коэффициент отражения  $R(\nu)$ ,  $\nu$  — действительный параметр  $0 < \nu < \infty$ , который определяется следующим образом.

Рассмотрим непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1) такое, что

$$y(\lambda, z) = e^{-i\sqrt{\lambda}z} + \Phi(\lambda)e^{i\sqrt{\lambda}z} \quad (z < 0),$$

$$y(\lambda, z) \in L_2(0, \infty).$$

Для  $\sqrt{\lambda}$  выбрана ветвь, непрерывная вне луча  $0 < \lambda < \infty$  и такая, что  $\sqrt{-1} = -i$ . Тогда по определению:

$$R(\nu) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \Phi(\nu - i\gamma). \quad (2)$$

В случае, когда  $N(z) = \text{const}$  для  $z > z_0$ , это определение означает, что рассматривается решение (1), удовлетворяющее условию излучения при  $z \rightarrow \infty$ , а для  $z < 0$  представимое в виде

$$y(\nu, z) = e^{-i\sqrt{\nu}z} + R(\nu)e^{i\sqrt{\nu}z}.$$



Теорема 1. Каждой  $R(v)$ ,  $v \in D$ , где  $D$  — любой интервал луча  $(0, \infty)$ , соответствует не более одной  $N(z)$  в классе непрерывных функций.

Доказательство. Рассмотрим решение (1), принадлежащее  $L_2(0, \infty)$ . Введем функцию

$$m(\lambda) = \frac{y'_2(0, \lambda)}{y(0, \lambda)}. \quad (3)$$

Известно [1], что  $m(\lambda)$  аналитична при  $\text{Im } \lambda < 0$  и  $\text{Im } m(\lambda) < 0$ . Так как  $\Phi(\lambda)$  и  $m(\lambda)$  связаны соотношением

$$\Phi(\lambda) = -\frac{m(\lambda) + i\sqrt{\lambda}}{m(\lambda) - i\sqrt{\lambda}}, \quad (4)$$

то  $\Phi(\lambda)$  — аналитическая функция при  $\text{Im } \lambda < 0$ , причем в окрестности луча  $0 < \lambda < \infty$ ,  $\Phi(\lambda)$  ограничена. Из ограниченности  $\Phi(\lambda)$  следует [2], что предел (2) существует почти для всех  $\Phi$  и функция  $\Phi(\lambda)$  однозначно определяется своими граничными значениями на любом множестве ненулевой меры.

По функции  $\Phi(\lambda)$  из (4) единственным образом находится  $m(\lambda)$ . Известно [1], что функции  $m(\lambda)$  соответствует не более одной  $N(z)$  в классе непрерывных функций. Из этого факта уже следует утверждение теоремы.

Результат этой теоремы можно усилить, доказав единственность обратной задачи для уравнения (1) в классе кусочно-непрерывных функций, если опираться на известную теорему Тихонова [3].

**2. Обратные задачи для уравнения эйконала.** При наклонном зондировании ионосферы для расчета распространения электромагнитных волн обычно используется приближение геометрической оптики. Естественно, при этом рассматривается обратная задача по определению двумерного распределения концентрации электронов. Математически это приводит к обратной задаче определения функции  $N(x, z)$ , входящей в уравнение эйконала,

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 = \varepsilon(x, z, \lambda) = 1 - \frac{N(x, z)}{\lambda}. \quad (5)$$

Известными величинами будем считать время запаздывания и углы прихода лучей, приходящих от передатчика к приемнику. Эти величины вводятся следующим образом.

Пусть  $z(x, \lambda)$  — характеристика уравнения (5), соединяющая точку  $0 = (x=0, z=0)$ , где находится передатчик, и точку  $M = (x=L, z=0)$ , где находится приемник. Тогда время запаздывания сигнала  $t_{\text{зап}}$  и угол прихода луча  $\theta$  равен

$$t_{\text{зап}}(\lambda) = \int_0^L \frac{\sqrt{1+z_x'^2}}{\sqrt{\varepsilon(x, z(x), \lambda)}} dx, \quad (6)$$

$$\theta(\lambda) = \text{arc ctg } z'_x(L).$$

Будем считать, что искомая функция  $N(x, z)$  кусочно-одномерна. Это означает, что

$$N(x, z) = N_k(z), \quad l_{k-1} < x < l_k. \quad (7)$$

Рассмотрим вначале задачу для следующего случая:

$$N(x, z) = \begin{cases} N_1(z), & -\infty < x < l, \\ N_2(z), & l < x < \infty. \end{cases} \quad (8)$$

Предположим, что

$$N_1(z) = N_2(z) = 0 \quad \text{для } z < z_1. \quad (9)$$

Пусть в начале координат находится передатчик, а в точке  $M$  — приемник. Функцию  $N_1(z)$  считаем известной. Задача состоит в определении функции  $N_2(z)$  по известной функции  $t_{\text{зап}}(\lambda)$  или  $\theta(\lambda)$ .

Из уравнения (5) следует, что для траектории луча или, что то же, для характеристики (5) на границе раздела двух одномерных сред при  $x=l$  выполняется соотношение

$$(\lambda - N_1(z)) \frac{z_-'^2(l)}{1+z_-'^2} = (\lambda - N_2(z)) \frac{z_+'^2(l)}{1+z_+'^2} \quad (10)$$

или

$$(\lambda - N_1) \cos^2 \theta_- = (\lambda - N_2) \cos^2 \theta_+,$$

где  $\theta$  — угол между касательной к траектории и вертикально  $z$ ,  $z_-$  и  $\theta_-$ ,  $z_+$  и  $\theta_+$  означают соответствующие пределы слева и справа. Легко проверить, что характеристика (5) в случае  $N(x, z) \equiv N_0(z)$  удовлетворяет уравнению

$$z_{xx} = -(1+z'^2) \frac{N_0'(z)}{2(\lambda - N_0)}. \quad (11)$$

Предположим теперь, что вершина траектории луча (т. е. точка  $(x_0, z_0 = z(x_0))$  такая, что  $z'_x(x_0) = 0$ ) находится внутри полосы  $0 < x < l$ . Введем функцию  $\Phi(a, \lambda)$  — угол прихода луча, соответствующего параметра  $\lambda$  в точку  $(x=l, z=a)$ . Более точно функция  $\Phi(a, \lambda)$  определяется так. Рассмотрим краевую задачу для функции  $z(x, \lambda)$

$$z_{xx} = -(1+z'^2) \frac{N_1'(z)}{2(\lambda - N_1)}, \quad (12)$$

$$z(0, \lambda) = 0, \quad z(l, \lambda) = a.$$

Тогда

$$\Phi(a, \lambda) = \text{arc tg } z_x(l, \lambda). \quad (13)$$

Краевая задача (12), вообще говоря, имеет не единственное решение. Будем считать, что каким-нибудь образом выбрано одно решение — например, решение с минимальным углом прихода в точку  $(l, a)$ . От функции  $\Phi(a, \lambda)$  потребуем непрерывной дифференцируемости. Введем еще функцию  $T(a, \lambda)$  — время запаздывания луча, пришедшего в точку  $(l, a)$ ,

$$T(a, \lambda) = \int_0^l \frac{\sqrt{1+z_x^2(x, \lambda)}}{\sqrt{1-\frac{N_1(z)}{\lambda}}}, \quad (14)$$

где функция  $z(x, \lambda)$  определяется из (12). Пусть функция  $T(a, \lambda)$  дважды непрерывно дифференцируема и

$$T'_a(a, \lambda) > 0. \quad (15)$$

Покажем, что при сделанных предположениях о  $\Phi(a, \lambda)$  функция  $N_2(z)$  из (8) определяется однозначно по углам прихода лучей в точку  $(x=L, z=0)$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\Phi(a, \lambda)$  и  $\theta(\lambda)$  — непрерывно-дифференцируемые функции. Тогда существует не более одной непрерывно-дифференцируемой функции  $N_2(z)$ , соответствующей углам  $\theta(\lambda)$ .

**Доказательство.** Из уравнения (11) легко выводятся равенства

$$\int_0^{z_0(\lambda)} \frac{dz}{\sqrt{\frac{\lambda - N_2(z)}{\lambda \sin^2 \theta(\lambda)} - 1}} = L - l, \quad (16)$$

$$(\lambda - N_2(z_0(\lambda))) \sin^2 \theta_+(z_0) = \lambda \sin^2 \theta(\lambda), \quad (17)$$

$z_0(\lambda)$  обозначает ординату пересечения соответствующей траекторией прямой  $x=l$ . На траектории выполняется, кроме того, соотношение (10):

$$\lambda - N_2(z_0(\lambda)) \cos^2 \theta_+(z_0(\lambda)) = (\lambda - N_1(z_0(\lambda))) \cos^2 \Phi(z_0, \lambda),$$

где  $\Phi(z_0, \lambda) = \theta$ . Сложив это равенство с (17), получим

$$N_2(z_0(\lambda)) = \lambda - (\lambda - N_1(z_0(\lambda))) \cos^2 \Phi(z_0, \lambda) - \lambda \sin^2 \theta(\lambda). \quad (18)$$

Так как  $\Phi(z_0, \lambda)$ ,  $N_1(z)$ ,  $\theta(\lambda)$  — известные функции, то (18) можно записать в виде

$$N_2(z_0(\lambda)) = f(z_0(\lambda), \lambda),$$

где  $f(z, \lambda)$  — известная непрерывно-дифференцируемая функция. Напомним, что

$$N_2(z) = 0 \quad \text{для } z < z_1.$$

Ясно, что

$$z_0(0) = (L-l) \text{ctg } \theta(0) < z_1.$$

Перепишем уравнение (18), заменив  $N_2(z)$  его выражением из (19) и введя новую переменную интегрирования  $\xi$

$$\int_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{\frac{\lambda - N_2(z)}{\lambda \sin^2 \theta(\lambda)} - 1}} = z_0(0) \text{ctg } \theta(\lambda) + \int_{z_0(0)}^{z_0(\lambda)} \frac{dz(\xi)}{\sqrt{\frac{\lambda - f(z(\xi), \xi)}{\lambda \sin^2 \theta(\lambda)} - 1}} = L - l.$$

Последнее уравнение можно переписать в виде

$$\int_0^\lambda G(\lambda, \xi, z(\xi)) z'(\xi) d\xi = \Omega(\lambda), \quad (20)$$

где  $G, \Omega, z$  — непрерывно-дифференцируемые функции своих аргументов и  $G(\lambda, \lambda, z) \neq 0$ . Если мы сумеем показать, что (20) имеет не более одного решения, то тем самым теорема будет доказана.

Предположим, что это не так. Пусть  $z_1(\xi)$  и  $z_2(\xi)$  — решения уравнения (20), причем

$$z_1(\xi) = z_2(\xi) \quad \text{для } \xi \leq \lambda_1,$$

$$z_1(\xi) \neq z_2(\xi) \quad \text{для } \xi > \lambda_1.$$

Функции  $G_1 \frac{\partial G}{\partial \lambda}$  удовлетворяют условию Липшица

$$|G(\lambda, \xi, z_1) - G(\lambda, \xi, z_2)| < K_1 |z_1 - z_2|,$$

$$|G_\lambda(\lambda, \xi, z_1) - G_\lambda(\lambda, \xi, z_2)| < K_2 |z_1 - z_2|.$$

Учитывая этот факт, а также равенство

$$z_1(\xi) - z_2(\xi) = \int_{\lambda_1}^\xi (z_1'(x) - z_2'(x)) dx,$$

получаем следующую оценку:

$$|z_1'(\lambda) - z_2'(\lambda)| < K(\lambda - \lambda_1) \max |z_2' - z_2'(\xi)|. \quad (21)$$

$$\lambda_1 < \xi < \lambda$$

Выберем  $\lambda$  настолько близким к  $\lambda_1$ , чтобы выполнялось неравенство

$$K(\lambda - \lambda_1) < \frac{1}{2}.$$

Пусть  $\lambda_0$  — точка внутри выбранного отрезка, в которой величина  $|z_1'(\xi) - z_2'(\xi)|$  достигает максимума. Тогда по (21)

$$|z_1(\lambda_0) - z_2(\lambda)| \leq \frac{1}{2} |z_1(\lambda_0) - z_2(\lambda_0)|,$$

т. е.

$$z_1(\xi) = z_2(\xi) \quad \text{для } \xi \leq \lambda.$$

Полученное противоречие доказывает теорему. Аналогично, путем сведения задачи к уравнению, похожему на (20), может быть доказана следующая теорема.

**Теорема 3.** Пусть  $T(a, \lambda)$  и  $t(\lambda)$  — непрерывно-дифференцируемые функции, причем  $T_a(a, \lambda) > 0$ . Тогда существует не более одной непрерывно-дифференцируемой функции  $N_2(z)$ , соответствующей времени запаздывания  $t(\lambda)$ .

Рассмотрим теперь более общую задачу. Пусть в точках  $L_0$  и  $L_n$  находятся передатчики, а в точках  $L_1, L_2, \dots, L_{n-1}$ , расположенных между  $L_0$  и  $L_n$ , — приемники. Пусть  $N(x, z)$  — кусочно-одномерная функция, т. е.  $N(x, z) = N_n(z)$  для  $l_{n-1} < x < l_n$ , где  $l_0 = -\infty, l_{n+1} = +\infty$

$$L_{i-1} < l_i < L_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Покажем, что по данным наклонного зондирования, соответствующим двум передатчикам, функции  $N_n(z)$  восстанавливаются однозначно.

Для доказательства нам потребуется следующая лемма.

**Лемма.** Пусть

$$N(x, z) = \begin{cases} N_1(z), & x < 0, \\ N_2(z), & x > 0. \end{cases}$$

Причем  $N_1$  — известная функция, а  $N_2(z)$  известна для  $z < z_0$ . Пусть на прямой  $x=0$  задана функция  $\Phi(z, \lambda)$  или  $T(z, \lambda)$ , аналогичные таким же функциям из теорем 2 и 3 (угол прихода или время запаздывания в точку  $(0, z)$  для параметра  $\lambda$ ). Кроме того, считаем известными на прямой  $x=l$  гладкие функции  $a(\lambda) = z(l, \lambda)$  и  $\theta(\lambda)$  или  $a(\lambda) = z(l, \lambda)$  и  $t(\lambda)$ . Это означает, что луч, соответствующий параметру  $\lambda$ , приходит в точку  $(l, a(\lambda))$  под углом  $\theta(\lambda)$  или со временем запаздывания  $t(\lambda)$ .

При выполнении всех этих условий функция  $N_2(z)$  для  $z > z_0$  определяется по функциям  $a(\lambda), \theta(\lambda)$  или  $a(\lambda), t(\lambda)$  однозначно.

Доказательство леммы дословно повторяет доказательство теорем 2 и 3, надо только в соответствующих уравнениях заменить нижний предел 0 на  $a(\lambda)$  и вместо функции  $\lambda \sin^2 \theta(\lambda)$  писать  $(\lambda - N_2(a(\lambda))) \sin^2 \theta(\lambda)$ . Относительно последней замены отметим, что, так как для участвующей в доказательстве теорем функции  $z(\lambda)$  выполняется условие

$$z(\lambda) > a(\lambda),$$

то  $N_2(a(\lambda))$  — известная функция.

Переходим к решению сформулированной задачи.

**Теорема 4.** Пусть  $N(x, z)$  — кусочно-одномерная функция, т. е.

$$N(x, z) = N_k(z) \quad \text{для } l_{k-1} < x < l_k.$$

Пусть  $N_0(z)$  и  $N_n(z)$  — известные функции, а для точек  $L_i$  известны либо  $\theta_i^{1,2}(\lambda)$ , либо  $t_i^{1,2}(\lambda)$ . Верхние индексы относятся соответственно к левому и правому передатчикам. Пусть функции  $\Phi_i^{1,2}(a, \lambda)$  и  $T_i^{1,2}(a, \lambda)$  (углы прихода и времена запаздывания луча в точку  $(l_i, a)$ ) дважды дифференцируемы, причем

$$\frac{\partial}{\partial a} T_i(a, \lambda) > 0.$$

Тогда любому набору гладких функций  $\theta_i^{1,2}(\lambda)$  или  $t_i^{1,2}(\lambda)$  соответствует не более одного набора функций  $N_1, N_2, \dots, N_{n-1}(z)$ .

**Доказательство.** Пусть  $N_0(z)$  известна для  $z < M_0$ . Рассмотрим данные, соответствующие левому передатчику, в точке  $L_1$ . По лемме, функция  $N_1(z)$  восстанавливается для  $z \leq M_{1,0} < M_0$  ( $M_{1,0}$  меньше  $M_0$  потому, что вершина траектории лежит вне полосы  $l_1 < x < L_1$ ). Так как теперь  $N_1(z)$  известна, то по той же лемме  $N_2(z)$  восстанавливается однозначно для  $z \leq M_{2,0} < M_{1,0}$ . Продолжая тот же процесс, получаем, что  $N_i(z)$  однозначно восстанавливается для  $z \leq M_{i,0} < M_{i-1,0}$ .

Пусть  $N_n(z)$  известна для  $z < M_n$ . Используя данные, соответствующие правому передатчику, получаем, что  $N_i(z)$  однозначно восстанавливается для  $z \leq M_{i,0}^2 < M_{i+1,0}^2 < M_n$ . Обозначим

$$M_{i,0} = \max(M_{i,0}^1, M_{i,0}^2).$$

Тогда функция  $N_i(z)$  известна для

$$z < M_{i,0}.$$

Пусть

$$M_{i,0} = \min(M_{i,0}) \quad (1 \leq i \leq n-1).$$

Тогда

$$M_{i_0+1,0} > M_{i_0,0}, \quad M_{i_0-1,0} > M_{i_0,0}.$$

Рассмотрим данные, соответствующие левому передатчику в точке  $L_{i_0+1}$ . Так как функция  $N_{i_0+1}$  известна для  $z < M_{i_0+1,0}$ , то можно данные, известные для точки  $L_{i_0+1,0}$ , пересчитать на прямую  $x = l_{i_0+1}$ . Теперь мы находимся в условиях леммы, поэтому функция  $N_{i_0+1}(z)$  однозначно восстанавливается для  $z < M_{i_0,1}$ , где  $M_{i_0,1} > M_{i_0,0}$ .

Используя лемму, восстановим и все остальные функции  $N_i(z)$  для  $z < M_{i,1}$ , причем  $M_{i,1} > M_{i_0}$ .

Опять найдем

$$M_{i,1} = \min_{1 \leq i < n} M_{i,1}$$

и проделаем все то, что было сделано после нахождения  $M_{i_0,0}$ . В результате определим каждую функцию  $N_i(z)$  на более широком отрезке  $(0, M_{i,2})$ , где  $M_{i,2} > M_{i,1}$ .

Продолжая этот процесс, можно восстановить все функции  $N_i(z)$  единственным образом в той области, в которой позволяют это сделать начальные данные. Заметим, что заранее, не проделывая указанных операций, невозможно указать области, в которых они восстанавливаются единственным образом.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Титчмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, 1. М., ИЛ, 1960.
2. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. ГИТТЛ, 1950.
3. Тихонов А. Н. К математическому обоснованию теории электромагнитных зондирований. ЖВМ и МФ, 5, № 3; 1965.