

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

(Численные методы  
в задачах электродинамики)

XXIV

СБОРНИК РАБОТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА  
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Под редакцией  
В. И. ДМИТРИЕВА  
и А. С. ИЛЬИНСКОГО

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
1975

## *Из содержания Т.24, 1975г.,*

<i>А. П. Александров, В. И. Дмитриев.</i> О задаче Коши для уравнений Максвелла в анизотропной проводящей среде.	<b>23</b>
<i>Е. В. Захаров.</i> О единственности и существовании решений интегральных уравнений электродинамики неоднородных сред.	<b>37</b>
<i>Е. В. Захаров, Н. И. Несмеянова.</i> Метод решения осесимметричных задач электродинамики неоднородных сред.	<b>43</b>
<i>С. Н. Воеводина.</i> Клеточно-теплицевы матрицы и интегральные уравнения Фредгольма.	<b>91</b>
<i>С. Н. Воеводина.</i> Решение системы уравнений с клеточно-теплицевыми матрицами.	<b>94</b>
<i>В. И. Дмитриев, Н. А. Мерщикова.</i> Исследование магнитотеллурического зондирования градиентных сред.	<b>123</b>
<i>В. И. Дмитриев, Т. С. Хрычикова.</i> О влиянии изменения мощности поверхностного слоя на глубинное магнитотеллурическое зондирование.	<b>130</b>
<i>Н. В. Гущина, В. И. Дмитриев, Л. Л. Ваньян.</i> Электрическое поле постоянного тока в неоднородной гиротропной плоскости.	<b>136</b>
<i>В. И. Дмитриев, Т. С. Моисеева, О. А. Скугаревская, Э. А. Федорова.</i> Некоторые особенности электромагнитного поля электрического диполя в высокоомных разрезах.	<b>143</b>
<i>С. Г. Костянев.</i> Поле постоянного тока в градиентных средах.	<b>156</b>

58. Шестопапов В. П., Масалов С. А., Сологуб В. Г. Дифракция плоской электромагнитной волны на решетке из брусьев круглого сечения. Препринт № 15. Изд. ИРЭ АН КССР. Харьков, 1972.
59. Van den Berg P. M. Appl. Sci. Res., 26, 1972.
60. Галишникова Т. Н., Ильинский А. С. Настоящий сборник.
61. Chang V. W. H. Proc. IEEE, 56, 1, 1968.
62. Васильев Е. Н., Серегина А. Р., Седельникова Э. В. «Радиотехника и электроника», № 9, 1974.
63. Ильинский А. С. ЖВМ и МФ, 12, 6, 1972.
64. Лидский В. Б. Разложение по собственным функциям, связанным с дифференциальными уравнениями II порядка, т. II. М., ИЛ, 1961.
65. Свешников А. Г., Ильинский А. С. ЖФМ и МФ, 8, 960, 1968.
66. Ильинский А. С. Настоящий сборник.

**А. П. АЛЕКСАНДРОВ, В. И. ДМИТРИЕВ**

## **О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В АНИЗОТРОПНОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ**

### **ВВЕДЕНИЕ**

При решении задач электродинамики сплошных сред часто встречаются случаи, характеризующиеся большим значением одного или нескольких параметров среды, непосредственно входящих в систему уравнений Максвелла. Подобная специфика, как правило, вызывает интересные эффекты, рассмотрение которых в чистом виде возможно лишь при идеализированной постановке исходной задачи, как задачи в некоторой предельной среде. К числу возникающих таким образом задач относится, например, задача дифракции на идеальном проводнике; в качестве предельной среды здесь выступают сами идеальные проводники. Корректность понятия предельной среды требует, однако, своего доказательства. Речь идет о доказательстве сходимости (в том или ином смысле) решения как функции параметра среды, при его бесконечном увеличении, к решению некоторой другой, предельной задачи.

В настоящей работе рассматриваются вопросы сходимости, асимптотики и постановки предельной задачи, возникающей из задачи Коши для уравнений Максвелла, в среде с высокой проводимостью вдоль заданного поля направлений, при бесконечном увеличении проводимости. Среда предполагается заполняющей все пространство. Реальным прообразом такой среды является, например, холодная плазма магнитосферы Земли, неоднородно замагниченная геомагнитным полем.

Мы принимаем плотность тока проводимости равной

$$j_{\text{пр}} = \sigma p(x) I(E, I).$$

Здесь  $\sigma$  — большой положительный параметр;

$p(x)$  — ограниченная измеримая комплекснозначная функция, множество нулей которой имеет меру нуль, и удовлетворяющая неравенству  $\text{Re } p(x) \leq 0$ ;

$I(x)$  — единичный вектор, задающий поле направлений, бесконечно дифференцируемый во всем пространстве;

$E$  — вектор электрического поля.

Нас интересует сходимость при  $\sigma \rightarrow +\infty$  решения следующей задачи Коши ( $\varepsilon = \mu = 1$  для простоты):

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \rho(x) \mathbf{I}(\mathbf{E}, \mathbf{I}), \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \end{cases} \quad (1)$$

с начальными условиями  $\mathbf{E}|_{t=0} = \mathbf{E}_0$ , причем  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{I}) = 0$  и  $\mathbf{H}|_{t=0} = \mathbf{H}_0$ , которые мы предположим достаточно гладкими и квадратично интегрируемыми во всем пространстве. Интересен также вопрос о существовании предела

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \sigma \rho(x) \mathbf{I}(\mathbf{E}, \mathbf{I}) = \mathbf{I}.$$

Ясно, что если этот предел существует, то мы должны принять в предельной задаче условие  $(\mathbf{E}, \mathbf{I}) = 0$ , вследствие чего напращивается также постановка предельной задачи: отыскать ток  $\mathbf{I}$ , параллельный  $\mathbf{I}$ , такой, чтобы решение неоднородной задачи Коши

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{I}, & \mathbf{E}|_{t=0} = \mathbf{E}_0, \quad (\mathbf{E}_0, \mathbf{I}) = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, & \mathbf{H}|_{t=0} = \mathbf{H}_0 \end{cases} \quad (2)$$

удовлетворяло условию  $(\mathbf{E}, \mathbf{I}) = 0$  при  $t \geq 0$ . В свою очередь, условие  $(\mathbf{E}, \mathbf{I}) = 0$  можно рассматривать как уравнение для определения тока  $\mathbf{I}$ , если выразить  $\mathbf{E}$  через  $\mathbf{I}$ , воспользовавшись формулами для решения неоднородной задачи Коши. Тем самым вся задача сводится к скалярному уравнению для тока  $\mathbf{I}(t, x)$ . В дальнейшем будет доказана корректность такой постановки предельной задачи. Прежде чем переходить к доказательствам, заметим, что в уравнениях (2) ток  $\mathbf{I}$  легко исключается:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}_{\perp} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}}{\partial t}, & \mathbf{E}_{\perp}|_{t=0} = \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{0\perp}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_{\perp} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, & \mathbf{H}|_{t=0} = \mathbf{H}_0. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь мы применяем обозначение  $f_{\perp} = f - l(f, \mathbf{I})$ .

### § 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В $L_2$

Будем обозначать символом  $L_2$  гильбертово пространство измеримых вектор-функций  $x = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}$  с нормой

$$\|x\| = \left( \int (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2) dv \right)^{1/2} < \infty.$$

Перепишем (1) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{rot} \\ -\operatorname{rot} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} - \sigma \rho(x) \begin{pmatrix} l(\cdot, \mathbf{I}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \\ &= A x + \sigma B x; \quad x|_{t=0} = x_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Мы ввели операторы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{rot} \\ -\operatorname{rot} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = -\rho(x) \begin{pmatrix} l(\cdot, \mathbf{I}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко понять, что оператор  $A$  является антисамосопряженным на области определения  $D(A) \subset L_2$ , состоящей из векторов  $\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} \subset L_2$ ,

для которых вектор  $\begin{pmatrix} \operatorname{rot} \mathbf{H} \\ -\operatorname{rot} \mathbf{E} \end{pmatrix}$ , понимаемый как обобщенная функция, регулярен и принадлежит  $L_2$ . Оператор  $B$  является ограниченным диссипативным:  $\operatorname{Re}(Bx, x) \leq 0$ . С оператором  $B$  естественно связан ортопроектор  $P$ :

$$P = \begin{pmatrix} l(\cdot, \mathbf{I}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно,  $B = PBP$ . Введем также дополнительный проектор  $Q = 1 - P$ . Пространства, на которые проектируют  $P$  и  $Q$ , будем обозначать  $PL$  и  $QL_2$  соответственно. Очевидно также, что оператор  $A + \sigma B$  является максимальным диссипативным оператором и, следовательно (см., например, [1]), его можно рассматривать в качестве производящего оператора сильно непрерывной полугруппы сжимающих операторов в  $L_2$ , которую мы будем обозначать  $U_{\sigma}(t)$ . Другими словами, решение задачи (4) при  $x_0 \in D(A) = D(A + \sigma B)$  существует и выражается формулой  $x(t) = U_{\sigma}(t)x_0$ . Следует оговорить, конечно, что  $x(t)$  не является обычным классическим решением (4). Наш вопрос состоит, следовательно, в выяснении сходимости полугруппы  $U_{\sigma}(t)$  при  $\sigma \rightarrow \infty$ .

Уравнение (3) можно переписать как уравнение в пространстве  $QL_2$ :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{\perp} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = QAQ \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{\perp} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{rot}_{\perp} \mathbf{H} \\ -\operatorname{rot} \mathbf{E}_{\perp} \end{pmatrix}.$$

Такая запись подсказывает, что решение предельной задачи Коши порождается полугруппой  $V(t)$  в пространстве  $QL_2$ , т. е. удовлетворяющей условию  $V(t) = QV(t)Q$ , производящий оператор которой является некоторым расширением оператора  $QAQ$ . Займемся поэтому оператором  $QAQ$ . Во-первых, этот оператор имеет всюду

плотную область определения (в метрике пространства  $L_2$ ). Во-вторых, очевидно, что оператор  $iQAQ$  симметрический и, следовательно, допускает симметрическое замыкание

$$i\overline{QAQ} \leq (iQAQ)^* = (i\overline{QAQ})^* \text{ или } \overline{QAQ} \leq -\overline{QAQ}^*. \quad (5)$$

**Теорема.** Если первые производные вектора  $l$  равномерно ограничены во всем пространстве  $\left| \frac{\partial l}{\partial x_k} \right| \leq L = \text{const}$ , то оператор  $\overline{QAQ}$  антисамосопряжен:  $\overline{QAQ} = -\overline{QAQ}^*$ .

Доказательству теоремы предположим лемму.

**Лемма.** Область определения оператора  $QAQ$   $D(QAQ)$  совпадает с множеством  $x \in L_2$ , для которых обобщенная (вектор-) функция  $QAQx$  регулярна и принадлежит  $L_2$ .

Доказательство леммы. Если  $x \in D(\overline{QAQ})$  и  $\overline{QAQ}x = y$ , то существует последовательность векторов  $x_n \in D(QAQ)$ , сходящаяся к  $x$ , такая, что  $QAQx_n$  сходится к  $y$ . В частности, если  $\varphi \in D$ , где  $D$  — множество основных вектор-функций (финитных, класса  $C^\infty$ ), то имеем

$$\lim(x_n, \varphi) = (x, \varphi), \quad \lim(QAQx_n, \varphi) = (y, \varphi), \quad (6)$$

т. е. из сильной сходимости в  $L_2$  следует сходимость в смысле теории обобщенных функций. Поскольку  $QAQ$ , как дифференциальный оператор с гладкими коэффициентами, непрерывен в  $D$ , то из сходимости  $x_n \rightarrow x$  в  $D'$  вытекает сходимость  $QAQx_n \rightarrow QAQx$  также в смысле сходимости в пространстве обобщенных функций и в силу полноты  $D'$  предел  $QAQx \in D'$ . С другой стороны, из (6) следует, что  $QAQx$  является регулярной функцией и  $QAQx = y \in L_2$ . Обратно, пусть при некотором  $x \in L_2$  обобщенная функция  $y = QAQx$  регулярна и принадлежит  $L_2$ . Построим последовательность  $x_n \in L_2$ , такую, что  $x_n \rightarrow x$ ,  $QAQx_n \rightarrow y$  в метрике  $L_2$ . Это будет означать, что  $x \in D(\overline{QAQ})$ , что завершит доказательство леммы. Итак, пусть  $x = \left( \frac{E}{H} \right)$ . Тогда

$$QAQx = \begin{pmatrix} \text{rot}_\perp \mathbf{H} \\ -\text{rot } \mathbf{E}_\perp \end{pmatrix} = y \in L_2.$$

Возьмем  $\delta$ -образную последовательность функций

$$\delta_n(x) = \left( \sqrt{\frac{n}{\pi}} \right)^3 e^{-nx^2} = \delta_n(x_1) \cdot \delta_n(x_2) \cdot \delta_n(x_3), \quad (x = (x_1, x_2, x_3))$$

и построим с помощью свертки сглаженные векторы  $\mathbf{H}^{(n)} = \delta_n * \mathbf{H}$ . Легко видеть, что  $\mathbf{H}^{(n)} \rightarrow \mathbf{H}$  в метрике  $L_2$ . Если мы докажем, что аналогично сходится  $\text{rot}_\perp \mathbf{H}^{(n)} \rightarrow \text{rot}_\perp \mathbf{H}$ , то в качестве последовательности  $x_n$  можно будет взять  $x_n = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H}^{(n)} \end{pmatrix}$ .

Имеем:

$$\begin{aligned} \text{rot}_\perp \mathbf{H}^{(n)}(x) &= \left( \int \delta_n(x-y) \text{rot } \mathbf{H} d^3y \right)_\perp = \\ &= \int \delta_n(x-y) \{ \text{rot } \mathbf{H} - l(x) (\text{rot } \mathbf{H}(y), l(x)) \} d^3x, \end{aligned} \quad (7)$$

причем интеграл понимается в смысле теории обобщенных функций (здесь  $\text{rot } \mathbf{H}$  — обобщенная функция). Разделим  $\text{rot } \mathbf{H}$  на регулярную и сингулярные части:  $\text{rot } \mathbf{H}(y) = \text{rot}_\perp \mathbf{H} + l(y) (\text{rot } \mathbf{H}, l(y))$ . Подставляя в (7), получим

$$\begin{aligned} \text{rot}_\perp \mathbf{H}^{(n)}(x) &= \int \delta_n(x-y) \{ \text{rot}_\perp \mathbf{H} - l(x) (\text{rot}_\perp \mathbf{H}, l(x)) \} d^3y + \\ &+ \int \delta_n(x-y) \{ l(y) - l(x) (l(y), l(x)) \} (\text{rot } \mathbf{H}, l(y)) d^3y. \end{aligned}$$

Поскольку  $\text{rot}_\perp \mathbf{H} \in L_2$ , первый интеграл сильно сходится к  $\text{rot}_\perp \mathbf{H}$ . Покажем, что второй интеграл сходится к нулю. Заметим, что этот интеграл ортогонален к  $l(x)$ , поэтому если его умножить векторно на  $l(x)$ , мы, не изменяя модуля интеграла, упростим его:

$$\int \delta_n(x-y) [l(x), l(y)] (\text{rot } \mathbf{H}, l(y)) d^3y = A_n(\mathbf{H}).$$

Покажем, что определяемые этой формулой операторы  $A_n$  сильно сходятся к нулю. На плотном множестве финитных векторов  $\mathbf{H}$  сходимость к нулю очевидна, так как тогда  $\text{rot } \mathbf{H} \in L_2$ . Следовательно, достаточно показать, что нормы  $A_n$  равномерно по  $n$  ограничены:  $|A_n(\mathbf{H})| \leq M \cdot |\mathbf{H}|$ . Более того, достаточно доказать это неравенство для случая, когда вектор  $\mathbf{H}$  имеет одну ненулевую декартову компоненту, скажем  $\mathbf{H}_1$ . В этом случае, после интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} A_n(\mathbf{H}) &= \int \mathbf{H}_1(y) \left[ l(x), \frac{\partial}{\partial y_2} (l_3(y) l(y) \delta_n(x-y) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial y_3} (l_2 \cdot l \delta_n(x-y))) \right] d^3y. \end{aligned}$$

Ядро этого оператора

$$\begin{aligned} K_n(x, y) &= \left[ l(x), \frac{\partial}{\partial y_2} (l_3 \cdot l) - \frac{\partial}{\partial y_3} (l_2 \cdot l) \right] \delta_n(x-y) + \\ &+ \left[ l(x), l_3 l(y) \frac{\partial \delta_n}{\partial y_2} - l_2 l(y) \frac{\partial \delta_n}{\partial y_3} \right] = K_n^{(1)} + K_n^{(2)}. \end{aligned}$$

Ядра  $K_n^{(1)}$  ввиду условия  $|\partial l / \partial x_k| \leq L$  порождают равномерно ограниченные операторы. Дифференцируя  $\delta_n(x-y)$ , получим выражение для  $K_n^{(2)}$ :  $K_n^{(2)} = 2n \delta_n(x-y) \{ l_3(y) \cdot (x_2 - y_2) - l_2(y) \cdot (x_3 - y_3) \} [l(x), l(y)]$ .

Опять же в силу условия  $\left| \frac{\partial l}{\partial x_k} \right| \leq L$  имеем разложение

$$l(x) = l(y) + \sum_{k=1}^3 L_k(x, y)(x_k - y_k),$$

где  $L_k$  — ограниченные непрерывные вектор-функции  $|L_k| \leq L$ . После подстановки этого разложения в выражение для  $K_n^{(2)}$  задача сведется к следующей. Доказать, что ядра вида  $M_n = n\delta_n(x-y)(x_k - y_k) \times (x_s - y_s)F(x, y)$ , где  $F(x, y)$  — ограниченная непрерывная функция  $|F(x, y)| \leq \text{const}$ , порождают равномерно по  $n$  ограниченные операторы. Имеем

$$\begin{aligned} |M_n f|(x) &= \left| \int M_n(x, y) f(y) d^3 y \right| \leq \\ &\leq \text{const} \cdot \int n\delta_n(x-y) |x_k - y_k| \cdot |x_s - y_s| |f(y)| d^3 y, \end{aligned}$$

и, следовательно, достаточно показать, что ядра вида  $n\delta_n(x-y) |x_k - y_k| \cdot |x_s - y_s|$  порождают равномерно ограниченные операторы. Это уже легко сделать. Достаточно проверить ограниченность преобразования Фурье функции  $n\delta_n(x) \cdot |x_k| \cdot |x_s|$ :

$$\begin{aligned} \left| \int n\delta_n(x) |x_k| |x_s| e^{ipx} d^3 x \right| &\leq \\ &\leq n \left( \sqrt{\frac{n}{\pi}} \right)^3 \int e^{-nx^2} |x_k| |x_s| d^3 x = \\ &= \frac{1}{(\sqrt{\pi})^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} |x_k| |x_s| d^3 x. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Как уже отмечалось, имеет место включение

$$\overline{QAQ} \leq -QAQ^*.$$

Докажем включение в обратную сторону. Оператор  $QAQ$ , как легко проверить, удовлетворяет на гладких функциях  $\varphi, \psi \in D$  тождеству  $(QAQ\varphi, \psi) = -(\varphi, QAQ\psi)$ . Это тождество с помощью предельного перехода можно усилить:

$$(QAQ\varphi, y) = -(\varphi, QAQy). \quad (8)$$

Здесь  $y$  — функция из  $L_2$ , так что  $QAQy$  — обобщенная функция. Пусть теперь  $y \in D(\overline{QAQ}^*)$ . Это означает, в частности, что  $(QAQ\varphi, y) = (\varphi, \overline{QAQ}^*y)$  при любом  $\varphi \in D$ . Следовательно, ввиду (8)  $QAQy = -QAQ^*y$ , т. е. обобщенная функция  $QAQy$  регулярна.

и принадлежит  $L_2$ , а это в силу леммы означает, что  $y \in D(\overline{QAQ})$  и  $QAQy = \overline{QAQ}y = -QAQ^*y$ . Ввиду произвольности  $y \in D(\overline{QAQ}^*)$  имеем  $-\overline{QAQ} \leq QAQ$ . Теорема доказана.

## § 2. ТЕОРЕМА О СХОДИМОСТИ ПОЛУГРУПП

В этом параграфе мы будем проводить рассуждения в абстрактном гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ . Пусть  $A$  — максимальный диссипативный оператор,  $B$  — ограниченный диссипативный оператор. Тогда  $A + \sigma B$  является производящим оператором сжимающей полугруппы  $U_\sigma(t)$ . Известно также [1], что при  $\text{Re} \lambda > 0$  существует резольвента  $R(\lambda, A + \sigma B)$ , норма которой не превосходит  $1/\text{Re} \lambda$ . Будем предполагать, что существует ортопроектор  $P$ , такой что  $B = PBP$ . Положим, как и раньше,  $Q = 1 - P$ .

Лемма. Если оператор  $B$  отображает  $D(A)$  на множество, плотное в пространстве  $P\mathcal{H}$ , и если оператор  $QAQ$  имеет максимальное диссипативное замыкание, то резольвента  $R(\lambda, A + \sigma B)$  сильно сходится к псевдорезольвенте  $R(\lambda, \overline{QAQ})Q$ :

$$R(\lambda, A + \sigma B) \xrightarrow{s} R(\lambda, \overline{QAQ})Q.$$

Доказательство. Из второго резольвентного тождества имеем при  $x \in \mathcal{H}$

$$R(\lambda, A + \sigma B)BR(\lambda, A)x = \frac{1}{\sigma} (R(\lambda, A) - R(\lambda, A + \sigma B))x.$$

Отсюда видно, что существует сильный предел

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} R(\lambda, A + \sigma B)BR(\lambda, A)x = 0.$$

Если  $x$  пробегает  $\mathcal{H}$ , то, как известно,  $R(\lambda, A)x$  пробегает  $D(A)$ , и, следовательно, в силу условия леммы  $BR(\lambda, A)x$  пробегает множество векторов, плотное в  $P\mathcal{H}$ . Вследствие равномерной ограниченности резольвент  $R(\lambda + \sigma B)$ , отсюда следует сильная сходимость  $R(\lambda, A + \sigma B)P$  к нулю:

$$s\text{-}\lim_{\sigma \rightarrow \infty} R(\lambda, A + \sigma B)P = 0.$$

Теперь используем тождество  $R(\lambda, A + \sigma B)Qx - R(\lambda, \overline{QAQ})Qx = -R(\lambda, A + \sigma B)PAQR(\lambda, \overline{QAQ})Qx$ , которое справедливо, когда  $x$  пробегает множество векторов вида  $x = (QAQ - \lambda)y$ ,  $(y \in D(A) \cap Q\mathcal{H})$ . Это множество является плотным в  $Q\mathcal{H}$  вследствие максимальной диссипативности оператора  $\overline{QAQ}$  [1]. Из написанного тождества видно, что правая часть сходится к нулю при  $\sigma \rightarrow \infty$ . Следовательно,  $R(\lambda, A + \sigma B)Qx \rightarrow R(\lambda, \overline{QAQ})Qx$  на плотном множестве векторов  $x$  из  $Q\mathcal{H}$ . В силу равномерной ограниченности резольвент от-

сюда следует сильная сходимость  $R(\lambda + \sigma B)Q \rightarrow R(\lambda, \overline{QAQ})Q$ .

Вместе с результатом  $R(\lambda, A + \sigma B)P \rightarrow 0$  это доказывает лемму.

**Теорема.** Существует сильный предел  $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} U_\sigma(t)Qx = V(t)x$ , где  $x \in \mathcal{H}$ ,  $V(t)$  — сжимающая полугруппа в пространстве  $Q\mathcal{H}$  (т. е. удовлетворяющая условию  $V(t) = QV(t)Q$ ) с производящим оператором  $\overline{QAQ}$ . Сходимость равномерна по  $t$  на любом конечном интервале.

Мы не будем здесь доказывать эту теорему, так как это было бы почти дословным повторением доказательства основной теоремы в теории аппроксимаций полугрупп в банаховом пространстве ([2], стр. 622, теорема 2.16), выводящей сильную сходимость последовательности квазиограниченных полугрупп из сильной сходимости резольвент производящих операторов этих полугрупп, в предположении, что предел резольвент также является резольвентой оператора, порождающего квазиограниченную полугруппу. Наш случай отличается тем, что резольвенты сходятся к псевдорезольвенте, но это препятствие легко обойти, видоизменив тождество, на котором основывается доказательство упомянутой теоремы:

$$R(\lambda, A + \sigma B)\{V(t) - u_\sigma(t)Q\}R(\lambda, \overline{QAQ})Qx = \\ = \int_0^t u_\sigma(t - \tau)\{R(\lambda, A + \sigma B) - R(\lambda, \overline{QAQ})\}V(\tau)x d\tau.$$

В остальном доказательство проводится так же, как и в [2]. В электродинамической задаче, которой мы занимаемся, все условия этого параграфа выполняются, и, следовательно, доказано, что решение задачи Коши (1) сходится в метрике  $L_2$  к решению задачи Коши (3). Более того, полугруппа  $V(t)$  в силу антисамосопряженности  $\overline{QAQ}$  унитарна, что приводит к закону сохранения энергии  $|V(t)x|^2 = |x|^2$  или

$$\int (|E_\perp|^2 + |H|^2) dV = \text{const.}$$

### § 3. СУЩЕСТВОВАНИЕ ГЛАДКОГО РЕШЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ. ЛОКАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

Применим к задаче Коши с гладкими начальными условиями

$$\begin{cases} \text{rot}_\perp H = \frac{\partial E_\perp}{\partial t}, & E_\perp|_{t=0} = \varphi_\perp \in D, \\ \text{rot} E_\perp = -\frac{\partial H}{\partial t}, & H|_{t=0} = \psi \in D \end{cases} \quad (9)$$

теорему Фридрихса ([3], стр. 916).

**Теорема.** Пусть  $n \geq 1$ ,  $m \geq 1$ , а  $A_i(x, t)$  и  $B(x, t)$  — семейство  $m \times m$  матриц ( $x \in R^n$ ,  $t \in R^1$ ,  $(x, t) \in R^{n+1}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ), бесконечно дифференцируемых в  $R^{n+1}$ . Предположим, что  $A_i(x, t)$  равномерно ограничены и эрмитовы при  $(x, t) \in R^{n+1}$ . Пусть  $V_0(x)$  есть  $m$ -векторнозначная функция, определенная и бесконечно дифференцируемая в  $R^n$ . Тогда существует единственная  $m$ -векторнозначная функция  $V(x, t)$ , определенная и бесконечно дифференцируемая в  $R^{n+1}$ , такая, что

$$(a) \quad \frac{\partial}{\partial t} V(x, t) = \sum_{i=1}^n A_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} V(x, t) + B(x, t)V(x, t), \quad (x, t) \in R^{n+1};$$

$$(б) \quad V(x, 0) = V_0(x), \quad x \in R^n.$$

Проверим, что условия теоремы выполнены. Перепишем (9) в форме уравнений для шестикомпонентной вектор-функции:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{rot}_\perp H \\ -\text{rot} E_\perp \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} \varphi_\perp \\ \psi \end{pmatrix} \in D. \quad (10)$$

Очевидно, из этих уравнений следует  $(E, H) = 0$ . Поэтому решения (9) и (10) совпадают. В свою очередь, система (10) может быть записана в виде задачи Коши для оператора 1-го порядка с гладкими и ограниченными матричными коэффициентами. Сопоставим каждому вектору  $A$  столбец координат

$$A \sim \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда соответствия

$$\text{rot} A \sim \left( R_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + R_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + R_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

$$A_\perp \sim Q \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

определяют косоэрмитовы матрицы  $R_k = -R_k^*$  и эрмитову матрицу  $Q$  с элементами  $Q_{ik} = \delta_{ik} - l_i l_k$ . Отметим, что первые производные от  $Q$  равномерно ограничены во всем пространстве. С помощью этих матриц система (10) записывается в форме, принятой в теореме Фридрихса:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^3 \begin{pmatrix} 0 & QR_k \\ -R_k Q & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_k} \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} - \left( \sum_{k=1}^3 R_k \frac{\partial Q}{\partial x_k} \right) \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} =$$

$$= \left\{ \sum_{k=1}^3 A_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k} + B(x) \right\} \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} \varphi_{\perp} \\ \psi \end{pmatrix} \in D, \quad (11)$$

причем матрицы  $A_k$  эрмитовы,  $B$  ограничена:  $\|B(x)\| \leq \text{const}$ . По этой теореме существует единственная бесконечно дифференцируемая по совокупности четырех переменных  $(t, x_1, x_2, x_3)$  вектор-функция  $\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}$ , удовлетворяющая уравнению и начальному условию (11). Это же относится и к нашей системе (9). Гладкое решение не обязано, конечно, лежать в  $L_2$ . Но вследствие теоремы о локальной зависимости, которую мы сейчас докажем, решение системы (9) будет финитным, так же, как и начальные условия, и, следовательно, принадлежит  $L_2$ . Поэтому, в силу единственности, решение задачи Коши (9) как задачи в  $L_2$  совпадает с обычным, классическим решением. В терминах полугруппы  $V(t)$  можно сказать, что  $V(t)$  преобразует плотное множество финитных вектор-функций в себя:  $V(t)D \subset D$ . При этом, если  $\varphi \in D$ , то  $V(t)\varphi$  является бесконечно дифференцируемой функцией четырех переменных  $(t, x_1, x_2, x_3)$ .

**Теорема.** Если начальные условия задачи (9) равны нулю в шаре радиуса  $R$ , то в момент времени  $t$  ( $0 \leq t < R$ ) решение равно нулю в шаре радиуса  $R-t$  с тем же центром.

**Доказательство.** Из (9) легко получаем соотношение

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div } S = 0, \quad \text{где } W = |E_{\perp}|^2 + |H|^2, \quad S = 2 \text{Re}[E_{\perp}, H^*].$$

Очевидно,  $W \geq |s| \geq 0$ , так, что 4-вектор  $(W, s)$  времениподобен. Шары радиуса  $R-t$ , описанные в условии теоремы, образуют конус  $K$  в четырехмерном пространстве  $(t, x_1, x_2, x_3)$  Минковского. Возьмем какую-нибудь пространственно-подобную гиперповерхность  $\Sigma_1$  с краем, лежащим в основании конуса  $K$ . Пусть  $\Sigma_0$  — кусок основания конуса  $K$ , вырезаемый гиперповерхностью  $\Sigma_1$ ,  $\Omega$  — область, ограниченная  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_0$ . Тогда по теореме Гаусса — Остроградского имеем

$$\int_{\Sigma_1 - \Sigma_0} (W n_0 - s_1 n_1 - s_2 n_2 - s_3 n_3) d\sigma = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial W}{\partial t} + \text{div } S \right) d\Omega = 0$$

(здесь  $(n_0, n_1, n_2, n_3)$  — 4-вектор нормали к  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_0$ ), откуда получим

$$\int_{\Sigma_1} (W n_0 - s_1 n_1 - s_2 n_2 - s_3 n_3) d\sigma = 0.$$

Поскольку  $n_0 > 0$  и  $n_0^2 - n_1^2 - n_2^2 - n_3^2 = 1$ , а 4-вектор  $(W, s)$  времениподобен, то из последнего равенства заключаем, что  $W = s_1 = s_2 = s_3 = 0$  на  $\Sigma_1$ . Но такие гиперповерхности  $\Sigma_1$  заметают всю внутреннюю часть  $K$ . Стало быть,  $W = 0$  в  $K$ , т. е.  $E_{\perp} = H = 0$  в  $K$ . Теорема доказана.

#### § 4. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ К СКАЛЯРНОМУ УРАВНЕНИЮ ДЛЯ ТОКА

В этом и следующем параграфах мы будем использовать для простоты общие операторные обозначения. Покажем, что задача Коши

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \overline{QAQ}x, \quad x(0) = x \in D \cap QL_2 \quad (12)$$

в пространстве  $QL_2$  (9) допускает следующую эквивалентную постановку. Найти вектор-функции  $x(t)$  и  $I(t)$  такие, что  $x(t)$  является решением неоднородной задачи Коши

$$\frac{\partial x}{\partial t} = Ax(t) - I(t), \quad x(0) = x \in D \cap QL_2 \quad (13)$$

и удовлетворяет дополнительному условию  $Px(t) \equiv 0$ , а  $I(t)$  удовлетворяет условию  $PI(t) = I(t)$ . Действительно, пусть  $x(t)$  — решение задачи (12). Поскольку  $x(t) \in D \subset D(QAQ)$ , то  $QAQx(t) = QAQx(t) = Ax(t) - PAx(t) = Ax(t) - I(t)$ , т. е. выполняется (13). Отметим, что  $I(t) = PAx(t) = PAV(t)x$ . Обратно, применяя к (13) проектор  $Q$  и учитывая, что  $QAQx(t) = \overline{QAQ}x(t)$ , получим (12). Выведем теперь уравнение для тока  $I(t)$ . Поскольку при  $x \in D$  в силу гладкости решения ток  $I(t)$  также будет гладким  $I(t) \in D$ , решение задачи (13) можно записать в виде

$$x(t) = U_0(t)x - \int_0^t u_0(t-\tau)I(\tau)d\tau, \quad (14)$$

где  $U_0(t)$  обозначает полугруппу с производящим оператором  $A$ . Условие  $Px(t) \equiv 0$  дает уравнение для тока

$$\int_0^t PU_0(t-\tau)PI(\tau)d\tau = PU_0(t)x. \quad (15)$$

**Определение.** Пусть  $x \in D$ ; назовем гладким решением уравнения (15) сильно непрерывную по  $t$  функцию (в смысле  $L_2$ )  $I(t) = PI(t)$ , принадлежащую  $D(A)$  такую, что  $AI(t)$  также сильно непрерывна, и удовлетворяющую уравнению (15).



**Теорема.** При  $x \in D$  существует единственное гладкое решение (15). Если  $I(t)$  — гладкое решение (15), то функция  $x(t)$ , определяемая по формуле (14), является решением задачи Коши (12), при этом  $I(t) = PAx(t) = PAV(t)$ .

**Доказательство.** Существование гладкого решения (15) доказано; мы получили, что  $I(t) = PAV(t)x$  удовлетворяет (15), гладкость же  $I(t)$  не вызывает сомнений, так как  $I(t)$  — бесконечно дифференцируемая функция времени и координат, финитная по координатным переменным.

Если  $I(t)$  — гладкое решение уравнения (15), то формула (14), как известно [1], определяет решение неоднородной задачи Коши (13), причем выполняются дополнительные условия  $Px(t) \equiv 0$  и  $PI(t) = I(t)$ ; следовательно,  $x(t)$  является решением задачи (12) и, значит  $I(t) = PAV(t)x$ . При  $x \leq 0$  получим  $I(t) = 0$ , т. е. единственность гладкого решения. Теорема доказана.

В заключение параграфа выпишем формулу для тока  $I(t) = PAx(t)$  в конкретных обозначениях:

$$I(t, x) = -1(\text{rot } H(t), 1).$$

Из этой формулы видно, что в общем случае негладких начальных условий  $I(t)$  может быть сингулярной функцией, так как система (9) гарантирует лишь, что  $\text{rot } H \in L_2$ . В общем плане отмеченная сингулярность тока проистекает из несовпадения областей определения операторов  $QAQ$  и его замыкания  $\overline{QAQ}$ .

## § 5. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

В этом параграфе мы займемся изучением асимптотики задачи Коши (1) при  $\sigma \rightarrow +\infty$ . Физически ясно, что сходимость не может быть очень хорошей, если функция  $p(x)$  — «плохая» (имеет нули, разрывы). Поэтому получить асимптотику (первые члены) при произвольной функции  $p(x)$  затруднительно. Мы ограничимся простейшим случаем  $p(x) \equiv 1$ , что означает  $B = -P$ . Прежде чем переходить к доказательству теоремы, заметим, что если  $x \in D$ , то  $V(t)x \in D$ , и более того, если применять к  $V(t)x$  в любом порядке и числе операторы  $P, Q, A$ , то в результате мы снова будем получать функции, бесконечно дифференцируемые по времени и координатам и финитные по координатам, так что с точки зрения  $L_2$  это будут сильно непрерывные функции времени. После этой оговорки можно фактически обращаться с операторами  $A, P, Q$  как с ограниченными.

**Теорема.** Если  $x = Qx \in D$ , то для решения задачи Коши (1) с гладкими начальными условиями  $x(t) = U_\sigma(t)x$  справедливо разложение:

$$U_\sigma(t)Qx = V(t) + \frac{1}{\sigma} \left\{ \int_0^t V(t-s)APAV(s)xdx + PAV(t)x - \right.$$

$$\left. - e^{-\sigma t}PAQx \right\} + O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right),$$

где  $O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)$  вектор с нормой порядка  $\frac{1}{\sigma^2}$  равномерно на любом конечном отрезке времени  $[0, T]$ .

**Доказательство.** Пусть  $x = Qx \in D$ . Получим тождество

$$U_\sigma(t)Qx - V(t)x = - \int_0^t \frac{d}{ds} \{U_\sigma(t-s)V(s)x\} ds = - \int_0^t U_\sigma(t-s) \left( -A + \sigma P + QAQ \right) V(s)x ds = \int_0^t U_\sigma(t-s) PAV(s)x ds. \quad (16)$$

Следовательно, задача сводится к получению асимптотики  $U_\sigma(t)Py$  при  $y = Py \in D$ . Имеем

$$U_\sigma(t)Py - e^{-\sigma t}Py = - \int_0^t \frac{d}{d\tau} \{U_\sigma(t-\tau)e^{-\sigma\tau}Py\} d\tau = \int_0^t e^{-\sigma\tau} U_\sigma(t-\tau) APy d\tau. \quad (17)$$

Отсюда получаем оценку

$$|U_\sigma(t)Py| \leq e^{-\sigma t} |Py| + |APy|. \quad (18)$$

Далее преобразуем (17):

$$U_\sigma(t)Py - e^{-\sigma t}Py = \int_0^t e^{-\sigma\tau} V(t-\tau) QAPy d\tau = \int_0^t e^{-\sigma\tau} \{U_\sigma(t-\tau)Q - V(t-\tau)\} QAPy d\tau + \int_0^t e^{-\sigma\tau} U_\sigma(t-\tau) PAVy d\tau. \quad (19)$$

Первый интеграл справа оценивается как  $O\left(\frac{1}{\sigma}\right)$ , причем равномерно на  $[0, T]$ , и эта оценка останется равномерной, если заметить  $y$  на  $PAV(s)x$  (что мы в дальнейшем и сделаем), так как  $f(s) = PAV(s)x, s \in [0, T]$  есть непрерывная кривая в  $L_2$ , т. е. ком-

пактное множество, а сильно сходящаяся последовательность операторов, какова  $U_\sigma Q - V$ , сходится равномерно на любом компактном подмножестве. Норма второго интеграла справа не превосходит, как это видно с помощью (18), величины

$$\int_0^t e^{-\sigma\tau} \left( e^{-\sigma(t-\tau)} |PAPy| + \frac{1}{\sigma} |APAPy| \right) d\tau \leq te^{-\sigma t} |PAPy| + \frac{1}{\sigma^2} |APAPy|.$$

Теперь интегрируем по частям в интеграле слева из тождества

$$\int_0^t e^{-\sigma\tau} V(t-\tau) QAPy d\tau = \frac{1}{\sigma} V(t) QAPy - \frac{e^{-\sigma t}}{\sigma} QAPy + \frac{i}{\sigma} \int_0^t e^{-\sigma\tau} V(t-\tau) QAQAPy d\tau. \quad (19')$$

Последний интеграл есть  $O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)$ . Следовательно, имеем

$$\left| U_\sigma(t) Py - e^{-\sigma t} Py - \frac{1}{\sigma} V(t) QAPy - \frac{e^{-\sigma t}}{\sigma} QAPy \right| \leq O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) + o\left(\frac{1}{\sigma}\right) + te^{-\sigma t} |PAPy|, \quad (20)$$

причем самый «плохой» член  $o\left(\frac{1}{\sigma}\right)$  возникает только из-за того, что мы грубо оцениваем

$$| \{U_\sigma(t) Q - V(t)\} QAPy | = O(1) \text{ при } \sigma \rightarrow \infty.$$

Теперь соединим (20) и (16), положив  $y = PAV(s)x$ . Получим

$$U_\sigma(t) Qx = V(t)x + \frac{1}{\sigma} \int_0^t V(t-s) APAV(s) ds + \int_0^t e^{-\sigma(t-s)} PAV(s) ds + o\left(\frac{1}{\sigma}\right). \quad (21)$$

Из этой предварительной формулы следует, что при  $x \in D$

$$|U_\sigma(t) Qx - V(t)x| = o\left(\frac{1}{\sigma}\right).$$

Применим эту оценку для  $x = QAPy$ . Тогда первый интеграл в (19) оценится уже как  $O(1/\sigma^2)$ , и потому во всех наших оценках  $o(1/\sigma)$  заменится  $O(1/\sigma^2)$ . Интегрируя по частям в последнем интеграле из (21), получим утверждение теоремы. В заключение отметим простое следствие. При  $t > t_0 > 0$ ,  $x \in D$  существует сильный предел

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \sigma P U_\sigma(t)x = PAV(t)x = I(t).$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., «Наука», 1967.
2. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., «Мир», 1972.
3. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Спектральная теория. М., «Мир», 1966.

Е. В. ЗАХАРОВ

### О ЕДИНСТВЕННОСТИ И СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

В работах [1, 2] развиты общие методы редукции прямых задач неоднородных сред к интегральным уравнениям второго рода, размерности которых меньше размерности исходной граничной задачи для уравнений Максвелла. Эти интегральные уравнения допускают достаточно простую алгоритмизацию и проведение расчетов электромагнитных полей на ЭВМ. В то же время интегральные уравнения представляют собой эффективный аппарат теоретического исследования граничных задач для уравнений Максвелла с переменными разрывными коэффициентами. В частности, используя этот аппарат, можно доказать теоремы существования соответствующих граничных задач. В настоящей работе исследованы интегральные уравнения для задач дифракции электромагнитных полей на телах, погруженных в слоистую среду. Рассмотрение проведено для плоской скалярной задачи, что принципиально не ограничивает общности метода.

Итак, рассмотрим следующую задачу на плоскости  $yOz$ :

$$\Delta_{y,z} U(M) + k^2(M) U(M) = f(M), \quad (*)$$

где

$$k(M) = \begin{cases} k_1(M) & \text{при } M \in S \\ k_T & \text{при } M \in S \end{cases} \quad (\text{Im } k_1 > 0),$$

$k_1(z)$  — кусочно-дифференцируемая ограниченная функция переменной  $z$ ,  $k_T$  — константа,  $S$  — некоторая конечная область плос-

пактное множество, а сильно сходящаяся последовательность операторов, какова  $U_\sigma Q - V$ , сходится равномерно на любом компактном подмножестве. Норма второго интеграла справа не превосходит, как это видно с помощью (18), величины

$$\int_0^t e^{-\sigma\tau} \left( e^{-\sigma(t-\tau)} |PAPy| + \frac{1}{\sigma} |APAPy| \right) d\tau \leq te^{-\sigma t} |PAPy| + \frac{1}{\sigma^2} |APAPy|.$$

Теперь интегрируем по частям в интеграле слева из тождества

$$\int_0^t e^{-\sigma\tau} V(t-\tau) QAPy d\tau = \frac{1}{\sigma} V(t) QAPy - \frac{e^{-\sigma t}}{\sigma} QAPy + \frac{i}{\sigma} \int_0^t e^{-\sigma\tau} V(t-\tau) QAQAPy d\tau. \quad (19')$$

Последний интеграл есть  $O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)$ . Следовательно, имеем

$$\left| U_\sigma(t) Py - e^{-\sigma t} Py - \frac{1}{\sigma} V(t) QAPy - \frac{e^{-\sigma t}}{\sigma} QAPy \right| \leq O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) + o\left(\frac{1}{\sigma}\right) + te^{-\sigma t} |PAPy|, \quad (20)$$

причем самый «плохой» член  $o\left(\frac{1}{\sigma}\right)$  возникает только из-за того, что мы грубо оцениваем

$$| \{U_\sigma(t) Q - V(t)\} QAPy | = O(1) \text{ при } \sigma \rightarrow \infty.$$

Теперь соединим (20) и (16), положив  $y = PAV(s)x$ . Получим

$$U_\sigma(t) Qx = V(t)x + \frac{1}{\sigma} \int_0^t V(t-s) APAV(s) ds + \int_0^t e^{-\sigma(t-s)} PAV(s) ds + o\left(\frac{1}{\sigma}\right). \quad (21)$$

Из этой предварительной формулы следует, что при  $x \in D$

$$|U_\sigma(t) Qx - V(t)x| = o\left(\frac{1}{\sigma}\right).$$

Применим эту оценку для  $x = QAPy$ . Тогда первый интеграл в (19) оценится уже как  $O(1/\sigma^2)$ , и потому во всех наших оценках  $o(1/\sigma)$  заменится  $O(1/\sigma^2)$ . Интегрируя по частям в последнем интеграле из (21), получим утверждение теоремы. В заключение отметим простое следствие. При  $t > t_0 > 0$ ,  $x \in D$  существует сильный предел

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \sigma P U_\sigma(t)x = PAV(t)x = I(t).$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., «Наука», 1967.
2. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., «Мир», 1972.
3. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Спектральная теория. М., «Мир», 1966.

Е. В. ЗАХАРОВ

### О ЕДИНСТВЕННОСТИ И СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

В работах [1, 2] развиты общие методы редукции прямых задач неоднородных сред к интегральным уравнениям второго рода, размерности которых меньше размерности исходной граничной задачи для уравнений Максвелла. Эти интегральные уравнения допускают достаточно простую алгоритмизацию и проведение расчетов электромагнитных полей на ЭВМ. В то же время интегральные уравнения представляют собой эффективный аппарат теоретического исследования граничных задач для уравнений Максвелла с переменными разрывными коэффициентами. В частности, используя этот аппарат, можно доказать теоремы существования соответствующих граничных задач. В настоящей работе исследованы интегральные уравнения для задач дифракции электромагнитных полей на телах, погруженных в слоистую среду. Рассмотрение проведено для плоской скалярной задачи, что принципиально не ограничивает общности метода.

Итак, рассмотрим следующую задачу на плоскости  $yOz$ :

$$\Delta_{y,z} U(M) + k^2(M) U(M) = f(M), \quad (*)$$

где

$$k(M) = \begin{cases} k_1(M) & \text{при } M \in S \\ k_T & \text{при } M \in S \end{cases} \quad (\text{Im } k_1 > 0),$$

$k_1(z)$  — кусочно-дифференцируемая ограниченная функция переменной  $z$ ,  $k_T$  — константа,  $S$  — некоторая конечная область плос-

кости  $yOz$ , ограниченная достаточно гладким контуром  $C$ ;  $f(M)$  — функция с компактным носителем ( $f(M) = 0$  при  $M \in S$ ). На всех границах разрыва параметра  $k$  непрерывны  $U$  и  $\frac{\partial U}{\partial n}$ . На бесконечности потребуем выполнения условий

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \cdot U(M) = 0; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \frac{\partial U(M)}{\partial r} = 0.$$

Как показано в [1], поставленная задача может быть сведена к системе интегральных уравнений по контуру  $C$ :

$$\varphi_i(M) + \sum_{j=1}^2 \int_C \hat{K}_{ij}(M, M_0) \varphi_j(M_0) dl_{M_0} = F_i(M) \quad (i = 1, 2), \quad (1)$$

где

$$K_{11}(M, M_0) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_{M_0}} [G(M, M_0) - G_T(M, M_0)]; \quad (2)$$

$$K_{12}(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} [G(M, M_0) - G_T(M, M_0)]; \quad (3)$$

$$K_{21}(M, M_0) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial n_M \partial n_{M_0}} [G(M, M_0) - G_T(M, M_0)]; \quad (4)$$

$$K_{22}(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_M} [G(M, M_0) - G_T(M, M_0)]; \quad (5)$$

$$\varphi_1(M) \equiv U(M)|_C; \quad \varphi_2(M) \equiv \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_C.$$

$G(M, M_0)$  — фундаментальное решение плоской  $n$ -слойной задачи, имеющее логарифмическую особенность при совпадении аргументов;

$G_T(M, M_0)$  — фундаментальное решение для плоскости  $yOz$

$$G_T = \frac{\pi_i}{2} H_0^{(1)}(k_T r_{MM_0});$$

$$F_1(M) = U^{(1)}(M)|_C; \quad F_2(M) = \frac{\partial U^{(1)}}{\partial n}(M)|_C;$$

$U^{(1)}(M)$  — решение задачи (\*) для уравнения

$$\Delta_{yz} U^{(1)}(M) + k_1^2(z) U^{(1)}(M) = f(M).$$

Редукция проведена в предположении, что существует решение задачи, представимое формулами Грина.

Отказываясь от этого предположения и исходя лишь из единственности решения исходной дифракционной задачи, докажем, во-первых, разрешимость системы интегральных уравнений в классе  $C_N^{(1)}$  (класс функций с непрерывной в смысле Гельдера произ-

водной) и существование решения задачи (\*), представимого формулами Грина. Основным звеном в схеме доказательств указанных фактов является теорема единственности для системы интегральных уравнений (1) в рассматриваемом классе функций. Идея доказательства этой теоремы заимствована из работ Мюллера [3] и Купрадзе [4].

Итак, перейдем к доказательству теоремы единственности для системы интегральных уравнений (1). Дифракционная задача имеет единственное решение, т. е. соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение. Кроме того, из способа редукции вытекает, что однородной дифракционной задаче соответствует однородная система интегральных уравнений (1). Основываясь именно на этих фактах, докажем теорему единственности для системы интегральных уравнений (1).

**Теорема 1.** Однородная система интегральных уравнений

$$\varphi_i(M) + \sum_{j=1}^2 \int_C K_{ij}(M, M_0) \varphi_j(M_0) dl_{M_0} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (6)$$

где  $K_{ij}(M, M_0)$  определены формулами (2)–(5), имеет в классе  $C_N^{(1)}$  только нулевое решение.

**Доказательство.** Пусть  $\{\varphi_{1,2}\} \in C_N^{(1)}$  — некоторое ненулевое решение (6). Построим следующие потенциалы:

$$U_1^0(M) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left\{ \varphi_1 \frac{\partial G}{\partial n_{M_0}} - G \varphi_2 \right\} dl_{M_0}, \quad (7)$$

$$U_2^0(M) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left\{ \varphi_1 \frac{\partial G_T}{\partial n_{M_0}} - G_T \varphi_2 \right\} dl_{M_0}. \quad (8)$$

Рассмотрим функцию

$$V(M) = \begin{cases} U_1^0(M), & M \in S, \\ U_2^0(M), & M \in \bar{S}. \end{cases} \quad (9)$$

Введенная таким образом функция  $V(M)$  является решением следующих однородных уравнений:

$$\Delta V + k_1^2 V = 0 \quad (M \in \bar{S}),$$

$$\Delta V + k_1^2(z) V = 0 \quad (M \in S) \quad (k_1(z) = k_p).$$

Из системы интегральных уравнений (6) следуют для функции  $V(M)$  условия сопряжения на контуре  $C$ :

$$[V] = 0, \quad \left[ \frac{\partial V}{\partial n} \right] = 0. \quad (10)$$

Проверим выполнение этих условий. Действительно:

$$(V)_+ = \frac{1}{2} \varphi_1^0(M) + \frac{1}{2\pi} \int_C \left\{ \varphi_1^0 \frac{\partial G_T}{\partial n_{M_0}} - \varphi_2^0 G_T \right\} dl_{M_0},$$

$$(V)_- = -\frac{1}{2} \varphi_1^0(M) + \frac{1}{2\pi} \int_C \left\{ \varphi_1^0 \frac{\partial G}{\partial n_{M_0}} - \varphi_2^0 G \right\} dl_{M_0}.$$

Отсюда

$$[V] = \varphi_1^0(M) - \frac{1}{2\pi} \int_C \left\{ \varphi_1^0 \frac{\partial}{\partial n_{M_0}} (G - G_T) - \varphi_2^0 (G - G_T) \right\} dl_{M_0},$$

т. е.

$$[V] = 0;$$

$$\left( \frac{\partial V}{\partial n_M} \right)_+ = \frac{1}{2} \varphi_2^0(M) + \frac{1}{2\pi} \int_C \left\{ \varphi_1^0 \frac{\partial^2 G_T}{\partial n_M \partial n_{M_0}} - \varphi_2^0 \frac{\partial G_T}{\partial n_{M_0}} \right\} dl_{M_0},$$

$$\left( \frac{\partial V}{\partial n_M} \right)_- = -\frac{1}{2} \varphi_1^0(M) + \frac{1}{2\pi} \int_C \left\{ \varphi_1^0 \frac{\partial G}{\partial n_M \partial n_{M_0}} - \varphi_2^0 \frac{\partial G}{\partial n_M} \right\} dl_{M_0}.$$

Отсюда

$$\left[ \frac{\partial V}{\partial n} \right] = \varphi_2^0 - \frac{1}{2\pi} \int_C \left\{ \varphi_1^0 \frac{\partial^2 (G - G_T)}{\partial n_M \partial n_{M_0}} - \varphi_2^0 \frac{\partial (G - G_T)}{\partial n_M} \right\} dl_{M_0},$$

$$\text{т. е. } \left[ \frac{\partial V}{\partial n} \right] = 0.$$

В силу теоремы единственности дифракционной задачи (\*) функция  $V(M)$  тождественно равна нулю. Отсюда следует, что  $U_1^0(M) \equiv 0$  при  $M \in S$  и  $U_2^0(M) \equiv 0$  при  $M \in \bar{S}$ . При этом из (7) и (8) получаем для граничных значений  $U_1^0(M)$  и  $U_2^0(M)$  на контуре  $C$  следующие соотношения:

$$U_1^0|_C = \varphi_1^0; \quad \frac{\partial U_1^0}{\partial n} \Big|_C = \varphi_2^0; \quad (11)$$

$$U_2^0|_C = -\varphi_1^0; \quad \frac{\partial U_2^0}{\partial n} \Big|_C = -\varphi_2^0. \quad (12)$$

Рассмотрим далее функцию

$$W(M) = \begin{cases} U_1^0(M), & M \in \bar{S}, \\ -U_2^0(M), & M \in S. \end{cases}$$

Функция  $W(M)$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta W(M) + k^2(M) W(M) = 0$$

и соответствующим условиям на бесконечности. Кроме того, на контуре  $C$  имеют место условия, вытекающие из (11) и (12):

$$[W] = 0; \quad \left[ \frac{\partial W}{\partial n} \right] = 0.$$

Таким образом, функция  $W(M)$  удовлетворяет всем условиям теоремы единственности дифракционной задачи, откуда следует, что  $W(M) \equiv 0$ . Следовательно  $U_1^0(M) \equiv 0$ , и поэтому

$$\varphi_1^0(M) = 0; \quad \varphi_2^0(M) = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Решение системы интегральных уравнений:

$$\varphi_i(M) + \sum_{j=1}^2 \int_C K_{ij}(M, M_0) \varphi_j(M_0) dl_{M_0} = F_i(M) \quad (i = 1, 2), \quad (13)$$

где  $\{F_{1,2}\} \in C_H^{(1)}$ , существует и принадлежит классу  $C_H^{(1)}$ .

Доказательство. Выше была доказана единственность решения однородной системы (13) (теорема 1). Если для системы (13) справедливы теоремы Фредгольма, то теорема существования доказана. Следовательно, необходимо доказать, что система (13) — фредгольмовского типа.

Для этого рассмотрим ядро этой системы (при условии, что область  $S$  лежит в слое с параметром  $K_p$ ):

$$G_T = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(k_T r_{MM_0});$$

$$G = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(k_p r_{MM_0}) + 0 \left( r_{MM_0}^2 \ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right).$$

Очевидно, что достаточно рассмотреть только разности

$$H_0^{(1)}(k_p r_{MM_0}) - H_0^{(1)}(k_T r_{MM_0}), \quad (14)$$

так как остальные члены допускают двойное дифференцирование по координатам точек  $M$  и  $M_0$  и остаются регулярными (по крайней мере, если область целиком расположена в однородном слое).

Выписывая производные от выражения (14), нетрудно получить асимптотику ядер интегральных операторов ( $M \rightarrow M_0$ ):

$$K_{11}(M, M_0) = O(r_{MM_0}), \quad K_{12}(M, M_0) = O(1),$$

$$K_{21}(M, M_0) = O\left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}}\right), \quad K_{22}(M, M_0) = O(r_{MM_0}).$$

Таким образом, ядра системы (13) либо регулярны, либо имеют интегрируемую особенность. Последнее означает, что система интегральных уравнений (13) — фредгольмовского типа. Так как правые части системы (13) принадлежат классу  $C_H^{(1)}$ , то в силу

известных свойств гладкости решение интегральных уравнений Фредгольма II рода  $\{\varphi_{1,2}\} \in C_H^{(1)}$ . Отсюда следует утверждение нашей теоремы.

**Теорема 3** (существования решения дифракционной задачи). Если решение  $U(M)$  уравнения

$$\Delta U(M) + k^2(M)U(M) = f(M) \quad (15)$$

с граничными условиями  $[U] = 0$ ;  $\left[\frac{\partial U}{\partial n}\right] = 0$ , с условием излучения на бесконечности;  $f(M)$  — финитная функция с непрерывной в смысле Гельдера производной ( $f(M) \in C_H^{(1)}$ ), единственно, то оно существует.

**Доказательство.** Рассмотрим систему интегральных уравнений:

$$\varphi_i(M) + \sum_{j=1}^2 \int_C K_{ij}(M, M_0) \varphi_j(M_0) dl_{M_0} = F_i(M), \quad i = 1, 2, \quad (16)$$

где  $K_{ij}(M, M_0)$  определены формулами (2) — (5),

$$F_1(M) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} G(M, M_0) f(M_0) d\sigma_{M_0}, \quad (17)$$

$$F_2(M) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{\partial G}{\partial n_M}(M, M_0) f(M_0) d\sigma_{M_0}. \quad (18)$$

( $\Omega$  — носитель функции  $f(M)$ ).

Отметим прежде всего, что при указанных условиях гладкости функции  $f(M)$ , функции  $F_i(M)$  ( $i=1, 2$ ) обладают непрерывной в смысле Гельдера производной. По условию теоремы задача для уравнения (15) имеет единственное решение, т. е. однородная задача (15) имеет только тривиальное решение. Этой однородной задаче соответствует однородная система интегральных уравнений (6). Следовательно (в силу теоремы 1), система интегральных уравнений (16) имеет единственное решение. Но так как представления (17) и (18) принадлежат классу  $C_H^{(1)}$ , решение этой системы существует в классе  $C_H^{(1)}$ . Пусть далее  $\varphi_1(M)$  и  $\varphi_2(M)$  — решение системы (16).

Построим функции

$$U_1(M) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left\{ \varphi_1 \frac{\partial G}{\partial n_{M_0}} - \varphi_2 G \right\} dl_{M_0} + \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} G(M, M_0) f(M_0) d\sigma_{M_0},$$

$$U_2(M) = -\frac{1}{2\pi} \int_C \left\{ \varphi_1 \frac{\partial G_T}{\partial n_{M_0}} - \varphi_2 G_T \right\} dl_{M_0}.$$

Функции  $U_1(M)$  и  $U_2(M)$  удовлетворяют уравнениям

$$\Delta U_1(M) + k_1^2(z)U_1(M) = f(M),$$

$$\Delta U_2 + k_2^2 U_2 = 0, \quad M \in S.$$

Так как  $U_1=0$  при  $M \in S$  и  $U_2(M)=0$  при  $M \in \bar{S}$ , то имеют место для  $U_{1,2}(M)$  граничные условия на контуре  $C$  (аналогично  $U_1^0$  и  $U_2^0$ ):

$$U_1|_C = \varphi_1(M); \quad \left. \frac{\partial U_1}{\partial n} \right|_C = \varphi_2(M), \quad U_2|_C = \varphi_1(M); \quad \left. \frac{\partial U_2}{\partial n} \right|_C = \varphi_2(M).$$

В силу свойств введенных функций функция

$$U(M) = \begin{cases} U_1(M), & M \in \bar{S}, \\ U_2(M), & M \in S \end{cases}$$

удовлетворяет уравнению (15), условиям на бесконечности и следующим условиям на контуре  $C$ :

$$[U] = 0; \quad \left[ \frac{\partial U}{\partial n} \right] = 0.$$

Таким образом построенная функция  $U(M)$  является решением задачи дифракции для уравнения (16) и она представима с помощью формулы Грина. Теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров Е. В. К дифракции плоского электромагнитного поля на однородном цилиндрическом теле, погруженном в слоистую среду. «Изв. АН СССР», сер. Физика Земли, № 1, 1969.
2. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Метод решения задач электродинамики неоднородных сред. ЖВМ и МФ, № 6, 1970.
3. Müller G. Grundprobleme der mathematischen Theorie electromagnetischer Schwingungen. Berlin, 1957.
4. Купрадзе В. Д. Приближенное решение задач математической физики. УМН, № 2, 1967.

Е. В. ЗАХАРОВ, Н. И. НЕСМЕЯНОВА

#### МЕТОД РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Применение метода интегральных уравнений к задачам электродинамики неоднородных сред приводит в общем случае к векторным интегральным уравнениям и требует построения тензоров фундаментальных решений и использования векторных аналогов формулы Грина [1, 2]. В то же время плоские электродинамические задачи сводятся к скалярным задачам, редукция

известных свойств гладкости решение интегральных уравнений Фредгольма II рода  $\{\varphi_{1,2}\} \in C_H^{(1)}$ . Отсюда следует утверждение нашей теоремы.

**Теорема 3** (существования решения дифракционной задачи). Если решение  $U(M)$  уравнения

$$\Delta U(M) + k^2(M)U(M) = f(M) \quad (15)$$

с граничными условиями  $[U] = 0$ ;  $\left[\frac{\partial U}{\partial n}\right] = 0$ , с условием излучения на бесконечности;  $f(M)$  — финитная функция с непрерывной в смысле Гельдера производной ( $f(M) \in C_H^{(1)}$ ), единственно, то оно существует.

**Доказательство.** Рассмотрим систему интегральных уравнений:

$$\varphi_i(M) + \sum_{j=1}^2 \int_C K_{ij}(M, M_0) \varphi_j(M_0) dl_{M_0} = F_i(M), \quad i = 1, 2, \quad (16)$$

где  $K_{ij}(M, M_0)$  определены формулами (2) — (5),

$$F_1(M) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} G(M, M_0) f(M_0) d\sigma_{M_0}, \quad (17)$$

$$F_2(M) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{\partial G}{\partial n_M}(M, M_0) f(M_0) d\sigma_{M_0}. \quad (18)$$

( $\Omega$  — носитель функции  $f(M)$ ).

Отметим прежде всего, что при указанных условиях гладкости функции  $f(M)$ , функции  $F_i(M)$  ( $i=1, 2$ ) обладают непрерывной в смысле Гельдера производной. По условию теоремы задача для уравнения (15) имеет единственное решение, т. е. однородная задача (15) имеет только тривиальное решение. Этой однородной задаче соответствует однородная система интегральных уравнений (6). Следовательно (в силу теоремы 1), система интегральных уравнений (16) имеет единственное решение. Но так как представления (17) и (18) принадлежат классу  $C_H^{(1)}$ , решение этой системы существует в классе  $C_H^{(1)}$ . Пусть далее  $\varphi_1(M)$  и  $\varphi_2(M)$  — решение системы (16).

Построим функции

$$U_1(M) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left\{ \varphi_1 \frac{\partial G}{\partial n_{M_0}} - \varphi_2 G \right\} dl_{M_0} + \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} G(M, M_0) f(M_0) d\sigma_{M_0},$$

$$U_2(M) = -\frac{1}{2\pi} \int_C \left\{ \varphi_1 \frac{\partial G_T}{\partial n_{M_0}} - \varphi_2 G_T \right\} dl_{M_0}.$$

Функции  $U_1(M)$  и  $U_2(M)$  удовлетворяют уравнениям

$$\Delta U_1(M) + k_1^2(z)U_1(M) = f(M),$$

$$\Delta U_2 + k_2^2 U_2 = 0, \quad M \in S.$$

Так как  $U_1=0$  при  $M \in S$  и  $U_2(M)=0$  при  $M \in \bar{S}$ , то имеют место для  $U_{1,2}(M)$  граничные условия на контуре  $C$  (аналогично  $U_1^0$  и  $U_2^0$ ):

$$U_1|_C = \varphi_1(M); \quad \left. \frac{\partial U_1}{\partial n} \right|_C = \varphi_2(M), \quad U_2|_C = \varphi_1(M); \quad \left. \frac{\partial U_2}{\partial n} \right|_C = \varphi_2(M).$$

В силу свойств введенных функций функция

$$U(M) = \begin{cases} U_1(M), & M \in \bar{S}, \\ U_2(M), & M \in S \end{cases}$$

удовлетворяет уравнению (15), условиям на бесконечности и следующим условиям на контуре  $C$ :

$$[U] = 0; \quad \left[ \frac{\partial U}{\partial n} \right] = 0.$$

Таким образом построенная функция  $U(M)$  является решением задачи дифракции для уравнения (16) и она представима с помощью формулы Грина. Теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров Е. В. К дифракции плоского электромагнитного поля на однородном цилиндрическом теле, погруженном в слоистую среду. «Изв. АН СССР», сер. Физика Земли, № 1, 1969.
2. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Метод решения задач электродинамики неоднородных сред. ЖВМ и МФ, № 6, 1970.
3. Müller G. Grundprobleme der mathematischen Theorie electromagnetischer Schwingungen. Berlin, 1957.
4. Купрадзе В. Д. Приближенное решение задач математической физики. УМН, № 2, 1967.

Е. В. ЗАХАРОВ, Н. И. НЕСМЕЯНОВА

#### МЕТОД РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Применение метода интегральных уравнений к задачам электродинамики неоднородных сред приводит в общем случае к векторным интегральным уравнениям и требует построения тензоров фундаментальных решений и использования векторных аналогов формулы Грина [1, 2]. В то же время плоские электродинамические задачи сводятся к скалярным задачам, редукция

которых к интегральным уравнениям значительно проще, чем векторных задач. Поэтому представляет большой интерес подобная редукция для других классов задач электродинамики неоднородных сред. В настоящей работе предлагается метод редукции осесимметричных задач электродинамики к скалярным задачам для уравнения Гельмгольца в пространстве, которые легко сводятся к интегральным уравнениям.

Пусть имеется пространство, заполненное неоднородной средой, параметры которой являются кусочно-дифференцируемыми, ограниченными функциями координат и обладают осевой симметрией. Выберем декартовую систему координат так, чтобы ось симметрии совпала с осью  $OZ$ . Рассматривается гармоническое во времени осесимметричное электромагнитное поле, возбуждаемое произвольной системой источников. Требуется найти векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  электрической и магнитной напряженностей, удовлетворяющие уравнениям Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= i\omega\mu \mathbf{H}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -i\omega\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (1)$$

условиям непрерывности касательных компонент  $E_\tau$  и  $H_\tau$  на границах разрыва непрерывности параметров, условиям убывания на бесконечности

$$\lim_{R \rightarrow \infty} RE = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} RH = 0.$$

В силу осевой симметрии электромагнитное поле может быть представлено в виде суммы полей двух типов:  $E$ -поляризация

$$\mathbf{E}(0, E_\varphi, 0); \quad \mathbf{H}(H_\rho, 0, H_z); \quad (2)$$

$$H_\rho = -\frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial E_\varphi}{\partial z}; \quad H_z = \frac{1}{i\omega\mu} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\varphi);$$

$H$ -поляризация

$$\mathbf{E}(E_\rho, 0, E_z); \quad \mathbf{H}(0, H_\varphi, 0); \quad (3)$$

$$E_\rho = \frac{1}{i\omega\varepsilon} \frac{\partial H_\varphi}{\partial z}; \quad E_z = -\frac{1}{i\omega\varepsilon} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\varphi).$$

Следуя работе [3], нетрудно получить граничные задачи для  $E_\varphi$  и  $H_\varphi$  (для полей I и II типа соответственно). Применение метода интегральных уравнений к этим задачам вызывает определенные трудности, связанные с необходимостью обобщения формул Грина и построения нового класса фундаментальных решений. Здесь предлагается метод редукции, позволяющий использовать обычную форму интегральных представлений и хорошо известные фундаментальные решения. Не ограничивая общности метода, рас-

смотрение будет проведено для полей I типа, при условии, что  $\mu = \text{const}$  во всем пространстве.

Рассмотрим декартовые компоненты вектора  $\mathbf{E}(E_x, E_y, 0)$ :

$$E_x = -\sin \varphi E_\varphi(\rho, z); \quad E_y = \cos \varphi E_\varphi(\rho, z). \quad (4)$$

Потребуем, чтобы декартовые компоненты вектора  $\bar{\mathbf{E}}$  являлись решениями следующих независимых граничных задач:

$$\Delta u + k^2 u = f; \quad (5)$$

$$[u]_s = 0; \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right]_s = 0; \quad (6)$$

где  $f = j_x, j_y$  — соответствующие компоненты вектора плотности тока сторонних источников, а  $u = E_x, E_y$ . Отметим, что задачи (5), (6) являются однотипными и отличаются только правыми частями.

Предполагая известными решения скалярных пространственных задач (5), (6), построим решение исходной граничной задачи для уравнений Максвелла. Введем  $\mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E}$ . В силу построения векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  и осевой симметрии уравнения Максвелла и непрерывность  $E_\varphi$  удовлетворяются автоматически. Проверим выполнение граничного условия  $[H_\tau]_s = 0$ . Выберем на поверхности два касательных направления. Для тела вращения естественно ввести в каждой точке на поверхности местную цилиндрическую систему координат, при этом направление координаты  $\varphi$  будет одним из касательных направлений, а второе выбирается соответственно:

$$H_\tau = H_\rho \cos(\widehat{\tau\rho}) + H_z \cos(\widehat{\tau z}) \quad (7)$$

( $\widehat{\tau\rho}$ ) — угол между  $\tau$  и  $\rho$ ,  $\varphi = 0$ ).

Подставляя в (7) выражения для  $H_\rho$  и  $H_z$  (2) и используя соотношения  $\cos(\widehat{n\rho}) = \cos(\widehat{\tau z})$ ,  $\cos(\widehat{n z}) = -\cos(\widehat{\tau\rho})$ , имеем

$$\begin{aligned} H_\tau &= \frac{1}{i\omega\mu} \left[ -\frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \cos(\widehat{\tau\rho}) + \left( \frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} E_\varphi \right) \cos(\widehat{\tau z}) \right] = \\ &= -\frac{1}{i\omega\mu} \left[ \left( \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \cos(\widehat{n z}) + \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \cos(\widehat{n\rho}) \right) + \frac{1}{\rho} E_\varphi \cos(\widehat{n\rho}) \right] = \\ &= -\frac{1}{i\omega\mu} \left[ \frac{\partial E_\varphi}{\partial n} + \frac{1}{\rho} E_\varphi \cos(\widehat{n\rho}) \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, непрерывность  $H_\tau$  следует из непрерывности  $E_\varphi$  и  $\frac{\partial E_\varphi}{\partial n}$ , которая, в свою очередь, следует из (6).

Перейдем к решению задач (5), (6). Так как задачи однотипны и отличаются только правыми частями, достаточно рассмотреть



редукцию одной  $E_x$ . Окончательные интегральные уравнения будут написаны относительно  $E_\varphi$  и  $\frac{\partial E_\varphi}{\partial n}$ . Разбивая пространство на  $N$  областей, причем все поверхности разбиений обладают общей осью симметрии, методом работы [4] задача для  $E_x$  сводится к системе интегральных уравнений по границам областей разбиений

$$(E_x)_m = \frac{1}{4\pi} \sum_{p,q} \iint_{S_{pq}} \left\{ (E_x)_p \frac{\partial}{\partial n} (G_p - G_q) - \left( \frac{\partial E_x}{\partial n} \right)_p (G_p - G_q) \right\} ds_M + \sum_{p=1}^N (E_x^0)_p; \quad (8)$$

$$\left( \frac{\partial E_x}{\partial n} \right)_m = \frac{1}{4\pi} \sum_{p,q} \iint_{S_{pq}} \left\{ (E_x)_p \frac{\partial^2}{\partial n_0 \partial n} (G_p - G_q) - \left( \frac{\partial E_x}{\partial n} \right)_p \frac{\partial}{\partial n_0} (G_p - G_q) \right\} ds_M + \sum_{p=1}^N \left( \frac{\partial E_x}{\partial n_0} \right)_p. \quad (9)$$

Система уравнений для  $E_y$ :

$$(E_y)_m = \frac{1}{4\pi} \sum_{p,q} \iint_{S_{pq}} \left\{ (E_y)_p \frac{\partial}{\partial n} (G_p - G_q) - \left( \frac{\partial E_y}{\partial n} \right)_p (G_p - G_q) \right\} ds_M + \sum_{p=1}^N (E_y^0)_p; \quad (10)$$

$$\left( \frac{\partial E_y}{\partial n_0} \right)_m = \frac{1}{4\pi} \sum_{p,q} \iint_{S_{pq}} \left\{ (E_y)_p \frac{\partial^2}{\partial n_0 \partial n} (G_p - G_q) - \left( \frac{\partial E_y}{\partial n} \right)_p \frac{\partial}{\partial n_0} (G_p - G_q) \right\} ds_M + \sum_{p=1}^N \left( \frac{\partial E_y}{\partial n_0} \right)_p. \quad (11)$$

Получим систему интегральных уравнений для  $E_\varphi$ . Умножая уравнения (8) и (10) соответственно на  $(-\sin \varphi_0)$  и  $(\cos \varphi_0)$  и складывая их, имеем

$$[-\sin \varphi_0 E_x(M_0) + \cos \varphi_0 E_y(M_0)]_m = \frac{1}{4\pi} \sum_{p,q} \iint_{S_{pq}} \left\{ (E_\varphi)_p \frac{\partial}{\partial n} (G_p - G_q) - \left( \frac{\partial E_\varphi}{\partial n} \right)_p (G_p - G_q) \right\} \cos(\varphi - \varphi_0) ds_M + \sum_{p=1}^N (E_\varphi^0)_p.$$

В силу независимости  $E_\varphi$  от  $\varphi_0$  положим  $\varphi_0 = 0$ :

$$(E_\varphi)_m = \frac{1}{4\pi} \sum_{p,q} \iint_{S_{pq}} \left\{ \cos \varphi \left[ (E_\varphi)_p \frac{\partial}{\partial n} (G_p - G_q) - \left( \frac{\partial E_\varphi}{\partial n} \right)_p (G_p - G_q) \right] \right\} ds_M + \sum_{p=1}^N (E_\varphi^0)_p. \quad (12)$$

Аналогично получается уравнение для  $\frac{\partial E_\varphi}{\partial n}$ :

$$\left( \frac{\partial E_\varphi}{\partial n_0} \right)_m = \frac{1}{4\pi} \sum_{p,q} \iint_{S_{pq}} \left\{ \cos \varphi \left[ (E_\varphi)_p \frac{\partial^2}{\partial n_0 \partial n} (G_p - G_q) - \left( \frac{\partial E_\varphi}{\partial n} \right)_p \frac{\partial}{\partial n_0} (G_p - G_q) \right] \right\} ds_M + \sum_{p=1}^N \left( \frac{\partial E_\varphi}{\partial n_0} \right)_p. \quad (13)$$

Для рассматриваемого класса осесимметричных задач интегральные уравнения по поверхностям разбиений можно заменить на интегральные уравнения по образующим. Для этого запишем уравнения (12) и (13) в виде

$$(E_\varphi)_m = \frac{1}{4\pi} \sum_{p,q} \left\{ \int_{L_{pq}} (E_\varphi)_p \int_0^{2\pi} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial n} (G_p - G_q) d\varphi dl_M - \int_{L_{pq}} \left( \frac{\partial E_\varphi}{\partial n} \right)_p \int_0^{2\pi} \cos \varphi (G_p - G_q) d\varphi dl_M \right\} + \sum_{p=1}^N (E_\varphi^0)_p, \quad (14)$$

$$\left( \frac{\partial E_\varphi}{\partial n_0} \right)_m = \frac{1}{4\pi} \sum_{p,q} \left\{ \int_{L_{pq}} (E_\varphi)_p \int_0^{2\pi} \cos \varphi \frac{\partial^2}{\partial n_0 \partial n} (G_p - G_q) d\varphi dl_M - \int_{L_{pq}} \left( \frac{\partial E_\varphi}{\partial n} \right)_p \int_0^{2\pi} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial n_0} (G_p - G_q) d\varphi dl_M \right\} + \sum_{p=1}^N \left( \frac{\partial E_\varphi}{\partial n_0} \right)_p, \quad (15)$$

где  $dl_M = \rho(M) d\tau$ . Как видно, матричные элементы представляют собой интегралы по азимутальной координате  $\varphi$  от разностей фундаментальных решений и их производных.

Проиллюстрируем применение этого метода на двух примерах.

1. Рассмотрим прямую задачу теории индукционного коротажа для модели «скважина — пласт конечной мощности» [5]. Отметим, что эта задача в работе [6] была сведена к интегральному

уравнению по объему, занятому скважиной. Эта же задача предлагаемым методом сводится к системе одномерных интегральных уравнений относительно  $E_\varphi$  и  $\frac{\partial E_\varphi}{\partial n}$  по образующей скважины

$$E_\varphi(M_0) = \frac{a}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_\varphi(M) \int_0^{2\pi} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} (G_1 - G_0) d\varphi dz - \\ - \frac{a}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho} (M) \int_0^{2\pi} \cos \varphi (G_1 - G_0) d\varphi dz + E_\varphi^0(M_0), \quad (16)$$

$$\left(\frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho_0}\right)(M_0) = \frac{a}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_\varphi(M) \int_0^{2\pi} \cos \varphi \frac{\partial^2}{\partial \rho_0 \partial \rho} (G_1 - G_0) d\varphi dz - \\ - \frac{a}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho} (M) \int_0^{2\pi} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho_0} (G_1 - G_0) d\varphi dz + \frac{\partial E_\varphi^0}{\partial \rho_0}(M_0),$$

где  $G_1$  — фундаментальное решение для плоскопараллельной среды (вмещающая среда — пласт),  $G_0$  — фундаментальное решение однородного пространства с параметрами скважины.

В системе (16) можно перейти от функций  $E_\varphi$  и  $\frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho}$  к функциям  $E_\varphi$  и  $H_z$  (касательным компонентам электромагнитного поля). Используя формулу  $\frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho} = i\omega \mu H_z - \frac{1}{\rho} E_\varphi$  и преобразуя ядра интегральных уравнений, приходим к системе относительно касательных к поверхности скважины компонент  $E_\varphi$  и  $H_z$ , которая была получена в [5]. Отметим, что эта система была получена в [5] с помощью обобщенной формулы Стреттона — Чу и построения матрицы фундаментальных решений, т. е. с использованием векторных интегральных представлений.

2. В качестве другого примера эффективного применения предлагаемого метода выпишем систему интегральных уравнений граничной задачи электродинамики для тела вращения, погруженного в полупространство, при осевом возбуждении. Такая модель является типичной для теории метода переходных процессов, применяемого при решении задач рудной и структурной электроразведки. Исследование электромагнитных полей в переходном режиме методом преобразования Лапласа основано на решении электродинамической задачи для уравнений Максвелла в гармоническом режиме (1). Эта задача сводится к системе одномерных интегральных уравнений по образующей поверхности тела враще-

ния либо двумерному интегральному уравнению по осевому сечению тела вращения. Если  $G_1$  — фундаментальное решение полупространства с параметрами  $k_0$  и  $k_1$  соответственно, а  $G_2$  — фундаментальное решение однородного пространства с параметром  $k_2$ , то электродинамическая задача сводится к системе интегральных уравнений

$$E_\varphi(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_L E_\varphi(M) \int_0^{2\pi} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial n} (G_1 - G_2) d\varphi dl_M - \\ - \frac{1}{4\pi} \int_L \frac{\partial E_\varphi}{\partial n} (M) \int_0^{2\pi} \cos \varphi (G_1 - G_2) d\varphi dl_M + E_\varphi^0(M_0), \quad (17)$$

$$\frac{\partial E_\varphi}{\partial n_0}(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_L E_\varphi(M) \int_0^{2\pi} \cos \varphi \frac{\partial^2}{\partial n_0 \partial n} (G_1 - G_2) d\varphi dl_M - \\ - \frac{1}{4\pi} \int_L \frac{\partial E_\varphi}{\partial n} (M) \int_0^{2\pi} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial n_0} (G_1 - G_2) d\varphi dl_M + \frac{\partial E_\varphi^0}{\partial n_0},$$

где  $L$  — образующая поверхности тела вращения, либо к интегральному уравнению относительно  $E_\varphi$

$$E_\varphi(M_0) - \frac{k_2^2 - k_1^2}{4\pi} \iint_S E_\varphi(M) \int_0^{2\pi} G_1(M, M_0) \cos \varphi d\varphi \rho d\rho dz = -E_\varphi^0(M_0), \quad (18)$$

где  $S$  — осевое сечение.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Метод решения задач электродинамики неоднородных сред. ЖВМ и МФ, 10, № 6, 1970.
2. Табаровский Л. А. Построение интегральных уравнений для задач дифракции методов вспомогательных источников. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1971.
3. Дмитриев В. И. Осесимметрическое электромагнитное поле в цилиндрической слоистой среде. «Изв. АН СССР», Физика Земли, № 11, 1972.
4. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Об интегральных уравнениях некоторого класса граничных задач электродинамики неоднородных сред. «Вычисл. методы и программирование», вып. XVI, Изд-во МГУ, 1971.
5. Дмитриев В. И., Захаров Е. В., Ильин И. В. О методе численного решения задачи индукционного каротажа в неоднородных средах. «Изв. АН СССР», Физика Земли, № 2, 1972.
6. Кауфман А. А. Теория индукционного каротажа. Новосибирск, «Наука», 1965.

$$P_1 = \frac{1}{h} U_1, \quad F_1 = U_1 E^{-1} \chi - 0,5hV_1 E^{-1} \chi + 0,5hF_1,$$

$$Q_M = \frac{1}{h} U_M - 0,5hW_M, \quad R_M = -\frac{1}{h} U_M,$$

$$F_M = -0,5hF_M,$$

окончательно имеем

$$R_i Z_{i-1} + Q_i Z_i + P_i Z_{i+1} = F_i, \quad i = 2, 3, \dots, M-1,$$

$$R_M Z_{M-1} + Q_M Z_M = F_M,$$

$$Q_1 Z_1 + P_1 Z_2 = F_1. \quad (3.9)$$

Конечной целью настоящего исследования является определение коэффициентов  $T_k^N$ , поскольку именно через них выражается такая важная характеристика задачи дифракции, как диаграмма направленности. Получим выражение для диаграммы направленности через  $T_k^N$ . Для этого разложим  $R_{MM_n}$  в ряд. Полагая  $R \gg R_n$ , получим:

$$R_{MM_n} = R - R_n (\cos \theta \cos \theta_n + \sin \theta \sin \theta_n \cos(\varphi - \varphi_n)) + O(1/R),$$

где  $(R, \theta, \varphi)$  и  $(R_n, \theta_n, \varphi_n)$  — координаты точек  $M$  и  $M_n$  соответственно в сферической системе координат. Воспользуемся полученным разложением, тогда система  $\{\omega_n\}$  принимает вид

$$\omega_n(M) = \frac{e^{iK_0 R}}{R} \cdot e^{-iK_0 R_n \cos \theta \cos \theta_n} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iK_0 \sin \theta \sin \theta_n \cos(\varphi - \varphi_n) R_n} d\varphi + O(1/R^2).$$

Откуда получим выражение для диаграмм направленности функций

$$F_n(\theta) = e^{-iK_0 R_n \cos \theta \cos \theta_n} J_0(K_0 R_n \sin \theta \sin \theta_n).$$

Теперь окончательно получаем выражение для диаграммы направленности приближенного решения  $U_N$  задачи (1) в виде

$$F_N(\theta) = \sum_{k=1}^N T_k^N e^{-iK_0 R_k \cos \theta \cos \theta_k} J_0(K_0 R_k \sin \theta \sin \theta_k).$$

Коэффициенты  $T_k^N$  определяются в результате численного решения сформулированной выше задачи (3.8).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Свешников А. Г. Дифракция на ограниченном теле. ДАН, № 1, 63—65, 1969.

2. Свешников А. Г., Ильинский А. С. Прямой метод для задач дифракции на локальном неоднородном теле. ЖВМ и МФ, 11, № 3, 960—968, 1971.
3. Свешников А. Г., Ильинский А. С., Павлов А. Л. Дифракция плоской волны на идеально проводящем цилиндре в неоднородной среде. «Радиотехн. и электроника», 17, № 7, 1387—1391, 1972.
4. Купрадзё В. Д. О приближенном решении задач математической физики. УМН, 22, вып. 2, 58—107, 1967.
5. Свешников А. Г., Ильинский А. С. Четыре лекции по численным методам в теории дифракции. Изд-во ЛГУ, 1972.
6. Стреттон Дж. А. Теория электромагнетизма. М., Гостехиздат, 1948.
7. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М., «Наука», 1966.

С. Н. ВОЕВОДИНА

### КЛЕТочно-ТЕПЛИЦЕВЫ МАТРИЦЫ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА

Один из стандартных приемов решения интегральных уравнений Фредгольма заключается в их сведении к линейным алгебраическим системам [1]. При этом порядок возникающих систем нередко может достигать нескольких сотен и даже тысяч. Решение таких задач вызывает значительные трудности из-за необходимости организовывать сложные обмены между оперативной и внешней памятью ЭВМ. Поэтому представляет интерес рассмотрение тех случаев, в которых матрицы систем имеют ярко выраженную специфику.

В настоящей заметке исследуются частные случаи интегральных уравнений Фредгольма, приводящие к системам с клеточно-теплицевыми матрицами. Эти системы эффективно решаются методом, описанным в [2].

Рассмотрим сначала интегральные уравнения, ядра которых зависят только от расстояния между точками. Известно, что расстояние инвариантно относительно операций сдвига, поворота и отражения. Пусть область интегрирования получается с помощью таких же операций из некоторой своей части. Предположим далее, что соответствующим образом реализуется и разбиение области, и выбор узлов интегрирования. Именно эти случаи будут предметом дальнейших исследований.

Сформулированные ниже выводы не зависят ни от размерности задачи, ни от типа уравнения Фредгольма. Для определенности мы рассмотрим уравнения первого рода и будем считать, что область интегрирования является некоторой линией на плоскости.

Итак, пусть задано интегральное уравнение Фредгольма первого рода



одной из половин области  $L$  и имеющих ядра вида  $K(P, M) \pm K(P', M)$ , где  $P'$  есть зеркальное отражение точки  $P$  относительно  $S$ .

Выполнение данного приема весьма целесообразно с точки зрения эффективного использования памяти ЭВМ, так как позволяет заменить решение одной алгебраической системы решением двух систем, но вдвое меньшего порядка.

Допустим, что ядро  $K(P, M)$  инвариантно относительно сдвига вдоль оси  $S$ . Это условие заведомо будет выполняться, например, в том случае, когда  $K(P, M)$  зависит только от расстояния между точками. Ядра  $K(P, M) \pm K(P', M)$  уже не будут зависеть только от расстояния, но, тем не менее, они будут инвариантными относительно сдвига вдоль  $S$ . Если область  $L$  получена путем применения последовательных сдвигов вдоль  $S$  некоторой своей части, то при решении интегральных уравнений, заданных на одной из половин  $L$  и имеющих ядра  $K(P, M) \pm K(P', M)$ , мы снова получим системы с клеточно-теплицевыми матрицами.

Рассмотренные выше интегральные уравнения нередко встречаются при решении различных задач электродинамики. Например, с ними приходится иметь дело при расчете сложных антенных систем, состоящих из большого числа параллельно расположенных вибраторов, при исследовании дифракции на телах, имеющих много осей симметрии и т. п. Важно подчеркнуть, что быстрое прямое решение исследованных в настоящей заметке задач позволяет строить эффективные итерационные процессы и для решения других, в некотором смысле «близких» задач.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Березин С. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. М., Физматгиз, 1959.
2. Воеводина С. Н. Решение систем уравнений с клеточно-теплицевыми матрицами. Настоящий сборник.

С. Н. ВОЕВОДИНА

### РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С КЛЕТЧНО-ТЕПЛИЦЕВЫМИ МАТРИЦАМИ

Пусть матрица разбита на квадратные клетки  $a_{ij}$ . Будем называть ее клеточно-теплицевой, если все клетки матрицы удовлетворяют равенствам

$$a_{ij} = a_{st}$$

при  $i-j=s-t$ . В настоящей заметке рассматриваются два прямых метода решения систем линейных алгебраических уравне-

ний с клеточно-теплицевыми матрицами. Эти методы весьма эффективны как по скорости реализации, так и по используемой памяти ЭВМ.

Итак, предположим, что решается система линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \quad (1)$$

где матрица  $A$  и векторы  $x, b$  представлены в виде

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_p \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{p-1} \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & \dots & a_{p-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{-p} & a_{-p+1} & a_{-p+2} & \dots & a_0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}$$

Здесь  $a_{-p}, \dots, a_0, \dots, a_p$  — квадратные клетки размера  $m \times m$ ,  $x_0, \dots, x_p, b_0, \dots, b_p$  — векторы размера  $m \times 1$ . Всюду ниже под элементами матриц и векторов мы будем в действительности подразумевать клетки и векторы таких же размеров  $m \times m$  и  $m \times 1$ .

Рассмотрим усеченные системы линейных алгебраических уравнений

$$A_k y_k = d_k,$$

где

$$A_k = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_k \\ a_{-1} & a_0 & \dots & a_{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{-k} & a_{-k+1} & \dots & a_0 \end{pmatrix}, \quad y_k = \begin{pmatrix} y_{0,k} \\ y_{1,k} \\ \vdots \\ y_{k,k} \end{pmatrix}, \quad d_k = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что вектор  $x$  совпадает с вектором  $y_p$ . Кроме этого,  $y_0 = A_0^{-1} b_0$ . Если мы найдем рекуррентные соотношения, позволяющие вычислять  $y_k$  через  $y_{k-1}$  для всех  $k$ , то вектор  $x$  может быть вычислен с их помощью.

Представим вектор  $y_k$  в виде следующей суммы двух векторов:

$$\begin{bmatrix} y_{0,k} \\ y_{1,k} \\ \vdots \\ y_{k-1,k} \\ y_{k,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{0,k-1} \\ y_{1,k-1} \\ \vdots \\ y_{k-1,k-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{0,k} \\ z_{1,k} \\ \vdots \\ z_{k-1,k} \\ z_{k,k} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

одной из половин области  $L$  и имеющих ядра вида  $K(P, M) \pm K(P', M)$ , где  $P'$  есть зеркальное отражение точки  $P$  относительно  $S$ .

Выполнение данного приема весьма целесообразно с точки зрения эффективного использования памяти ЭВМ, так как позволяет заменить решение одной алгебраической системы решением двух систем, но вдвое меньшего порядка.

Допустим, что ядро  $K(P, M)$  инвариантно относительно сдвига вдоль оси  $S$ . Это условие заведомо будет выполняться, например, в том случае, когда  $K(P, M)$  зависит только от расстояния между точками. Ядра  $K(P, M) \pm K(P', M)$  уже не будут зависеть только от расстояния, но, тем не менее, они будут инвариантными относительно сдвига вдоль  $S$ . Если область  $L$  получена путем применения последовательных сдвигов вдоль  $S$  некоторой своей части, то при решении интегральных уравнений, заданных на одной из половин  $L$  и имеющих ядра  $K(P, M) \pm K(P', M)$ , мы снова получим системы с клеточно-теплицевыми матрицами.

Рассмотренные выше интегральные уравнения нередко встречаются при решении различных задач электродинамики. Например, с ними приходится иметь дело при расчете сложных антенных систем, состоящих из большого числа параллельно расположенных вибраторов, при исследовании дифракции на телах, имеющих много осей симметрии и т. п. Важно подчеркнуть, что быстрое прямое решение исследованных в настоящей заметке задач позволяет строить эффективные итерационные процессы и для решения других, в некотором смысле «близких» задач.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Березин С. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. М., Физматгиз, 1959.
2. Воеводина С. Н. Решение систем уравнений с клеточно-теплицевыми матрицами. Настоящий сборник.

С. Н. ВОЕВОДИНА

### РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С КЛЕТЧНО-ТЕПЛИЦЕВЫМИ МАТРИЦАМИ

Пусть матрица разбита на квадратные клетки  $a_{ij}$ . Будем называть ее клеточно-теплицевой, если все клетки матрицы удовлетворяют равенствам

$$a_{ij} = a_{st}$$

при  $i-j=s-t$ . В настоящей заметке рассматриваются два прямых метода решения систем линейных алгебраических уравне-

ний с клеточно-теплицевыми матрицами. Эти методы весьма эффективны как по скорости реализации, так и по используемой памяти ЭВМ.

Итак, предположим, что решается система линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \quad (1)$$

где матрица  $A$  и векторы  $x, b$  представлены в виде

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_p \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{p-1} \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & \dots & a_{p-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{-p} & a_{-p+1} & a_{-p+2} & \dots & a_0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}$$

Здесь  $a_{-p}, \dots, a_0, \dots, a_p$  — квадратные клетки размера  $m \times m$ ,  $x_0, \dots, x_p, b_0, \dots, b_p$  — векторы размера  $m \times 1$ . Всюду ниже под элементами матриц и векторов мы будем в действительности подразумевать клетки и векторы таких же размеров  $m \times m$  и  $m \times 1$ .

Рассмотрим усеченные системы линейных алгебраических уравнений

$$A_k y_k = d_k,$$

где

$$A_k = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_k \\ a_{-1} & a_0 & \dots & a_{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{-k} & a_{-k+1} & \dots & a_0 \end{pmatrix}, \quad y_k = \begin{pmatrix} y_{0,k} \\ y_{1,k} \\ \vdots \\ y_{k,k} \end{pmatrix}, \quad d_k = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что вектор  $x$  совпадает с вектором  $y_p$ . Кроме этого,  $y_0 = A_0^{-1} b_0$ . Если мы найдем рекуррентные соотношения, позволяющие вычислять  $y_k$  через  $y_{k-1}$  для всех  $k$ , то вектор  $x$  может быть вычислен с их помощью.

Представим вектор  $y_k$  в виде следующей суммы двух векторов:

$$\begin{bmatrix} y_{0,k} \\ y_{1,k} \\ \vdots \\ y_{k-1,k} \\ y_{k,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{0,k-1} \\ y_{1,k-1} \\ \vdots \\ y_{k-1,k-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{0,k} \\ z_{1,k} \\ \vdots \\ z_{k-1,k} \\ z_{k,k} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Подставив это выражение в уравнение  $A_k y_k = d_k$  и учитывая, что вектор  $y_{k-1}$  удовлетворяет уравнению  $A_{k-1} y_{k-1} = d_{k-1}$ , заключаем, что неизвестный вектор  $z_k$  с элементами  $z_{0k}, \dots, z_{kk}$  из (3) удовлетворяет системе:

$$A_k z_k = f_k.$$

Здесь вектор  $f_k$  имеет вид

$$f_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_{k,k} \end{pmatrix}.$$

При этом

$$f_{k,k} = b_k - \sum_{l=k}^{-1} a_l y_{l+k, k-l}.$$

Таким образом, вектор  $z_k$  есть линейная комбинация последних  $m$  столбцов матрицы  $A_k^{-1}$ , координаты вектора  $f_{k,k}$  являются коэффициентами данной линейной комбинации. Следовательно, для рекуррентного вычисления векторов  $y_k$  достаточно рекуррентно вычислять последний клеточный столбец матрицы  $A_k^{-1}$ . Покажем, как это можно сделать.

Обозначим через  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  соответственно первый и последний клеточные столбцы матрицы  $A_k^{-1}$ .

Пусть

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} \alpha_{0,k} \\ \alpha_{1,k} \\ \vdots \\ \alpha_{k,k} \end{pmatrix}, \quad \beta_k = \begin{pmatrix} \beta_{0,k} \\ \beta_{1,k} \\ \vdots \\ \beta_{k,k} \end{pmatrix}.$$

Ясно, что при  $k=0$  эти столбцы совпадают и содержат лишь одну клетку  $a_0^{-1}$ . Предположим, что известны  $\alpha_{k-1}$  и  $\beta_{k-1}$ . Будем искать  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  в таком виде:

$$\alpha_k = \begin{bmatrix} \alpha_{0,k-1} \\ \alpha_{1,k-1} \\ \vdots \\ \alpha_{k-1,k-1} \\ 0 \end{bmatrix} U + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_{0,k-1} \\ \vdots \\ \beta_{k-2,k-1} \\ \beta_{k-1,k-1} \end{bmatrix} V,$$

$$\beta_k = \begin{bmatrix} \alpha_{0,k-1} \\ \alpha_{1,k-1} \\ \vdots \\ \alpha_{k-1,k-1} \\ 0 \end{bmatrix} R + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_{0,k-1} \\ \vdots \\ \beta_{k-2,k-1} \\ \beta_{k-1,k-1} \end{bmatrix} S,$$

где  $U, V$  и  $R, S$  — матрицы размеров  $m \times m$ , подлежащие определению. Так как  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  являются клеточными столбцами обратной матрицы  $A_k^{-1}$ , то

$$A_k \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_{0,k-1} \\ \alpha_{1,k-1} \\ \vdots \\ \alpha_{k-1,k-1} \\ 0 \end{bmatrix} U + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_{0,k-1} \\ \vdots \\ \beta_{k-2,k-1} \\ \beta_{k-1,k-1} \end{bmatrix} V \right\} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$A_k \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_{0,k-1} \\ \alpha_{1,k-1} \\ \vdots \\ \alpha_{k-1,k-1} \\ 0 \end{bmatrix} R + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_{0,k-1} \\ \vdots \\ \beta_{k-2,k-1} \\ \beta_{k-1,k-1} \end{bmatrix} S \right\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ E \end{bmatrix}.$$

Здесь  $E$  — единичная матрица размеров  $m \times m$ . Отсюда получаем уравнения для определения искомых матриц. Именно,

$$\left. \begin{aligned} U + F_2 V &= E \\ F_1 U + V &= 0 \\ R + F_2 S &= 0 \\ F_1 R + S &= E \end{aligned} \right\}$$

при этом

$$F_1 = \sum_{t=k}^{-1} a_t \alpha_{t+k, k-1},$$

$$F_2 = \sum_{t=-k}^{-1} a_{-t} \beta_{-t-1, k-1}. \quad (4)$$

Теперь находим

$$\begin{aligned} U &= (E - F_2 F_1)^{-1}, & V &= -F_1 (E - F_2 F_1)^{-1}, \\ R &= -F_2 (E - F_1 F_2)^{-1}, & S &= (E - F_1 F_2)^{-1}. \end{aligned}$$

Рассмотренный метод решения систем с клеточно-теплицевыми матрицами весьма эффективен по сравнению с другими прямыми методами. Для его реализации при больших  $p$  необходимо выполнить лишь порядка  $m^3 p^2$  арифметических операций, занимая при этом около  $4 m^2 p$  ячеек памяти ЭВМ. При  $m=1$  он близок к методам, описанным в [1], отличаясь от них вычислительной схемой.

В некоторых практически важных случаях можно уменьшить объем вычислений и необходимую память ЭВМ примерно в два

раза. Пусть клетки матрицы связаны между собой соотношениями

$$a_{-i} = la_{in} \quad (5)$$

для каких-то матриц перестановок  $l$  и  $n$ , не зависящих от индекса  $i$  при  $0 \leq i \leq p$ . Так как матрицы перестановок удовлетворяют равенствам

$$l^2 = n^2 = E,$$

то легко проверить справедливость соотношения

$$A = PLANP. \quad (6)$$

Здесь  $L$ ,  $N$ ,  $P$  — клеточные матрицы строения

$$L = \begin{pmatrix} l & 0 \\ & \cdot \\ 0 & l \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} n & 0 \\ & \cdot \\ 0 & n \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}.$$

Из (6) вытекает соответствующее соотношение для матрицы  $A^{-1}$ . Именно,

$$A^{-1} = PNA^{-1}LP.$$

Теперь нетрудно установить, что при всех  $k$  клетки первого и последнего клеточных столбцов матриц  $A_{k-1}^{-1}$  связаны между собой равенствами

$$a_{i,k-1} = n\beta_{k-1-i,k-1}l$$

при  $0 \leq i \leq k-1$ . Это означает, что можно не вычислять и не запоминать первые клеточные столбцы матриц  $A_{k-1}^{-1}$ . Кроме этого из (4), (5) следует соотношение, связывающее матрицы  $F_1$  и  $F_2$ . Именно,

$$F_1 = lF_2l.$$

Таким образом, возможность экономии ресурсов ЭВМ действительно имеет место.

Рассмотрим один частный случай клеточно-теплицевой матрицы. Будем называть матрицу  $A$  из (2) клеточно-циркулянтной, если ее поддиагональные клетки удовлетворяют соотношениям

$$a_{-i} = a_{p-i+1}.$$

Для решения систем уравнений с такими матрицами можно предложить более эффективный метод.

Пусть  $\varepsilon$  есть корень  $(p+1)$ -й степени из единицы. Построим матрицу

$$g = a_0 + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \dots + \varepsilon^p a_p. \quad (7)$$

Так как  $\varepsilon^{p+1} = 1$ , то

$$\varepsilon g = a_p + \varepsilon a_0 + \varepsilon^2 a_1 + \dots + \varepsilon^p a_{p-1},$$

$$\varepsilon^2 g = a_{p-1} + \varepsilon a_p + \varepsilon^2 a_0 + \dots + \varepsilon^p a_{p-2},$$

$$\dots$$

$$\varepsilon^p g = a_1 + \varepsilon a_2 + \varepsilon^2 a_3 + \dots + \varepsilon^p a_0.$$

В матричной записи эти равенства означают, что

$$A \begin{bmatrix} E \\ \varepsilon E \\ \varepsilon^2 E \\ \vdots \\ \varepsilon^p E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ \varepsilon E \\ \varepsilon^2 E \\ \vdots \\ \varepsilon^p E \end{bmatrix} g. \quad (8)$$

Обозначим через  $\varepsilon_0$  первообразный корень. Вся совокупность корней описывается числами  $\varepsilon_0, \varepsilon_0^2, \dots, \varepsilon_0^{p+1}$ . Пусть  $g_0, g_1, \dots, g_p$  есть соответствующая совокупность матриц, вычисленных согласно (7). Построим матрицу

$$Q = \begin{bmatrix} E & E & \dots & E \\ \varepsilon_0 E & \varepsilon_0^2 E & \dots & \varepsilon_0^{p+1} E \\ \varepsilon_0^2 E & \varepsilon_0^4 E & \dots & \varepsilon_0^{2(p+1)} E \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_0^p E & \varepsilon_0^{2p} E & \dots & \varepsilon_0^{(p+1)^2} E \end{bmatrix}.$$

Согласно (7) имеем

$$\begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_p \end{pmatrix} = Q' \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Матрица  $(p+1)^{-1} Q$  является унитарной. Поэтому из (8) вытекает справедливость такого разложения для матрицы  $A$ :

$$A = \frac{1}{p+1} QGQ^*.$$

Здесь  $G$  есть клеточно-диагональная матрица:

$$G = \begin{pmatrix} g_0 & & 0 \\ & g_1 & \\ 0 & & g_p \end{pmatrix}.$$



Если с клеточно-циркулянтной матрицей решается система линейных алгебраических уравнений (1), то

$$x = \frac{1}{p+1} QG^{-1}Q^*b. \quad (10)$$

Для реализации формул (9), (10) удобнее всего воспользоваться алгоритмом быстрого преобразования Фурье [2]. В этом случае для решения системы необходимо выполнить порядка  $m^2p(m+lg_2p)$  арифметических операций, если  $p$  есть некоторая степень числа 2. Прямое вычисление по формулам (9), (10) реализуется не более чем за  $2m^2p(m+p)$  арифметических операций. В обоих случаях для решения системы требуется около  $m^2p$  ячеек памяти ЭВМ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Чепурина И. В. Решение системы с трициклоидной матрицей в пакете линейной алгебры. В сб.: «Численный анализ на Фортране», вып. 3. Изд-во МГУ, 1973, стр. 152.
2. IEEE Trans. Audio and Electroacoustics. AV-15,2 (June, 1967).

В. Ф. АПЕЛЬЦИН

### ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ НА СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОМ ТЕЛЕ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

#### § 1. ВЕКТОРНЫЙ СЛУЧАЙ

Нашей физической моделью является сферически-симметричное тело, с поверхностью типа металлической, окруженное средой с  $\sigma$  и  $\epsilon$  переменными, однако не зависящими от азимутального угла  $\varphi$ . Возбуждение также предполагается сферически-симметричным. Будем считать, что в нашей среде  $\mu=1$ . Пусть, кроме того,  $I^{(ст)}=0$ , — отсутствуют сторонние токи. Мы будем рассматривать стационарный случай, т. е. зависимость от времени всех функций имеет вид:  $Fe^{-i\omega t}$ . В этом случае система уравнений Максвелла выписывается следующим образом:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma - i\omega\epsilon}{c} \mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{H}, \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  — не зависят от времени. Возьмем теперь выражение для  $\operatorname{rot}$  в сферических координатах и распишем систему (1.1) по

компонентам. Тогда первое из уравнений (1.1) представляется следующими тремя уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta H_\varphi) &= \frac{4\pi\sigma - i\omega\epsilon}{c} E_\rho; \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\varphi) &= \frac{4\pi\sigma - i\omega\epsilon}{c} E_\vartheta; \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\vartheta) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \vartheta} H_\rho &= \frac{4\pi\sigma - i\omega\epsilon}{c} E_\varphi. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Точно так же второе уравнение (1.1) сведется к следующим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta E_\varphi) &= \frac{i\omega}{c} H_\rho; & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\varphi) &= \frac{i\omega}{c} H_\vartheta; \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\vartheta) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \vartheta} E_\rho &= \frac{i\omega}{c} H_\varphi. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Мы можем рассмотреть отдельно два типа поляризации:  $\{E_\rho; E_\vartheta; H_\varphi\}$  — поле электрического типа и  $\{E_\varphi; H_\rho; H_\vartheta\}$  — поле магнитного типа. Все прочие случаи могут быть представлены комбинациями этих двух. В первом случае, подставив в третье уравнение системы (1.3) выражения для  $E_\vartheta$  и  $E_\rho$  из первых двух уравнений (1.2), получим одно уравнение относительно  $H_\varphi$ :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[ \left( \frac{1}{k^2} \right) \frac{1}{\rho \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta H_\varphi) \right] - \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \left( \frac{1}{k^2} \right) \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\varphi) \right] = H_\varphi, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где обозначено  $k^2 = \frac{\omega^2\epsilon + i4\pi\sigma\omega}{c^2}$ .

В случае поляризации  $\{H_\rho; H_\vartheta; E_\varphi\}$  точно так же, из третьего уравнения (1.2) и первых двух из (1.3), получим

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (\rho E_\varphi) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta E_\varphi) \right) + k^2 E_\varphi = 0. \quad (1.5)$$

Рассмотрим вначале уравнение (1.5). В простейших случаях, когда  $k^2 = \text{const}$  или  $k^2 = f(\rho)$ , можно ввести потенциал  $E_\varphi = \frac{du}{d\vartheta}$ , аналогично тому, как это сделано для случая сферы в [4]. Тогда (1.5) сводится к уравнению Гельмгольца, относительно скалярной функции  $u$

$$\Delta_{\rho, \vartheta} u + k^2 u = 0.$$

Граничное условие получается из условия равенства нулю на поверхности тела тангенциальной составляющей полного поля  $\mathbf{E}$ , которая в данном случае есть  $E_\varphi$ :

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ ГЕОФИЗИКИ

В. И. ДМИТРИЕВ, Н. А. МЕРЩИКОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКОГО  
ЗОНДИРОВАНИЯ ГРАДИЕНТНЫХ СРЕД

Удельное сопротивление глубинных слоев Земли, будучи функцией температуры, плавно изменяется с глубиной. Поэтому моделирование геоэлектрического разреза Земли слоистой средой с постоянной проводимостью каждого слоя не всегда правомерно. В связи с этим возникает необходимость рассмотрения магнитотеллурического зондирования градиентных сред. В работе [1] исследовалось поведение кривых МТЗ в слоистой среде, где проводимость нижнего полупространства экспоненциально возрастала с глубиной. В настоящей статье рассматривается магнитотеллурическое зондирование слоистой среды, содержащей промежуточный градиентный проводящий слой.

Будем рассматривать в качестве основной модели глубинного МТЗ промежуточного проводящегося слоя геоэлектрический разрез со следующим изменением проводимости:

$$\sigma(z) = \begin{cases} \sigma_0 = 0 & \text{при } z < 0 & \text{воздух,} \\ \sigma_1 & \text{при } 0 < z < h & \text{слой наносов,} \\ \sigma_2 \ll \sigma_1 & \text{при } h < z < H & \text{фундамент,} \\ \sigma_3 e^{\pm 2 \frac{z-H}{l}} & \text{при } H < z < H + h_c & \text{промежуточный слой,} \\ \sigma_4 = 0 & \text{при } H + h_c < z < \infty & \text{подстилающее основание.} \end{cases}$$

Кажущееся сопротивление, как известно, равно

$$\rho_k = \omega \mu_0 \frac{|E_x(z=0)|^2}{|E'_x(z=0)|^2}, \quad (1)$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Г/м — магнитная проницаемость вакуума, а  $E_x(z)$  — электрическое поле, являющееся решением задачи

$$E_x'' + k^2(z) E_x = 0 \quad \text{при } 0 < z < H + h_c, \quad (2)$$

$$k^2(z) = i \omega \mu_0 \sigma(z),$$

$$E_x(z=0) = E_0; \quad [E_x] = [E_x'] = 0,$$

$$E_x'(z) = 0 \quad \text{при } z = H + h_c.$$

Рассмотрим вначале решение (2) на участке  $H < z < H + h_c$ , где мы имеем уравнение с переменными коэффициентами:

$$E_x''(z) + i \omega \mu_0 \sigma_3 e^{\alpha \frac{2(z-H)}{l}} E_x(z) = 0; \quad \alpha = \pm 1,$$

общее решение которого имеет вид

$$E_x(z) = A J_0(k_3 l e^{\alpha \frac{(z-H)}{l}}) + B N_0(k_3 l e^{\alpha \frac{(z-H)}{l}}),$$

где  $k_3 = \sqrt{i \omega \mu_0 \sigma_3}$ .

Используя граничное условие при  $z = H + h_c$  (2), найдем при  $H < z < H + h_c$

$$E_x(z) = C \left\{ J_0(k_3 l e^{\alpha \frac{(z-H)}{l}}) N_1(k_3 l e^{\alpha \frac{h_c}{l}}) - J_1(k_3 l e^{\alpha \frac{h_c}{l}}) N_0(k_3 l e^{\alpha \frac{(z-H)}{l}}) \right\},$$

Откуда получим условие при  $z = H$

$$\frac{\partial E_x(z=H)}{\partial z} + \frac{k_3}{Z_c} E_x(z=0) = 0, \quad (3)$$

где

$$Z_c = \alpha \frac{J_0(k_3 l) N_1(k_3 l e^{\alpha \frac{h_c}{l}}) - J_1(k_3 l e^{\alpha \frac{h_c}{l}}) N_0(k_3 l)}{J_1(k_3 l) N_1(k_3 l e^{\alpha \frac{h_c}{l}}) - J_1(k_3 l e^{\alpha \frac{h_c}{l}}) N_1(k_3 l)}. \quad (4)$$

Теперь мы можем решить задачу (2) на участке  $0 < z < H$  как обычную задачу с кусочно-постоянным распределением проводимости, и получить кажущееся сопротивление в виде

$$\rho_k / \rho_1 = \text{mod} \left\{ \frac{\sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}} Z + \text{tg } k_1 h}{1 - \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}} Z \text{tg } k_1 h} \right\}^2, \quad (5)$$

где

$$Z = \frac{\sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_3}} Z_c + \text{tg } k_2 (H-h)}{1 - \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_3}} Z_c \text{tg } k_2 (H-h)}. \quad (6)$$

Формулы (4)–(6) позволяют нам рассчитать кривую МТЗ для зондирования четырехслойного разреза, содержащего градиентный слой.

Рассмотрим вначале низкочастотную асимптотику  $\rho_k$ . Если  $|k_1| h \ll 1$  и  $|k_2| (H-h) \ll 1$ , то из (5)–(6) получаем

$$\rho_k / \rho_1 = \text{mod} \left\{ \frac{\sigma_1 h \left[ 1 + \frac{k_3 H}{Z_c} \right]}{\sigma_1 h + \sigma_3 (H-h) - \frac{\sigma_3}{k_3 Z_c}} \right\}^2 \cdot \frac{1}{|k_1|^2 h^2}. \quad (7)$$

При  $|k_3| l \ll 1$ , если  $\alpha = -1$  (убывающая с глубиной проводимость в слое), мы получим, согласно (4)

$$-\frac{\sigma_3}{k_3 Z_c} = \frac{\sigma_3 l}{2} \left[ -e^{-2 \frac{h_c}{l}} + 1 \right] = \sigma_3 \int_0^{h_c} e^{-\frac{2z}{l}} dz = S_c, \quad (8)$$

где  $S_c$  — продольная проводимость слоя.

Таким образом, мы получаем на кривой МТЗ линию  $S$ . Такой же результат получается и при  $\alpha = 1$  (возрастающая с глубиной проводимость слоя), но уже при выполнении условий  $|k_3| l \ll 1$  и  $k_3 | l e^{\frac{h_c}{l}} \ll 1$ , т. е. накладывается условие на мощность слоя

$$h_c \ll l \ln \frac{1}{|k_3| l}. \quad (9)$$

Если условие (9) не выполняется, то линии  $S$  кривой МТЗ мы не получаем. В случае большой мощности слоя  $h_c$  при возрастающей проводимости слоя с глубиной возможна другая асимптота, а именно:

$$\text{при } h_c \gg l \ln \frac{1}{|k_3| l}; \quad |k_3| l \ll 1, \quad Z_c = k_3 l \ln \frac{1}{|k_3| l}.$$

Откуда, согласно (7), получим

$$\rho_k / \rho_1 = |k_1|^2 \left\{ H + l \ln \frac{1}{|k_3| l} \right\}^2. \quad (10)$$

Именно этот результат был получен в [1], т. е. показано, что глубина до полупространства с экспоненциально-возрастающей проводимостью, определяемая по кривой МТЗ, равна не  $H$ , а неко-

торой эффективной величине  $H + l \ln \frac{1}{|k_3|l}$ , которая зависит от того, в какой части частотного диапазона находится линия  $H$  кривой МТЗ.

Рассмотрев низкочастотные асимптоты кривой МТЗ для градиентного слоя, перейдем к анализу всей кривой с целью оценки влияния градиента проводимости в слое на кривые МТЗ. Для этого сравним расчет для градиентного слоя по формулам (4)–(6) с расчетами для однородного слоя с тем же значением продольной проводимости слоя  $S_c$ . Уже из анализа асимптотик можно сделать вывод о том, что будет сильное влияние градиента проводимости в случае возрастания проводимости с глубиной ( $\alpha = +1$ ) и более слабое при  $\alpha = -1$  (убывание проводимости с глубиной). При расчетах будем считать  $\sigma_2 = 0$  и пользоваться безразмерными параметрами: относительная проводимость градиентного слоя при  $z = H$  равна  $\mu = \frac{\sigma_3}{\sigma_1}$ ; относительная мощность второго слоя  $v_2 = \frac{H-h}{h}$ ; относительная мощность градиентного слоя  $v_c = \frac{h_c}{h}$ ; скорость изменения проводимости  $x = \frac{l}{h}$ ; относительная длина волны в первом слое

$$\xi = \frac{\Lambda_1}{h}, \text{ где } \Lambda_1 = \frac{2\pi}{\operatorname{Re} k_1}.$$

Рассмотрим вначале градиентный слой с убывающей проводимостью ( $\alpha = -1$ ). Проведем сравнение градиентных кривых с эквивалентными однородными. Однородную кривую будем считать эквивалентной данной градиентной кривой для разреза с убывающей проводимостью промежуточного слоя, если однородная кривая рассчитана для разреза, в котором градиентный слой заменяется однородным той же продольной проводимости, а выбор  $\sigma_3, h_3$  проведен, исходя из следующих соображений.

Если бы промежуточный слой был однородным с параметрами  $\sigma_3, h_3$ , то  $Z_c$  в этом случае имело бы вид

$$Z_c^0 = -\frac{1}{\operatorname{tg} k_3 h_3}.$$

В низкочастотной части кривой кажущегося сопротивления  $|k_3|l \ll 1$

$$Z_c^0 \approx -\frac{1}{k_3 h_3} \left\{ 1 - \frac{k_3^2 h_3^2}{3} \right\}. \quad (11)$$

В случае с экспоненциально убывающей проводимостью промежуточного слоя выражение для  $Z_c$  дает формула (4) при  $\alpha = -1$ . Напишем низкочастотную асимптоту  $Z_c$  в этом случае. Следует при этом иметь в виду, что практически допустимыми являются

как большие, так и малые значения параметров  $h_c$  и  $l$ . Введем новый параметр

$$\Theta = k_3 l \left( 1 - e^{-\frac{h_c}{l}} \right). \quad (12)$$

В низкочастотной части кривой (4) выполняется хотя бы одно из условий:

$$|k_3|l \ll 1; \quad |k_3| h_c \ll 1.$$

При этом параметр (12) является малым. Разложим выражение  $Z_c$  в (4) по малому параметру  $\Theta$ . Будем иметь при  $|\Theta| \ll 1$

$$Z_c \approx -\frac{1 - \frac{\Theta^2}{2}}{\Theta \left[ 1 - \frac{\Theta}{2k_3 l} - \frac{\Theta^2}{6} \right]}.$$

Подставляя выражение (12) в последнюю формулу, получим при  $|\Theta| \ll 1$

$$Z_c \approx -\frac{1}{\frac{k_3 l}{2} \left( 1 - e^{-\frac{2h_c}{l}} \right)} \left\{ 1 - \frac{k_3^2 l^2 \left( 1 - e^{-\frac{h_c}{l}} \right)^2 \left( 1 + 3e^{-\frac{h_c}{l}} \right)}{6 \left( 1 + e^{-\frac{h_c}{l}} \right)} \right\}. \quad (13)$$

Из сравнения (11) и (13) напомним следующие соотношения, позволяющие найти параметры однородного эквивалентного слоя:

$$\begin{aligned} \sigma_3 h_3 &= \frac{\sigma_3 l}{2} \left( 1 - e^{-\frac{2h_c}{l}} \right), \\ \sigma_3 h_3^2 &= \frac{\sigma_3 l^2}{2} \frac{\left( 1 - e^{-\frac{h_c}{l}} \right)^2 \cdot \left( 1 + 3e^{-\frac{h_c}{l}} \right)}{\left( 1 + e^{-\frac{h_c}{l}} \right)}, \end{aligned}$$

откуда имеем

$$h_3 = l \frac{\left( 1 - e^{-\frac{h_c}{l}} \right) \left( 1 + 3e^{-\frac{h_c}{l}} \right)}{\left( 1 + e^{-\frac{h_c}{l}} \right)^2}, \quad (14)$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_3}{2} \frac{\left( 1 + e^{-\frac{h_c}{l}} \right)^2}{\left( 1 + 3e^{-\frac{h_c}{l}} \right)}. \quad (15)$$

Если  $l \rightarrow \infty$ , что означает вырождение градиентного слоя в однородный слой проводимости  $\sigma_3$  и мощности  $h_c$ , формулы (14), (15) дают

$$\text{при } l \rightarrow \infty \quad h_3 = h_c, \quad \sigma_3 = \sigma_3.$$

При  $h_c \rightarrow \infty$  градиентный слой переходит в градиентное полупространство с экспоненциально-убывающей проводимостью. При этом из формул (14), (15) имеем

$$\text{при } h_c \rightarrow \infty \quad h_3 = l; \quad \sigma_3 = \frac{\sigma_3}{2}.$$

Понятие эквивалентности, введенное здесь, предполагает только одинаковое поведение кривых в области низкочастотной асимптоты. Чтобы оценить близость градиентной кривой к эквивалентной однородной, следует провести расчеты и сравнение обеих кривых во всей частотной области.

Для выяснения характера поведения градиентной кривой кажущегося сопротивления в случае убывающего градиентного слоя были проведены сравнительные расчеты для градиентных и эквивалентных однородных кривых с параметрами, вычисленными по формулам (14), (15). При этом оказалось, что градиентные кривые практически мало

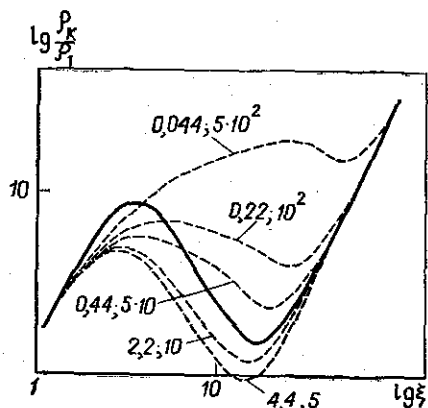


Рис. 1.  $v_2=9$ ,  $\mu=0,001$ ,  $v_c=10$

отличаются от эквивалентных однородных кривых.

На рис. 3 приведены для примера градиентные и эквивалентные однородные кривые кажущегося сопротивления  $\rho_k/\rho_1$ . Параметры разрезов таковы:  $v_2=9$ ,  $v_c=20$ , кривые оцифрованы по  $(\mu_0, v_0)$ . Из рис. 1 видно, что не существует однородной кривой, вые.

Таким образом, градиентность промежуточного слоя с экспоненциально убывающей проводимостью не может быть обнаружена из кривой кажущегося сопротивления.

Перейдем теперь к рассмотрению градиентного слоя с возрастающей проводимостью ( $\alpha=1$ ). Для исследования влияния такой градиентности на кривые МТЗ были проведены расчеты при различных соотношениях параметров геологического разреза. В этом случае эквивалентные кривые будем рассчитывать для разрезов, в которых градиентный слой заменен однородным, причем параметры этого однородного слоя выбираются по формулам

$$v_3 = v_c; \quad \mu_3 = \frac{S_c}{S_1 v_c}. \quad (16)$$

Условие  $\frac{x}{v_c} \gg 1$  говорит о слабом характере градиентности промежуточного слоя. По мере уменьшения этого параметра градиентность слоя усиливается, и отличие градиентных кривых от эквивалентных однородных становится более существенным.

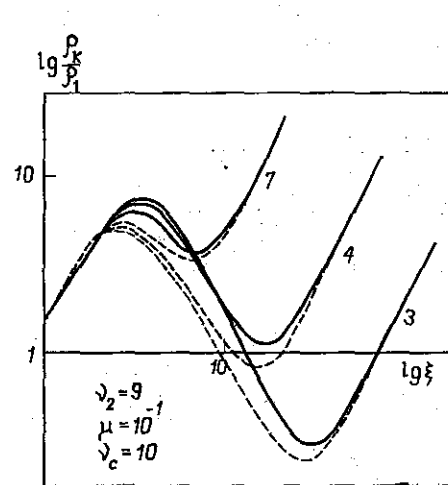


Рис. 2.  $v_2=9$ ,  $\mu=0,1$ ,  $v_c=10$

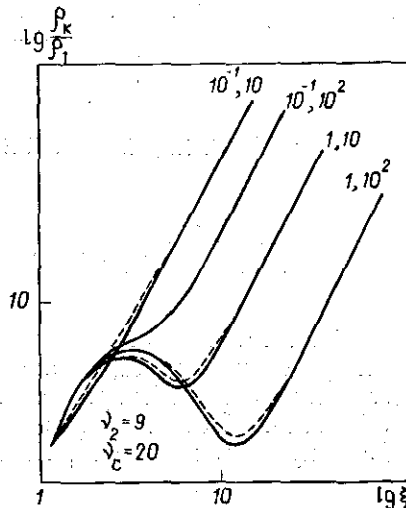


Рис. 3.  $v_2=9$ ,  $v_c=20$

Один из примеров сравнения градиентных и однородных кривых приведен на рис. 2. Кривые вычислены при следующих параметрах:  $v_2=9$ ;  $\mu=10^{-1}$ ;  $v_c=10$ ; и оцифрованы по  $x$ . Пунктиром приведены соответствующие эквивалентные однородные кривые, параметры которых выбраны по формулам (16). Как видно из рис. 2, градиентные кривые достаточно сильно отличаются от выбранных эквивалентных однородных кривых. Естественно встает вопрос, не существует ли других однородных кривых, более близких к данным градиентным. Выбор таких однородных кривых должен происходить с учетом того, что продольная проводимость  $S_c$  слоя остается постоянной.

На рис. 1 приведена градиентная кривая  $\rho_k/\rho_1$  при  $\mu=10^{-3}$ ;  $v_2=9$ ;  $v_c=10$ ;  $x=2$ . Пунктиром изображены однородные кривые для разрезов, отличающихся между собой значениями  $\mu$  и  $v$  (при этом  $\mu_{\text{экв}} v_{\text{экв}} = \frac{S_c}{S_1}$ ). Пунктирные кривые оцифрованы по  $(\mu_0, v_0)$ . Из рис. 1 видно, что не существует однородной кривой, близкой к данной градиентной. Из всего сказанного можно сде-

лать вывод о том, что для градиентного слоя с возрастающей проводимостью поведение градиентной кривой может сильно отличаться от плоскооднородной, что делает принципиально возможной оценку скорости возрастания проводимости промежуточного градиентного проводящего слоя.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бердический М. М., Дмитриев В. И., Мерщикова И. А. Исследование градиентных сред при глубинном электромагнитном зондировании. «Изв. АН СССР», сер. Физика Земли, № 6, 1974.

В. И. ДМИТРИЕВ, Т. С. ХРЫЧКОВА

### О ВЛИЯНИИ ИЗМЕНЕНИЯ МОЩНОСТИ ПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ НА ГЛУБИННОЕ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКОЕ ЗОНДИРОВАНИЕ

В качестве основной модели мы рассмотрим трехслойный геоэлектрический разрез, верхний слой которого имеет переменную толщину (рис. 1). Второй слой — фундамент имеет конечную проводимость. Подстилающее полупространство — мантия имеет идеальную проводимость. Если толщина верхнего слоя постоянна  $h(y) = \text{const}$ , то низкочастотная асимптотика импеданса равна

$$Z = \frac{E_y}{E_x} = -i\omega\mu H \quad \text{при } \omega \rightarrow 0, \quad (1)$$

что дает возможность определить по измерениям импеданса глубину до мантии. При наличии поверхностной неоднородности и при  $\sigma_2 = 0$  асимптотика (1) изменяется и имеет вид

$$Z = -i\omega\mu H \frac{S_c}{S(y)}, \quad (2)$$

где  $S(y) = \sigma_1 h(y)$  — переменная продольная проводимость слоя,  $S_c$  — средняя постоянная продольная проводимость слоя. Такое влияние на низкочастотную асимптотику магнитотеллурического поля переменной продольной проводимости носит название  $S$ -эффекта. Это приводит в силу неизвестности  $S_c$  к большим ошибкам в определении глубины до мантии. Если имеется конечная про-

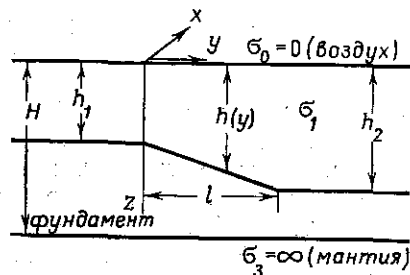


Рис. 1

димость фундамента  $\sigma_2 \neq 0$ , то влияние  $S$ -эффекта уменьшается. Именно этому вопросу и посвящена настоящая статья. Мы ответим на два вопроса:

- 1) При каких малых градиентах  $h(y)$  влиянием  $S$ -эффекта можно пренебречь?
- 2) На каком расстоянии от неоднородности низкочастотная асимптотика импеданса выходит на свое значение для слоистой среды (1)?

При решении задачи мы будем опираться на приближенные граничные условия на тонком слое, полученные в [1]. Применение этих условий правомерно, если  $|k_1| h \ll 1$ ,  $|k_2| (H-h) \ll 1$  и  $\text{grad} h \ll 1$ .

В случае  $H$ -поляризации электромагнитного поля  $\vec{E} = \{0, E_y, E_z\}$ ,  $\vec{H} = \{H_x, 0, 0\}$ , согласно [1], приближенные граничные условия имеют вид: на первом слое,  $0 \leq z \leq h(y)$

$$\begin{cases} H_x^{(1)}(h) = H_x^{(1)}(0) + \sigma_1 h(y) E_y^{(1)}(0), \\ E_y^{(1)}(h) = E_y^{(1)}(0) - \frac{h(y)}{\sigma_1} \left[ \frac{\partial^2 H_x^{(1)}(0)}{\partial y^2} + k_1^2 H_x^{(1)}(0) \right], \end{cases}$$

на втором слое,  $h(y) < z < H$

$$\begin{cases} H_x^{(2)}(h) = H_x^{(2)}(H) - \sigma_2 (H-h) E_y^{(2)}(H), \\ E_y^{(2)}(h) = E_y^{(2)}(H) + \frac{H-h(y)}{\sigma_2} \left[ \frac{\partial^2 H_x^{(2)}(H)}{\partial y^2} + k_2^2 H_x^{(2)}(H) \right]. \end{cases}$$

Учитывая, что  $H_x^{(1)}(0) = \text{const}$ ;  $H_x^{(1)}(h) = H_x^{(2)}(h)$ ;  $E_y^{(2)}(H) = 0$ ;  $E_y^{(1)}(h) \simeq E_y^{(2)}(h)$  (так как  $\text{grad} h \ll 1$ ), получим

$$\begin{cases} H_x^{(2)}(H) = H_x^{(1)}(0) + \sigma_1 h(y) E_y^{(1)}(0), \\ \frac{H-h}{\sigma_2} \left[ \frac{\partial^2 H_x^{(2)}(H)}{\partial y^2} + k_2^2 H_x^{(2)}(H) \right] = E_y^{(1)}(0) - i\omega\mu h(y) H_x^{(1)}(0). \end{cases}$$

Исключив из полученных соотношений  $H_x^{(2)}(H)$ , найдем граничное условие при  $z = 0$ :

$$\begin{aligned} & \frac{H-h}{\sigma_2} \frac{d^2}{dy^2} [h(y) E_y(y, z=0)] - \\ & - [1 - k_1^2 h(y)(H-h)] E_y(y, z=0) = -i\omega\mu H H_x(y, z=0). \end{aligned}$$

Так как  $H_x(z=0) = \text{const}$ , а импеданс  $Z(y) = -\frac{E_y(0)}{H_x(0)}$ , то мы получаем уравнение для импеданса

лать вывод о том, что для градиентного слоя с возрастающей проводимостью поведение градиентной кривой может сильно отличаться от плоскооднородной, что делает принципиально возможной оценку скорости возрастания проводимости промежуточного градиентного проводящего слоя.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бердический М. М., Дмитриев В. И., Мерщикова И. А. Исследование градиентных сред при глубинном электромагнитном зондировании. «Изв. АН СССР», сер. Физика Земли, № 6, 1974.

В. И. ДМИТРИЕВ, Т. С. ХРЫЧКОВА

### О ВЛИЯНИИ ИЗМЕНЕНИЯ МОЩНОСТИ ПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ НА ГЛУБИННОЕ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКОЕ ЗОНДИРОВАНИЕ

В качестве основной модели мы рассмотрим трехслойный геоэлектрический разрез, верхний слой которого имеет переменную толщину (рис. 1). Второй слой — фундамент имеет конечную проводимость. Подстилающее полупространство — мантия имеет идеальную проводимость. Если толщина верхнего слоя постоянна  $h(y) = \text{const}$ , то низкочастотная асимптотика импеданса равна

$$Z = \frac{E_y}{E_x} = -i\omega\mu H \quad \text{при } \omega \rightarrow 0, \quad (1)$$

что дает возможность определить по измерениям импеданса глубину до мантии. При наличии поверхностной неоднородности и при  $\sigma_2 = 0$  асимптотика (1) изменяется и имеет вид

$$Z = -i\omega\mu H \frac{S_c}{S(y)}, \quad (2)$$

где  $S(y) = \sigma_1 h(y)$  — переменная продольная проводимость слоя,  $S_c$  — средняя постоянная продольная проводимость слоя. Такое влияние на низкочастотную асимптотику магнитотеллурического поля переменной продольной проводимости носит название  $S$ -эффекта. Это приводит в силу неизвестности  $S_c$  к большим ошибкам в определении глубины до мантии. Если имеется конечная про-

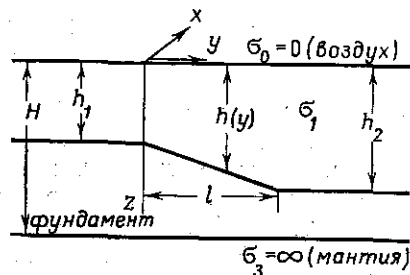


Рис. 1

димость фундамента  $\sigma_2 \neq 0$ , то влияние  $S$ -эффекта уменьшается. Именно этому вопросу и посвящена настоящая статья. Мы ответим на два вопроса:

- 1) При каких малых градиентах  $h(y)$  влиянием  $S$ -эффекта можно пренебречь?
- 2) На каком расстоянии от неоднородности низкочастотная асимптотика импеданса выходит на свое значение для слоистой среды (1)?

При решении задачи мы будем опираться на приближенные граничные условия на тонком слое, полученные в [1]. Применение этих условий правомерно, если  $|k_1| h \ll 1$ ,  $|k_2| (H - h) \ll 1$  и  $\text{grad} h \ll 1$ .

В случае  $H$ -поляризации электромагнитного поля  $\vec{E} = \{0, E_y, E_z\}$ ,  $\vec{H} = \{H_x, 0, 0\}$ , согласно [1], приближенные граничные условия имеют вид: на первом слое,  $0 \leq z \leq h(y)$

$$\begin{cases} H_x^{(1)}(h) = H_x^{(1)}(0) + \sigma_1 h(y) E_y^{(1)}(0), \\ E_y^{(1)}(h) = E_y^{(1)}(0) - \frac{h(y)}{\sigma_1} \left[ \frac{\partial^2 H_x^{(1)}(0)}{\partial y^2} + k_1^2 H_x^{(1)}(0) \right], \end{cases}$$

на втором слое,  $h(y) < z < H$

$$\begin{cases} H_x^{(2)}(h) = H_x^{(2)}(H) - \sigma_2 (H - h) E_y^{(2)}(H), \\ E_y^{(2)}(h) = E_y^{(2)}(H) + \frac{H - h(y)}{\sigma_2} \left[ \frac{\partial^2 H_x^{(2)}(H)}{\partial y^2} + k_2^2 H_x^{(2)}(H) \right]. \end{cases}$$

Учитывая, что  $H_x^{(1)}(0) = \text{const}$ ;  $H_x^{(1)}(h) = H_x^{(2)}(h)$ ;  $E_y^{(2)}(H) = 0$ ;  $E_y^{(1)}(h) \simeq E_y^{(2)}(h)$  (так как  $\text{grad} h \ll 1$ ), получим

$$\begin{cases} H_x^{(2)}(H) = H_x^{(1)}(0) + \sigma_1 h(y) E_y^{(1)}(0), \\ \frac{H - h}{\sigma_2} \left[ \frac{\partial^2 H_x^{(2)}(H)}{\partial y^2} + k_2^2 H_x^{(2)}(H) \right] = E_y^{(1)}(0) - i\omega\mu h(y) H_x^{(1)}(0). \end{cases}$$

Исключив из полученных соотношений  $H_x^{(2)}(H)$ , найдем граничное условие при  $z = 0$ :

$$\begin{aligned} & \frac{H - h}{\sigma_2} \frac{d^2}{dy^2} [h(y) E_y(y, z = 0)] - \\ & - [1 - k_1^2 h(y)(H - h)] E_y(y, z = 0) = -i\omega\mu H H_x(y, z = 0). \end{aligned}$$

Так как  $H_x(z = 0) = \text{const}$ , а импеданс  $Z(y) = -\frac{E_y(0)}{H_x(0)}$ , то мы получаем уравнение для импеданса

$$\frac{(H-h)\sigma_1}{\sigma_2} \frac{d^2}{dy^2} (h \cdot Z) - [1 - k_1^2 h(H-h)] Z = i\omega\mu H. \quad (3)$$

Мы введем безразмерную функцию  $\varphi(y)$  такую, что

$$Z(y) = -i\omega\mu H \cdot \varphi(y). \quad (4)$$

Функция  $\varphi(y)$  показывает величину влияния неоднородности. Так как глубина до мантии много больше толщины первого слоя  $H \gg h$ , а в низкочастотной асимптотике  $|k_1^2| hH \ll 1$ , то для  $\varphi(y)$  мы будем иметь уравнение

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[ \frac{\varphi(\xi)}{\gamma(\xi)} \right] - \varphi(\xi) = -1; \quad \xi = y/l, \quad (5)$$

где

$$\gamma(\xi) = \sqrt{\frac{\sigma_2 l^2}{\sigma_1 H \cdot h(\xi)}}.$$

Рассмотрим линейное изменение  $h(y)$ , т. е.

$$h(\xi) = \begin{cases} h_1 & \text{при } \xi \leq 0, \\ h_1 + \xi/l \operatorname{tg} \alpha & \text{при } 0 < \xi \leq 1, \\ h_1 + l \operatorname{tg} \alpha = h_2 & \text{при } \xi \geq 1. \end{cases} \quad (6)$$

Тогда

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} 1 + [\varphi(0) - 1] e^{\gamma_0 \xi}; \quad \gamma_0 = \gamma(0) & \text{при } \xi \leq 0, \\ \varphi(\xi) & \text{при } 0 \leq \xi \leq 1, \\ 1 + [\varphi(1) - 1] e^{-\gamma_1(\xi-1)}; \quad \gamma_1 = \gamma(1) & \text{при } \xi \geq 1. \end{cases} \quad (7)$$

Функция  $\varphi(\xi)$  при  $0 \leq \xi \leq 1$  находится из решения уравнения (5) с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{h(\xi)}{h_1} \varphi(\xi) \right] - \gamma_0 \varphi(\xi) &= -\gamma_0 & \text{при } \xi = 0, \\ \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{h(\xi)}{h_2} \varphi(\xi) \right] + \gamma_1 \varphi(\xi) &= \gamma_1 & \text{при } \xi = 1. \end{aligned} \quad (8)$$

В случае линейного изменения  $h(\xi)$  задача (5), (8) зависит от двух параметров:

$$\gamma = \gamma_0 = \sqrt{\frac{\sigma_2 l^2}{\sigma_1 H h_1}}; \quad \delta = \frac{l}{h_1} \operatorname{tg} \alpha. \quad (9)$$

При этом

$$\gamma(\xi) = \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \xi\delta}}; \quad \frac{h(\xi)}{h_1} = 1 + \xi\delta; \quad \frac{h(\xi)}{h_2} = \frac{1 + \xi\delta}{1 + \delta}$$

Общее решение уравнения (5) при условии (6) имеет вид

$$\varphi(\xi) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \xi\delta}} \left\{ A I_1 \left( \frac{2\gamma}{\delta} \sqrt{1 + \xi\delta} \right) + B K_1 \left( \frac{2\gamma}{\delta} \sqrt{1 + \xi\delta} \right) \right\}. \quad (10)$$

Используя граничные условия (8), находим постоянные  $A$  и  $B$ :

$$A = \frac{\delta}{\gamma\theta} \left\{ K_0 \left( \frac{2\gamma}{\sigma} \right) - K_0 \left( \frac{2\gamma}{\sigma} \sqrt{1 + \delta} \right) + K_1 \left( \frac{2\gamma}{\sigma} \right) + K_1 \left( \frac{2\gamma}{\sigma} \sqrt{1 + \delta} \right) \right\}, \quad (11)$$

$$B = \frac{\delta}{\gamma\theta} \left\{ I_0 \left( \frac{2\gamma}{\delta} \right) - I_0 \left( \frac{2\gamma}{\sigma} \sqrt{1 + \delta} \right) - I_1 \left( \frac{2\gamma}{\delta} \right) - I_1 \left( \frac{2\gamma}{\delta} \sqrt{1 + \delta} \right) \right\},$$

где

$$\begin{aligned} \theta = & \left[ I_0 \left( \frac{2\gamma}{\delta} \right) - I_1 \left( \frac{2\gamma}{\delta} \right) \right] \cdot \left[ K_0 \left( \frac{2\gamma}{\delta} \sqrt{1 + \delta} \right) - \right. \\ & \left. - K_1 \left( \frac{2\gamma}{\delta} \sqrt{1 + \delta} \right) \right] - \left[ I_0 \left( \frac{2\gamma}{\delta} \sqrt{1 + \delta} \right) + \right. \\ & \left. + I_1 \left( \frac{2\gamma}{\delta} \sqrt{1 + \delta} \right) \right] \cdot \left[ K_0 \left( \frac{2\gamma}{\delta} \right) + K_1 \left( \frac{2\gamma}{\delta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Формулы (7) и (10)–(12) позволяют провести полный расчет низкочастотной асимптотики импеданса. До анализа расчетов рассмотрим некоторые асимптотические оценки функции  $\varphi(\xi)$ . При  $\gamma \rightarrow 0$ , разлагая модифицированные функции Бесселя в окрестности нуля, получаем

$$\varphi(\xi) \simeq \frac{\sqrt{1 + \delta}}{1 + \delta\xi} = \frac{\sqrt{h_1 h_2}}{h(\xi)} \quad \text{при} \quad \sqrt{\frac{\sigma_2 l^2}{\sigma_1 H h_1}} \ll 1. \quad (13)$$

При этом импеданс, согласно (4), равен

$$Z(y) = -i\omega\mu H \cdot \frac{\sqrt{h_1 h_2}}{h(y)}. \quad (14)$$

Сравнивая (14) с (2), получаем, что  $S_c = \sqrt{S_1 \cdot S_2}$ , т. е. средняя продольная проводимость слоя равна среднему геометрическому  $S_1$  и  $S_2$  (продольным проводимостям приподнятой и опущенной граней).

При  $\frac{2\gamma}{\delta} \gg 1$ , используя асимптотику модифицированных функций Бесселя для больших аргументов, получим



$$\varphi(\xi) \approx 1 + \frac{\delta}{2\gamma(1+\xi\delta)^{3/4}} e^{-\frac{2\gamma}{\delta}[\sqrt{1+\xi\delta}-1]} \quad (15)$$

т. е. при  $\frac{2\gamma}{\delta} \rightarrow \infty \varphi(\xi) \rightarrow 1$ , и влиянием неоднородности верхнего слоя можно пренебречь. Заметим, что влияние неоднородности на приподнятой грани ( $\xi \leq 0$ ) и на опущенной грани ( $\xi \geq 1$ ) различно:

$$\varphi(0) = 1 + \frac{\delta}{2\gamma}; \quad \varphi(1) = 1 + \frac{\delta}{2\gamma(1+\delta)^{3/4}} e^{-\frac{2\gamma}{\delta}(\sqrt{1+\delta}-1)} \quad (16)$$

На опущенной грани влияние неоднородности прекращается раньше и оно меньше, если  $2\gamma/\delta \gg 1$ .

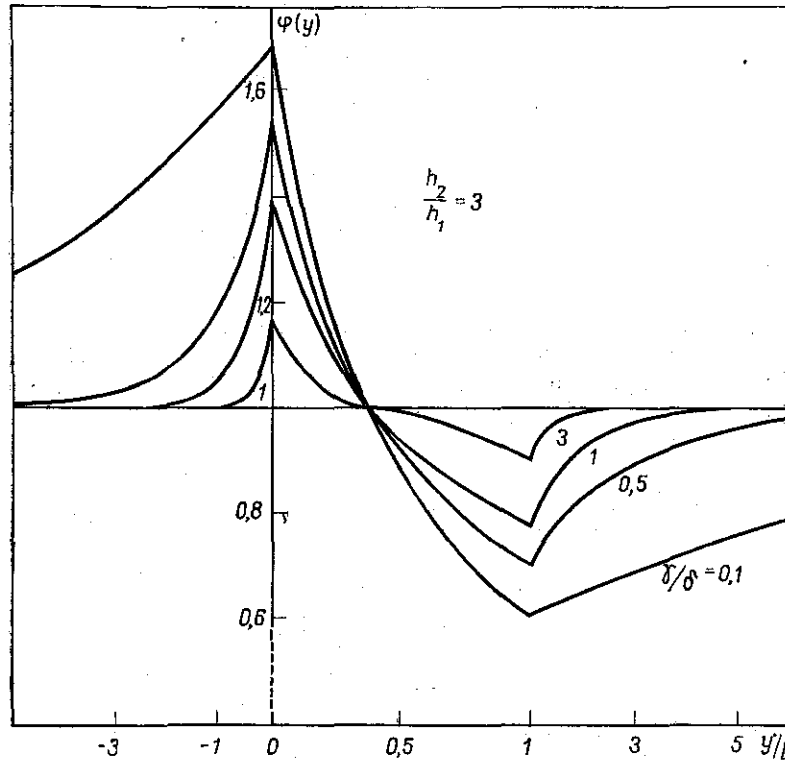


Рис. 2

Рассмотрим теперь точные расчеты  $\varphi(\xi)$  по формулам (10)–(12). На рис. 2 приведены значения  $\varphi(\xi)$  при различных

$\gamma$  и  $\delta$ . Легко видеть, что на участке линейного изменения  $h(\xi)$  мы имеем практически линейное изменение  $\varphi(\xi)$ , но градиент этого изменения падает по мере увеличения параметра  $\gamma/\delta$ . При больших  $\gamma/\delta$  линейность функции  $\varphi(\xi)$  нарушается. Вне участка  $0 < \xi < 1$  функция  $\varphi(\xi)$  экспоненциально стремится к 1 тем быстрее, чем больше параметр  $\gamma$ . На рис. 3 и 4 приведены значения  $\varphi(\xi)$  и  $\varphi(\xi=1)$  в зависимости от параметров  $\gamma$  и  $\delta$ .

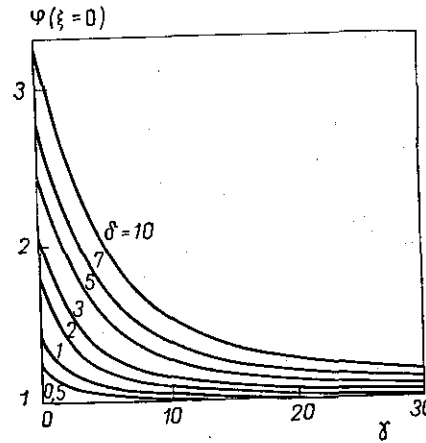


Рис. 3

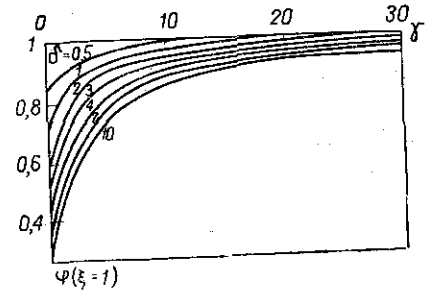


Рис. 4

Из условия  $\gamma/\delta \geq 5$  мы можем оценить градиент  $h(y)$ , когда влияние неоднородности мало. Это условие дает

$$\operatorname{tg} \alpha \leq 0,2 \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} \sqrt{\frac{h_1}{H}} \quad (17)$$

Так как убывание влияния неоднородности при отходе от нее происходит по закону  $e^{-\gamma\xi}$ , то мы можем оценить расстояние  $d$ , на которое надо отойти, чтобы пренебречь влиянием неоднородности:

$$d_1 > H \sqrt{\frac{\sigma_1 h_1}{\sigma_2 H}} \quad \text{при } \xi < 0; \quad d_2 > H \sqrt{\frac{\sigma_1 h_2}{\sigma_2 H}} \quad \text{при } \xi > 1. \quad (18)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И. О приближенных граничных условиях на тонком неоднородном слое в задачах электроразведки. «Изв. АН СССР», сер. Физика Земли, № 12, 1969.

**ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА  
В НЕОДНОРОДНОЙ ГИРОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ**

Пусть дана гиротропная плоскость с тензором проводимости

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \eta_1 \\ -\eta_1 & \sigma_1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим в этой плоскости неоднородность, ограниченную контуром  $C$  и имеющую тензор проводимости

$$\hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} \sigma_2 & \eta_2 \\ -\eta_2 & \sigma_2 \end{pmatrix}.$$

Электрическое поле создается источниками, распределенными вдоль контура  $C$ , заданными поверхностной плотностью тока  $i$ , втекающего в плоскость вдоль контура. Электрическое поле  $E$  и плотность тока в среде  $j = \hat{\sigma}E$  удовлетворяют уравнениям

$$\text{rot } E = 0; \quad \text{div } j = 0.$$

Если ввести скалярный потенциал  $u$ , то

$$E = \text{grad } u; \quad j = \hat{\sigma} \text{grad } u,$$

а скалярный потенциал является решением двумерного уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0,$$

регулярным на бесконечности и удовлетворяющим условиям сопряжения на контуре  $C$ :

$$u_{\text{внеш}}^{(p)} = u_{\text{внутр}}^{(p)};$$

$$\left( \sigma_1 \frac{\partial u(p)}{\partial n} + \eta_1 \frac{\partial u(p)}{\partial \tau} \right) - \left( \sigma_2 \frac{\partial u(p)}{\partial n} + \eta_2 \frac{\partial u(p)}{\partial \tau} \right) = i(P); \quad P \in C.$$

Данная задача легко сводится к интегральному уравнению. Для этого представим скалярный потенциал  $u(M)$  через потенциал простого слоя с неизвестной плотностью  $v(P_0)$ :

$$u(M) = \oint_C v(P_0) \ln \frac{1}{r_{P_0 M}} dl_{P_0}. \quad (1)$$

Представленный в виде (1) потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа и непрерывен на  $C$ . Подставив (1) в условие разрыва плотности тока на контуре  $C$ , получим для  $v(P)$  интегральное уравнение

$$\pi(\sigma_1 + \sigma_2)v(P) + \oint_C v(P_0)K(P, P_0)dl_{P_0} = i(P); \quad P \in C, \quad (2)$$

где ядро равно

$$K(P, P_0) = (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{PP_0}} + (\eta_1 - \eta_2) \frac{\partial}{\partial \tau_P} \ln \frac{1}{r_{PP_0}}, \quad (3)$$

где  $\bar{n}_P$  — внутренняя нормаль, а  $\bar{\tau}_P$  — касательный вектор к  $C$  в точке  $P$ . Если контур  $C$  задан уравнениями параметрически

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \text{ при } 0 \leq t \leq 2\pi; \quad \begin{matrix} P = \{x(t), y(t)\} \\ P_0 = \{x(t_0), y(t_0)\}, \end{matrix}$$

то уравнение (2) примет вид

$$\pi(\sigma_1 + \sigma_2)v(t) + \int_0^{2\pi} v(t_0)K(t, t_0)dt_0 = i(t); \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (4)$$

где ядро

$$K(t, t_0) = -\frac{1}{r_{PP_0}^2} \{ (\sigma_1 - \sigma_2) [y'(t)(x(t) - x(t_0)) - x'(t)(y(t) - y(t_0))] + (\eta_1 - \eta_2) [x'(t)(x(t) - x(t_0)) + y'(t)(y(t) - y(t_0))] \} \cdot \sqrt{\frac{x'^2(t_0) + y'^2(t_0)}{x'^2(t) + y'^2(t)}}. \quad (5)$$

Уравнение (4) является сингулярным интегральным уравнением, так как при  $t \rightarrow t_0$  ядро имеет особенность:

$$K(t, t_0) \rightarrow \frac{\eta_2 - \eta_1}{t - t_0} \text{ при } t \rightarrow t_0.$$

Естественно, возникает вопрос о численном методе решения уравнения (4). Мы рассмотрим два подхода.

**I. Обращение сингулярной части оператора.** Выделим в ядре уравнения сингулярную часть

$$K(t, t_0) = -\frac{\eta_1 - \eta_2}{2} \text{ctg} \frac{t - t_0}{2} + L(t, t_0), \quad (6)$$

где  $L(t, t_0)$  — ограниченная гладкая функция. Тогда уравнение запишется в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(t_0) \text{ctg} \frac{t - t_0}{2} dt_0 = F(t) = \frac{1}{\eta_1 - \eta_2} \left\{ (\sigma_1 + \sigma_2)v(t) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(t_0) L(t, t_0) dt_0 - \frac{i(t)}{\pi} \right\}. \quad (7)$$

В полученном уравнении слева стоит оператор Гильберта, который имеет формулу обращения

$$v(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t_0) \operatorname{ctg} \frac{t-t_0}{2} dt_0.$$

Следовательно, обращая оператор Гильберта в (7), мы получим

$$\begin{aligned} v(t) = & -\frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\eta_1 - \eta_2} \int_0^{2\pi} v(t_0) \operatorname{ctg} \frac{t-t_0}{2} dt_0 + \\ & + \frac{1}{2\pi^2 (\eta_1 - \eta_2)} \int_0^{2\pi} i(t_0) \operatorname{ctg} \frac{t-t_0}{2} dt_0 - \\ & - \frac{1}{2\pi^2 (\eta_1 - \eta_2)} \int_0^{2\pi} v(t_0) dt_0 \int_0^{2\pi} L(t_1, t_0) \operatorname{ctg} \frac{t-t_1}{2} dt_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Исключив из (7) и (8) сингулярный оператор, получим окончательно уравнение Фредгольма II рода

$$\begin{aligned} v(t) + \frac{1}{q} \int_0^{2\pi} v(t_0) \left[ L(t, t_0) + \frac{1}{2\pi} \frac{\eta_1 - \eta_2}{\sigma_1 + \sigma_2} M(t, t_0) \right] dt_0 = \\ = \frac{1}{q} \left[ i(t) + \frac{\eta_1 - \eta_2}{2\pi (\sigma_1 + \sigma_2)} \int_0^{2\pi} i(t_0) \operatorname{ctg} \frac{t-t_0}{2} dt_0 \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$q = \frac{\pi}{\sigma_1 + \sigma_2} [(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2];$$

$$M(t, t_0) = \int_0^{2\pi} L(t, t_0) \operatorname{ctg} \frac{t-t_1}{2} dt_1.$$

К уравнению (9) мы можем применить теперь любой численный метод. Неудобство описанного подхода заключается в необходимости вычислять дополнительную часть ядра  $M(t, t_0)$ , что резко увеличивает время счета.

**II. Метод Фурье.** Так как  $v(t)$  — периодическая функция с периодом  $2\pi$ , то мы можем ее представить в виде

$$v(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nt + b_n \cos nt). \quad (10)$$

Подставив выражение (10) в уравнение (4) с выделенной сингулярностью в ядре и учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin nt_0 \operatorname{ctg} \frac{t-t_0}{2} dt_0 = -\cos nt,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos nt_0 \operatorname{ctg} \frac{t-t_0}{2} dt_0 = \sin nt,$$

получим

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} \left( 1 + \frac{1}{\pi (\sigma_1 + \sigma_2)} \int_0^{2\pi} L(t, t_0) dt_0 \right) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[ \sin nt + \frac{\eta_1 - \eta_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \cos nt + \frac{1}{\pi (\sigma_1 + \sigma_2)} \times \right. \\ & \times \left. \int_0^{2\pi} L(t, t_0) \sin nt_0 dt_0 \right] + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[ \cos nt - \frac{\eta_1 - \eta_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \sin nt + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\pi (\sigma_1 + \sigma_2)} \int_0^{2\pi} L(t, t_0) \cos nt_0 dt_0 \right] = \frac{i(t)}{\pi (\sigma_1 + \sigma_2)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Умножая (11) на  $\cos mt$  или  $\sin lt$  и интегрируя по  $t$  от 0 до  $2\pi$ , получим систему уравнений для определения  $a_n$  и  $b_n$ :

$$\begin{aligned} a_0 \left\{ \delta_{0m} + \frac{1}{2} L_{0m}^C \right\} + \sum_{n=1}^N a_n \left\{ \frac{\eta_1 - \eta_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \delta_{nm} + L_{nm}^{SC} \right\} + \\ + \sum_{n=1}^N b_n \{ \delta_{nm} + L_{nm}^C \} = I_m^C; \quad l, m = 0, 1, \dots, N; \end{aligned} \quad (12)$$

$$b_0 \frac{1}{2} L_{0l}^S + \sum_{n=1}^N a_n \{ \delta_{nl} + L_{nl}^S \} + \sum_{n=1}^N b_n \left\{ -\frac{\eta_1 - \eta_2}{\sigma_1 + \sigma_2} + L_{nl}^{CS} \right\} = I_l^S,$$

где

$$L_{nm}^C = \frac{1}{\pi^2 (\sigma_1 + \sigma_2)} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} L(t, t_0) \cos nt_0 \cos mt dt_0 dt,$$

$$L_{nl}^S = \frac{1}{\pi^2 (\sigma_1 + \sigma_2)} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} L(t, t_0) \sin nt_0 \sin lt dt_0 dt, \quad (13)$$

$$L_{nm}^{SC} = \frac{1}{\pi^2(\sigma_1 + \sigma_2)} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} L(t, t_0) \sin nt_0 \cos mtdt_0 dt,$$

$$L_{ni}^{CS} = \frac{1}{\pi^2(\sigma_1 + \sigma_2)} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} L(t, t_0) \cos nt_0 \sin ldt_0 dt,$$

$$I_m^C = \frac{1}{\pi^2(\sigma_1 + \sigma_2)} \int_0^{2\pi} i(t) \cos mtdt; \quad I_i^S = \frac{1}{\pi^2(\sigma_1 + \sigma_2)} \int_0^{2\pi} i(t) \sin ldt,$$

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ 1 & n = m. \end{cases}$$

Полученная система позволяет определить коэффициенты разложения  $a_n$  и  $b_n$ , вычислить, согласно (10),  $v(t)$  и, согласно (1),  $u(M)$ . Система (12) имеет единственный недостаток, связанный с тем, что коэффициенты системы вычисляются хотя и через однотипные, но все же двойные интегралы, что, естественно, приводит к длительным вычислениям.

Более простым, хотя и менее точным, является метод получения системы уравнений для нахождения  $a_n$  и  $b_n$  путем поточечного удовлетворения уравнения (11). При числе неизвестных коэффициентов  $2N+1$  нужно взять столько же точек на контуре  $C$ .

Естественно, этот метод проще, но точность его зависит от выбора точек  $t_i$  на контуре  $C$  в зависимости от гладкости этого контура.

В конкретном случае рассматривался контур  $C$  (рис. 1), заданный параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t + R \sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2} \cos^2 t}, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases} \quad (14)$$

Принимая во внимание гладкости контура, точки  $t_i$  были взяты с равномерным шагом. Расчеты проводились для  $N=20$ . Ре-

зультаты вычисления  $E_\rho$  и  $E_\theta$  в зависимости от  $\rho$  при фиксированных  $\varphi$  приведены на графиках (рис. 2, 3) для следующих значений параметров:

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 10, \quad \eta_1 = 1, \quad \eta_2 = 5, \quad a = 1, \quad b = 0,2, \quad R = 2, \quad i(t) = -\sin t.$$

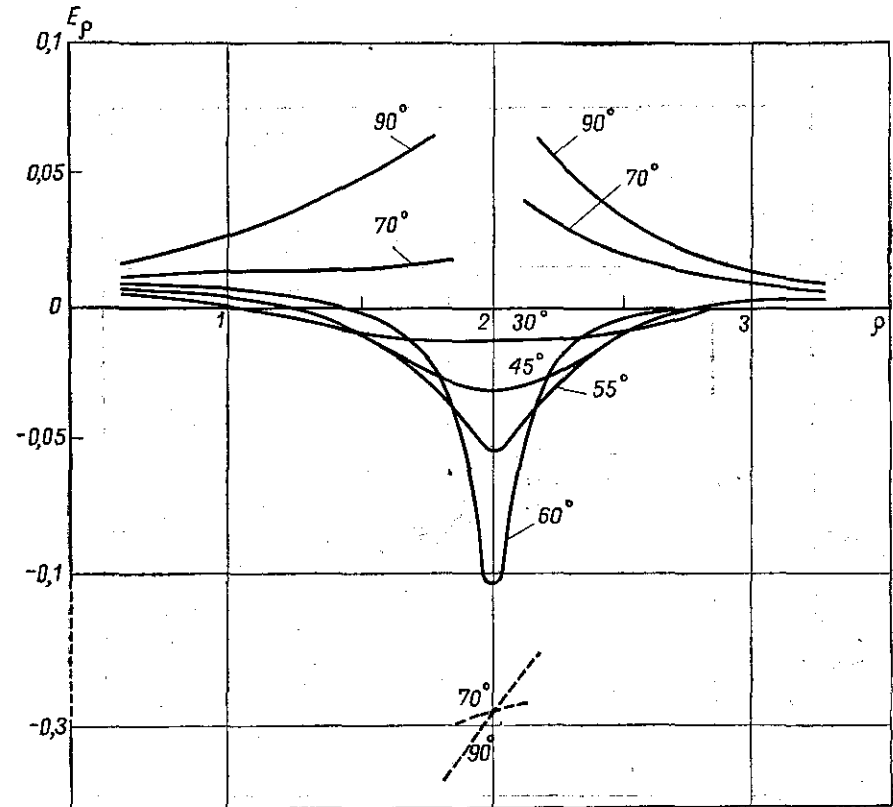


Рис. 2

Исходя из результатов счета, можно сделать следующие выводы:

1. Компонента  $E_\rho$  терпит разрыв на границе неоднородности и убывает по мере удаления от границ в обе стороны, причем значение  $E_\rho$  при подходе к неоднородности слева больше, чем значение при подходе к ней справа, что можно объяснить искривленностью контура. Внутри контура значение изменяет знак на противоположный, причем опять наблюдается убывание абсолютной величины  $E_\rho$  от левой границы к правой, более сильное при  $\varphi$ , близком к  $\frac{\pi}{2}$ , и менее заметное при  $\varphi = 60^\circ + \varepsilon$ ,  $\varphi = 120^\circ - \varepsilon$ , т. е.

при таких значениях  $\varphi$ , когда  $\rho$  пересекает концы контура. Если  $\varphi$  не входит в интервал  $[60^\circ, 120^\circ]$ , то  $E_\theta$  непрерывна, достигает экстремального значения при  $\rho=2$ .

2. Компонента  $E_\theta$  терпит наиболее сильный разрыв на концах контура ( $\varphi=60^\circ+\varepsilon$ ,  $\varphi=120^\circ-\varepsilon$ ) с изменением знака. По мере прибли-

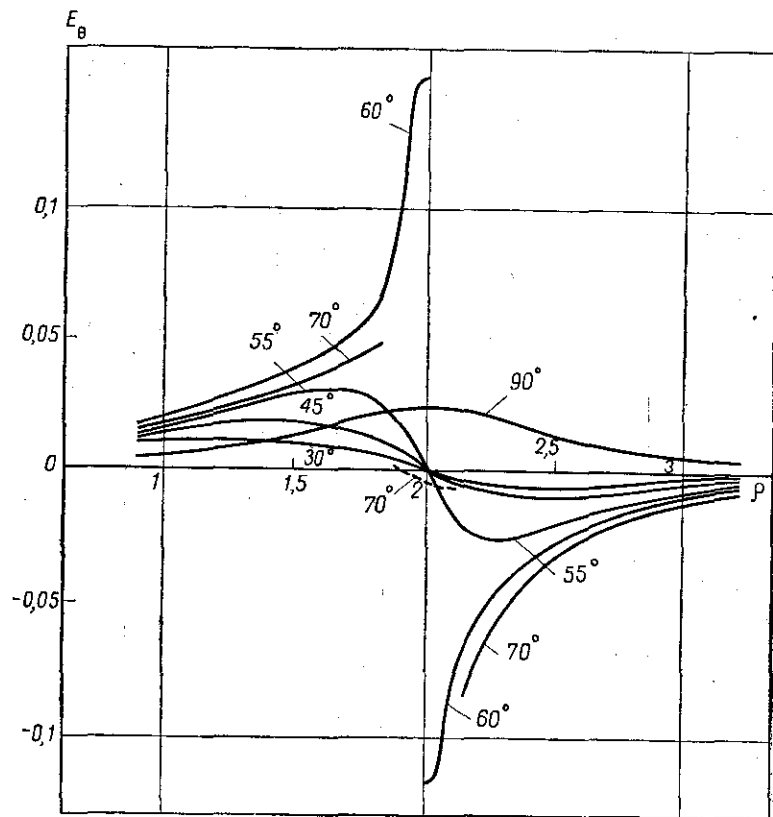


Рис. 3

жения к центру контура ( $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2} \pm \varepsilon$ ) разрыв уменьшается и исчезает при  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . По мере удаления от границ неоднородности значение  $E_\theta$  затухает. Если  $120^\circ < \varphi < 60^\circ$ , то  $E_\theta$  непрерывна. При любом  $\varphi$   $E_\theta$  отрицательна при  $\rho < R$  и положительна при  $\rho > R$ .

## НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ В ВЫСОКООМНЫХ РАЗРЕЗАХ

Геоэлектрические разрезы с высокоомными слоями весьма распространены на практике и изучение электромагнитного поля над такими разрезами методом частотных электромагнитных зондирований проводится как при разведке полезных ископаемых, так и при решении многих задач структурной геологии, в частности при изучении строения кристаллического фундамента. В связи с этим теоретический анализ особенностей электромагнитного поля в разрезах, содержащих высокоомные слои, приобретает большой практический интерес.

Мы рассмотрим особенности электрической составляющей поля  $E_x$  в нормировке кажущегося сопротивления<sup>1</sup>

$$\rho_a/\rho_1 = \frac{\pi r^3}{I \rho_1} |E_x| \quad (1)$$

при возбуждении поля горизонтальным электрическим диполем, так как компонента  $E_x$  наиболее чувствительна к изменению как сопротивления, так и мощности высокоомного слоя. В практике частотных зондирований при изучении высокоомных разрезов используется в основном именно компонента  $E_x$  при экваториальном расположении питающего и измерительного диполей, т. е. при  $x=0$ ,  $y=r$ . Измерения поля  $E_x$  проводятся на поверхности Земли (при  $z=0$ ).

### § 1. ПАЛЕТКИ ВЫСОКООМНЫХ РАЗРЕЗОВ

Остановимся на палетках кажущегося сопротивления электрической составляющей  $E_x$ , построенных в координатах  $(\rho_a/\rho_1, \lambda_1/h_1)$ , где  $\lambda$  — длина волны (рис. 1, 2).

Можно выделить два случая высокоомных разрезов, которым будут соответствовать теоретические кривые  $\rho_a/\rho_1$  различного вида. Именно, высокоомный разрез

- 1) содержит слой-изолятор ( $\mu_i = \infty$ )<sup>2</sup>,
- 2) содержит слои высокого, но конечного сопротивления ( $\mu_i \gg 1$ ,  $\mu_i \neq \infty$ ).

(В первом случае [1], когда  $\mu_i = \infty$ , зондирования переменным электрическим полем дают возможность выявлять слой-изолятор

<sup>1</sup>  $I$  — момент диполя;  $r$  — расстояние (разнос) между источником и приемником,  $\rho_1$  — удельное сопротивление 1-го слоя разреза.

<sup>2</sup>  $\mu_i = \rho_i/\rho_1$  — относительное удельное сопротивление  $i$ -того слоя.

при таких значениях  $\varphi$ , когда  $\rho$  пересекает концы контура. Если  $\varphi$  не входит в интервал  $[60^\circ, 120^\circ]$ , то  $E_\theta$  непрерывна, достигает экстремального значения при  $\rho=2$ .

2. Компонента  $E_\theta$  терпит наиболее сильный разрыв на концах контура ( $\varphi=60^\circ+\varepsilon$ ,  $\varphi=120^\circ-\varepsilon$ ) с изменением знака. По мере приближения к центру контура ( $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2} \pm \varepsilon$ ) разрыв уменьшается и исчезает при  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . По мере удаления от границ неоднородности значение  $E_\theta$  затухает. Если  $120^\circ < \varphi < 60^\circ$ , то  $E_\theta$  непрерывна. При любом  $\varphi$   $E_\theta$  отрицательна при  $\rho < R$  и положительна при  $\rho > R$ .

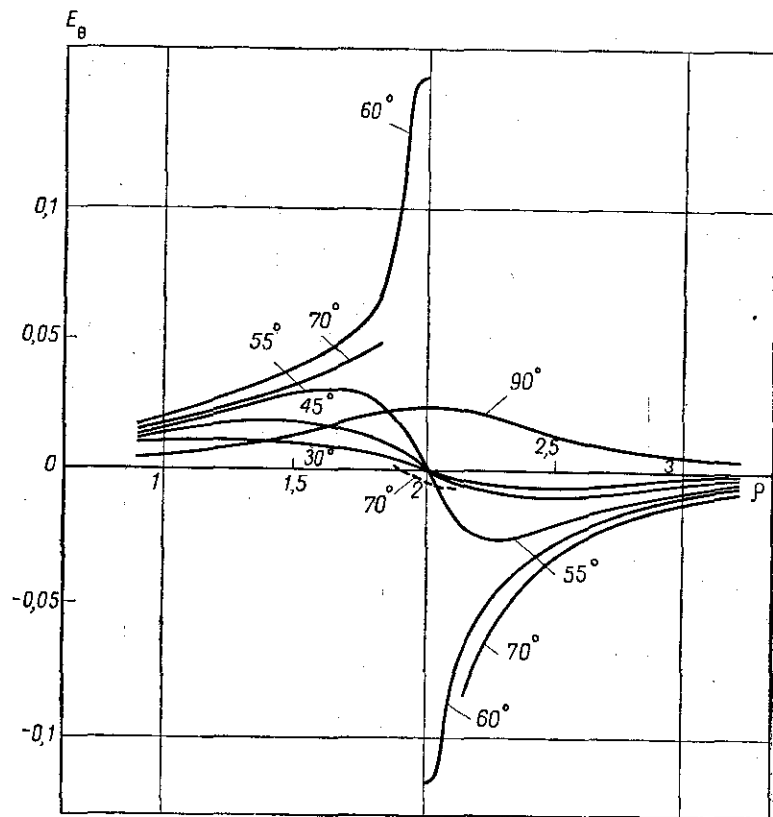


Рис. 3

## НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ В ВЫСОКООМНЫХ РАЗРЕЗАХ

Геоэлектрические разрезы с высокоомными слоями весьма распространены на практике и изучение электромагнитного поля над такими разрезами методом частотных электромагнитных зондирований проводится как при разведке полезных ископаемых, так и при решении многих задач структурной геологии, в частности при изучении строения кристаллического фундамента. В связи с этим теоретический анализ особенностей электромагнитного поля в разрезах, содержащих высокоомные слои, приобретает большой практический интерес.

Мы рассмотрим особенности электрической составляющей поля  $E_x$  в нормировке кажущегося сопротивления<sup>1</sup>

$$\rho_a/\rho_1 = \frac{\pi r^3}{I \rho_1} |E_x| \quad (1)$$

при возбуждении поля горизонтальным электрическим диполем, так как компонента  $E_x$  наиболее чувствительна к изменению как сопротивления, так и мощности высокоомного слоя. В практике частотных зондирований при изучении высокоомных разрезов используется в основном именно компонента  $E_x$  при экваториальном расположении питающего и измерительного диполей, т. е. при  $x=0$ ,  $y=r$ . Измерения поля  $E_x$  проводятся на поверхности Земли (при  $z=0$ ).

### § 1. ПАЛЕТКИ ВЫСОКООМНЫХ РАЗРЕЗОВ

Остановимся на палетках кажущегося сопротивления электрической составляющей  $E_x$ , построенных в координатах  $(\rho_a/\rho_1, \lambda_1/h_1)$ , где  $\lambda$  — длина волны (рис. 1, 2).

Можно выделить два случая высокоомных разрезов, которым будут соответствовать теоретические кривые  $\rho_a/\rho_1$  различного вида. Именно, высокоомный разрез

- 1) содержит слой-изолятор ( $\mu_i = \infty$ )<sup>2</sup>,
- 2) содержит слои высокого, но конечного сопротивления ( $\mu_i \gg 1, \mu_i \neq \infty$ ).

(В первом случае [1], когда  $\mu_i = \infty$ , зондирования переменным электрическим полем дают возможность выявлять слой-изолятор

<sup>1</sup>  $I$  — момент диполя;  $r$  — расстояние (разнос) между источником и приемником,  $\rho_1$  — удельное сопротивление 1-го слоя разреза.

<sup>2</sup>  $\mu_i = \rho_i/\rho_1$  — относительное удельное сопротивление  $i$ -того слоя.

(экран) в разрезе, определять его мощность и глубину залегания, но не позволяют изучать строение разреза под экраном. Это связано с тем обстоятельством, что электрическое поле переменного

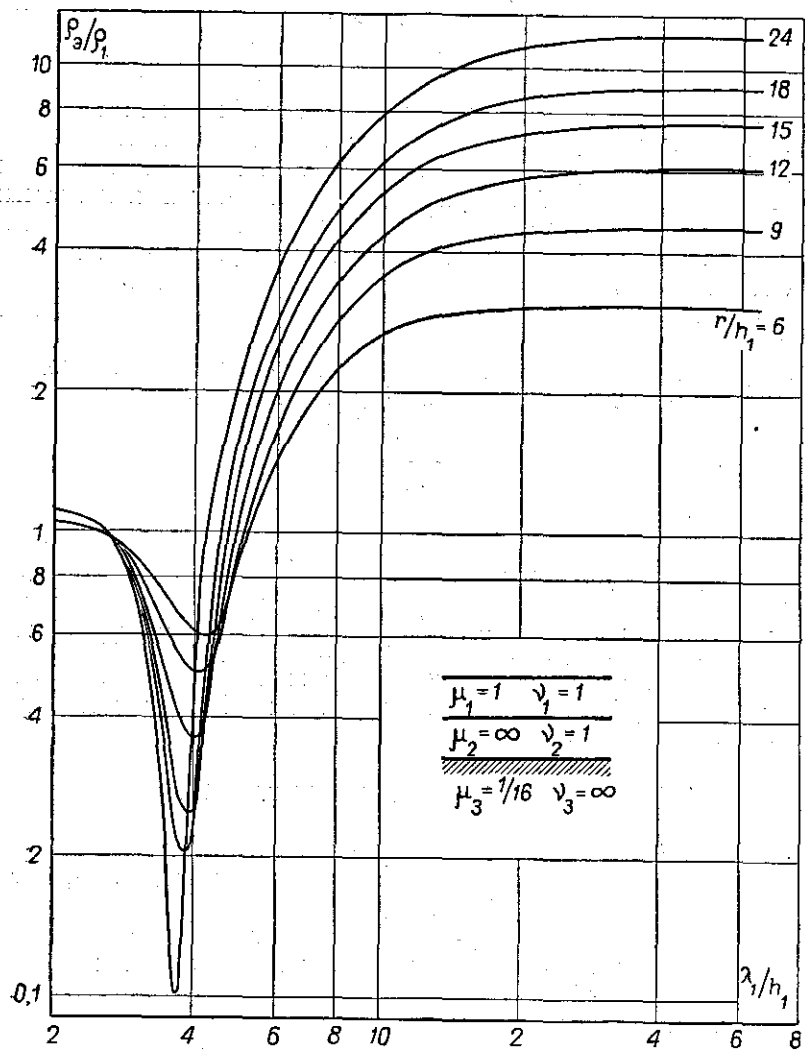


Рис. 1. Палетка кажущегося сопротивления  $\rho_a/\rho_1$  трехслойного разреза типа «К», содержащего слой-изолятор ( $\mu_2 = \infty$ )

тока при наличии в разрезе изолятора слабо реагирует на строение подэкранной толщи вследствие малости индукционных эффектов.

Характерной особенностью кривых  $\rho_a/\rho_1$  (рис. 1) для разреза со слоем-изолятором является наличие глубокого узкого минимума в высокочастотной области и крутого подъема в развитой части кривой перед выходом на горизонтальную асимптоту. При этом

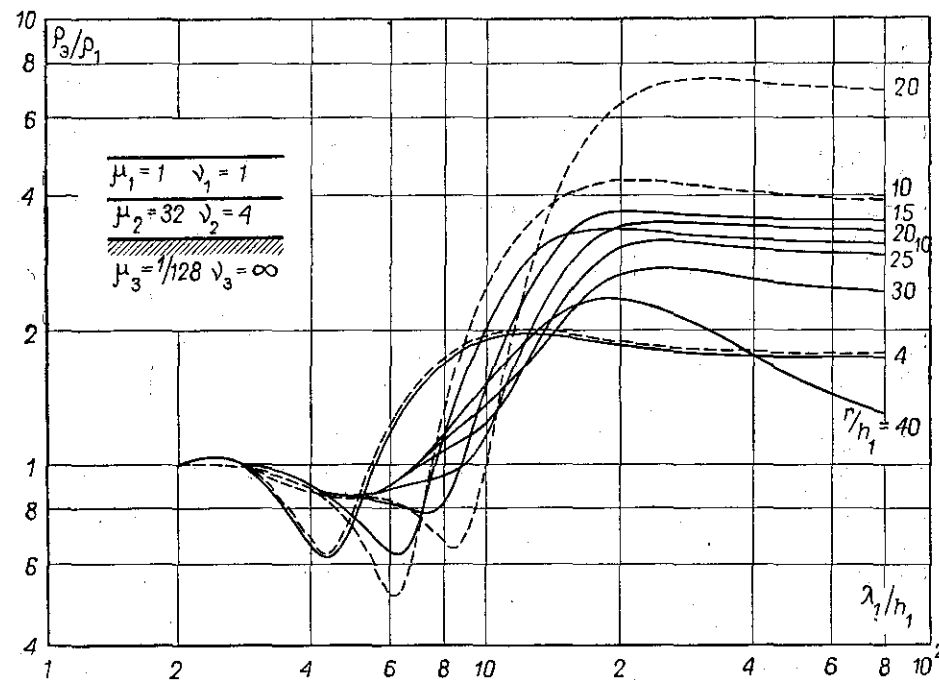


Рис. 2. Палетка кажущегося сопротивления  $\rho_a/\rho_1$  трехслойного разреза типа «К», содержащего высокоомный слой конечного сопротивления ( $\mu_2 \neq \infty$ )

значение  $\rho_a/\rho_1$  на асимптоте равняется полю постоянного тока двухслойного разреза на соответствующем разnose. Минимум кривой является характерной точкой и может использоваться при интерпретации результатов полевых измерений для выявления слоя-изолятора.

Расчет теоретических кривых в разрезе со слоем-изолятором проводится по формулам высокочастотной асимптотики в дальней зоне [2]. Применение этих формул дает результат, практически совпадающий с результатом расчета по формулам полного поля либо на всем интервале изменения  $\lambda_1/h_1$ , для которого кривая  $\rho_a/\rho_1$  рассчитывается, либо для достаточно большой части кривой  $\rho_a/\rho_1$ , включающей характерный минимум в высокочастотной области, используемый при интерпретации.

При конечном сопротивлении высокоомного слоя ( $\mu_i \neq \infty$ ) за счет перетекания токов через этот слой влияние разреза под слоем на кривые частотного зондирования резко усиливается. При этом вид кривой  $\rho_3/\rho_1$  резко меняется по сравнению со случаем слоя-изолятора: характерный минимум исчезает, для достаточно больших разносов кривая приобретает другую характерную точ-

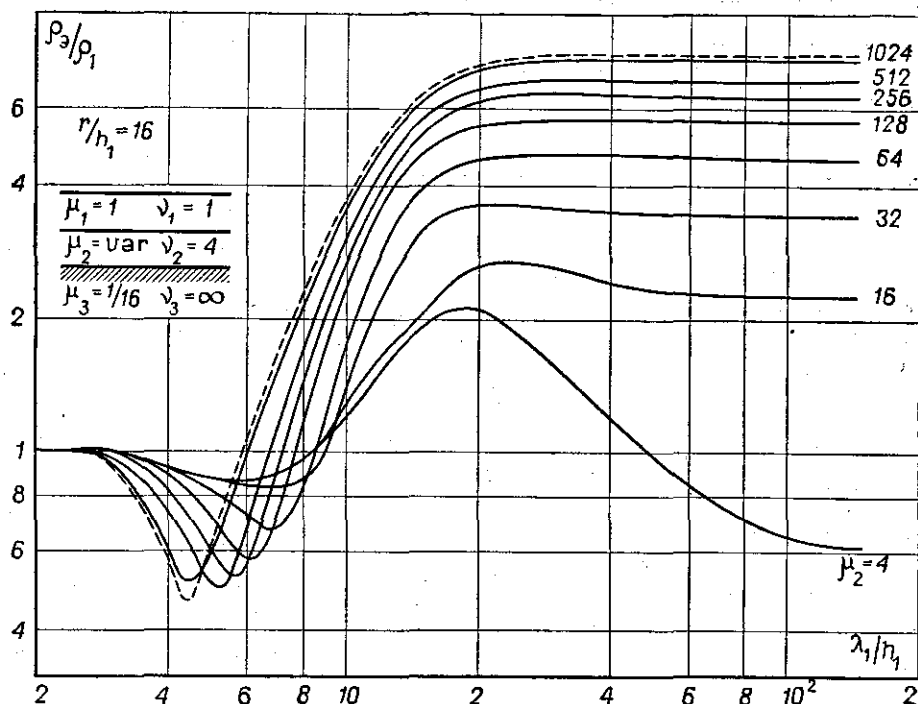


Рис. 3. Палетка кажущегося сопротивления  $\rho_3/\rho_1$ , рассчитанная для разрезов типа «К» с различным сопротивлением  $\mu_2$  высокоомного слоя

ку — хорошо выраженный максимум перед выходом на горизонтальную асимптоту. Пример такой палетки для трехслойного разреза типа К дан на рис. 2 (сплошные кривые).

Расчет теоретических кривых для разрезов со слоями  $\mu_2 \neq \infty$  следует проводить по формулам полного поля, асимптотические формулы в этом случае используются только для расчета высокочастотной части кривой, когда эта кривая рассчитывается для больших разносов  $r/h_1$  (мощные слои).

Кривая  $\rho_3/\rho_1$  достаточно чувствительна к изменению сопротивления высокоомного слоя (пример влияния сопротивления  $\mu_2 > 1$  дан на рис. 3). Однако разрешающая способность кривых относительно определения  $\mu_2$  снижается для больших  $\mu_2$ ; при этом су-

ществует такое  $\mu_2 = \mu_2^*$ , которое можно положить равным  $\mu_2^* = \infty$ , т. е. считать высокоомный слой изолятором.

Для разреза типа К значение  $\mu_2 = \mu_2^*$ , для которого высокоомный слой можно считать изолятором, будет зависеть в основ-

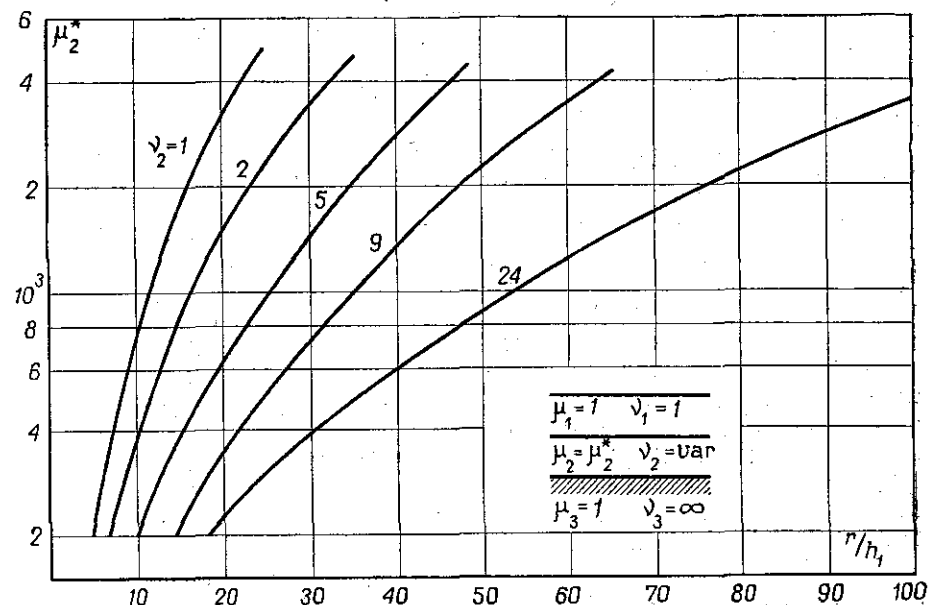


Рис. 4. График значений сопротивления  $\mu_2^*$  высокоомного слоя в зависимости от разноса  $r/h_1$  для разрезов с различной мощностью  $\nu_2$  высокоомного слоя

ном от двух параметров: мощности высокоомного слоя  $\nu_2 = h_2/h_1$  и величины разноса  $r/h$  (или  $r/H$ ).

Расчеты показали, что значения  $\mu_2^*$  будут различными для высокочастотной и низкочастотной областей кривой  $\rho_3/\rho_1$ , т. е. для интервала  $\lambda_1/h_1$ , включающего минимум кривой, и для значений  $\lambda_1/h_1$ , соответствующих конечной части кривой, включая горизонтальную асимптоту. При этом значения  $\mu_2^*$  для малых  $\lambda_1/h_1$  будут больше значений  $\mu_2^*$  для больших  $\lambda_1/h_1$ . На рис. 4 приведен график значений  $\mu_2^*$  для различных разносов  $r/h_1$ . Каждая кривая соответствует выбранной мощности высокоомного слоя, которая принимает значения  $\nu_2 = 1, 2, 5, 9, 24$ .

Значения  $\mu_2^*$  определены по стационарной части кривой  $\rho_3/\rho_1$  с точностью до 10%. График позволяет провести ориентировочную оценку значений  $\mu_2^*$  при зондированиях на разносах, используемых на практике. Зондирование разрезов с высокоомным



слоем, имеющим сопротивление  $\mu_2 > \mu_2^*$ , не позволяет исследовать строение разреза под высокоомным слоем, который в этом случае приобретает свойства слоя-изолятора.

## § 2. ЭФФЕКТИВНЫЕ РАЗНОСЫ

Как известно, в методе ЧЗ в условиях любого геологического разреза значительную роль для получения экспериментальной кривой, характерной для данного разреза и вследствие этого наиболее удобной для проведения надежной интерпретации, играет разнос, на котором проводится зондирование. Для высокоомных разрезов выбор разноса имеет особо важное значение, так как форма кривой в этом случае изменяется в зависимости от разноса весьма существенно.

Остановимся подробно на типичном примере высокоомного разреза типа *K*, иллюстрируемом палеткой рис. 2. Разрез включает высокоомный слой сопротивления  $\mu_2 = 32$ , имеющий мощность  $\nu_2 = 4$ , и подстилается хорошо проводящей толщей сопротивления  $\mu_3 = 1/128$ . На палетке собраны кривые для разносов  $r/h_1 = 4; 10; 15; 20; 25; 30; 40$ . Пунктиром дополнительно проведены кривые для двухслойного разреза с подстилающим основанием  $\mu_2 = 32, \nu_2 = \infty$  для разносов  $r/h_1 = 4; 10; 20$ . При малых разносах кривые разреза *K* полностью совпадают с соответствующими кривыми двухслойного разреза. Естественно, что зондирования на таких разносах не позволяют выявить высокоомный слой и исследовать проводящую зону под высокоомным слоем. С увеличением разноса совпадение кривых имеет место только в начальной части, затем кривые расходятся; это расхождение увеличивается с ростом разноса  $r/h_1$ , но кривые типа *K* сохраняют при этом конфигурацию кривых двухслойного разреза. Кроме того, анализ большого числа палеток показал, что возможно совпадение кривых *K* и двухслойных и в низкочастотной области при расхождении их в области высоких частот. В этом случае значения  $\mu_2$  могут совпадать, а разноса  $r/h_1$  либо совпадать, либо отличаться друг от друга. Так как на практике экспериментальные кривые записываются обычно без начальной части, то при интерпретации таких кривых могут быть допущены большие ошибки. Именно при интерпретации кривой, записанной в условиях разреза типа *K* с помощью двухслойной палетки, будут неправильно определены параметры первого слоя и неизвестными окажутся параметры нижележащих слоев. При интерпретации экспериментальной кривой двухслойного разреза с помощью кривых типа *K* двухслойному разрезу ошибочно будут приписаны несуществующий второй слой конечной мощности и третий слой (основание). Такая ошибочная интерпретация может быть допущена, если экспериментальная кривая  $\rho_s$  записана только на одном разносе. Если же провести зондирования на разных разносах, значительно отличающихся друг от друга, то кривые двухслойные и кривые типа *K* уже не будут совпадать друг с дру-

гом для всех разносов. Поэтому на практике в условиях двухслойного разреза или разреза типа *K* следует проводить зондирования хотя бы на двух разносах для определения типа разреза.

Далее существует серия кривых типа *K* для средних разносов, также неблагоприятных для интерпретации. К ней относятся кривые, в низкочастотной области слабо реагирующие на изменение разноса (например, на рис. 2 стационарные части кривых  $r/h_1 = 10$  и  $r/h_1 = 25$  незначительно отличаются друг от друга). Использование величины разноса как параметра при интерпретации в этом случае также может привести к большим ошибкам при расчете мощностей слоев разреза. Наличие таких кривых связано с тем обстоятельством, что стационарное значение кривой *K* с ростом разноса сперва возрастает, а затем уменьшается.

Наконец, при достаточно больших разносах кривые *K* приобретают характерную форму, имея явно выраженный максимум и ниспадающую правую ветвь перед выходом на стационарное значение (на правую асимптоту). Эти кривые удобны для интерпретации и могут быть использованы для выделения высокоомного слоя в разрезе и исследования проводящей зоны под высокоомным слоем.

Таким образом, при зондировании высокоомных разрезов существует область эффективных разносов. В разрезах типа *K* за нижнюю границу эффективных разносов примем разнос  $(r/h_1)_0$ , начиная с которого значения  $\rho_s/\rho_1$  на горизонтальной правой асимптоте начинают убывать при увеличении разноса. Тогда эффективный разнос  $(r/h_1)_{\text{эф}}$  должен быть больше  $(r/h_1)_0$ .

На рис. 5 приведена номограмма, построенная в координатах  $\mu_2$  и  $\nu_2$  с изолиниями  $(r/h_1)_0 = \text{const}$  для случая, когда сопротивление основания  $\mu_3 = 1$ ; значения  $\mu_2$  и  $\nu_2$  изменяются в пределах  $\mu_2 = 4 \div 100$ ;  $\nu_2 = 1/2 \div 60$ . По приведенной номограмме можно сделать оценку, при каких разносах следует проводить зондирования в условиях трехслойного разреза типа *K*. Номограмма показывает, что для разрезов с мощными высокоомными слоями можно проводить зондирования на относительно меньших разносах  $r/H$  для того, чтобы получить уверенный результат.

Кроме эффективных разносов следует отметить наличие весьма больших разносов, для которых на стационарном значении  $(\rho_s/\rho_1)_{\text{ст}}$  не сказывается изменение разноса. Для разреза, приведенного на рис. 2, нижней границей таких разносов будет

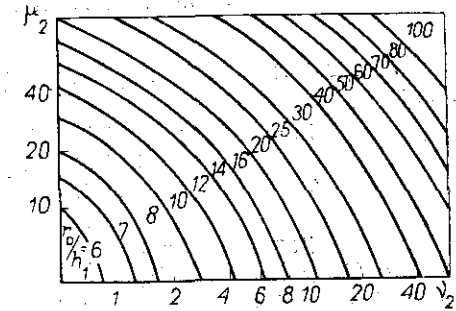


Рис. 5. Номограмма значений эффективных разносов для разреза типа «*K*» с различными значениями параметров  $\mu_2$  и  $\nu_2$

$(r/h_1)^* \approx 400$  или  $(r/H)^* \approx 80$ . Эти разности соответствуют выходу кривой постоянного тока на асимптоту  $\rho_2/\rho_1 = \mu_3$ . Частотные кривые  $\rho_2/\rho_1$  в данном случае позволяют определить сопротивление проводящего основания по правой асимптоте кривой, так как соответственно принятой нормировке для таких разностей

$$2(\rho_2/\rho_1)_{ст} = \mu_3.$$

### § 3. ВЫДЕЛЕНИЕ ВЫСОКООМНОГО СЛОЯ В РАЗРЕЗЕ ТИПА К ПО МАКСИМУМУ КРИВОЙ $\rho_2/\rho_1$

Разрез типа К характеризуется следующими тремя параметрами:

$\mu_2 = \rho_2/\rho_1$  — сопротивлением высокоомного слоя в единицах сопротивления первого слоя;

$v_2 = h_2/h_1$  — мощностью высокоомного слоя в единицах мощности первого слоя;

$\mu_3 = \rho_3/\rho_1$  — относительным сопротивлением основания.

При этом  $\mu_2 > 1$  и  $\mu_2 > \mu_3$ . Разрез полностью определен, если известны все три параметра  $\mu_2$ ,  $v_2$ ,  $\mu_3$ . Однако в геофизических задачах обычно разделяют две задачи. К первой относится выделение высокоомного слоя в разрезе. Под этим понимается определение как величины сопротивления  $\mu_2$ , так и значений мощности слоя и глубины его залегания, т. е. определение положения границ  $h_1$  и  $h_1 + h_2$ . Наибольший интерес при этом представляет определение  $h_1$  и  $h_1 + h_2$ , так как обычно достаточно дать лишь оценку значения  $\mu_2$ . Такая задача связана с разведкой полезных ископаемых, залегающих в пределах осадочного чехла. Ко второй задаче относится поиск в фундаменте проводящих зон и исследование природы среды, лежащей под высокоомным слоем. В этих задачах наибольший интерес представляет определение границы  $h_1 + h_2$  и значения  $\mu_3$ . В этом параграфе мы остановимся на первой задаче, именно на выяснении возможности с помощью частотных зондирований уверенно выделять в разрезе высокоомный слой, понимая под этим определение  $h_1$  и  $h_2$ . Этот вопрос мы рассмотрим в рамках прямой задачи.

При интерпретации экспериментальных частотных кривых большое значение имеет использование характерных точек кривой. К их числу на кривой типа К относятся: координаты максимума кривой, которые мы обозначим через  $(\rho_2/\rho_1)_{\max}$  и  $(\lambda_1/h_1)_{\max}$ , стационарное значение  $(\rho_2/\rho_1)_{ст}$ , т. е. низкочастотная асимптота, а также угол наклона к оси  $\lambda_1/h_1$  восходящей ветви кривой.

Наиболее целесообразно использовать отношение  $(\rho_2/\rho_1)_{\max}$  к  $(\rho_2/\rho_1)_{ст}$ , равное  $(\rho_2)_{\max}/(\rho_2)_{ст}$ , так как в этом случае отпадает необходимость знать сопротивление первого слоя разреза  $\rho_1$ , определение которого по экспериментальным частотным кривым  $\rho_2$

бывает затруднено. Вместо параметра  $\lambda_1/h_1$ , используемого при расчетах, удобно также рассматривать величину  $(\lambda_1/r)_{\max} = (\lambda_1/h_1)_{\max} \cdot h_1/r$ , так как разнос всегда известен при проведении зондирования.

Рассмотрим возможность использования значений  $(\rho_2/\rho_1)_{\max}$  и  $(\lambda_1/r)_{\max}$  для выделения в разрезе высокоомного слоя. При этом введем обозначения  $\rho_2/\rho_1 = \tilde{\rho}_2$  и  $\lambda_1/r = \tilde{\lambda}$ .

Графики разрешающей способности  $(\tilde{\rho}_2)_{\max}$  при выделении высокоомного слоя в разрезе представляют собой, как известно, изображение производных  $\tilde{\rho}_{\max}/\partial h_1$  для фиксированных значений  $r/h_2 = \text{const}$  и  $\tilde{\rho}_{\max}/\partial h_2$  при  $r/h_1 = \text{const}$ . То же соответственно для параметра  $\tilde{\lambda}_{\max}$ . По этим графикам можно провести количественную оценку точности определения  $h_1$  и  $h_2$  для различных разностей.

Соответствующие расчеты были проведены для серии параметров  $\mu_2$ ,  $v_2$ ,  $\mu_3$ ,  $r/h_1$ ,  $r/h_1 + h_2$ . Для сокращения количества приведенных графиков соединим результаты расчетов разрешающей способности координат максимума кривых  $(\tilde{\rho}_2)_{\max}$  и  $\tilde{\lambda}_{\max}$  разреза типа К в одну номограмму, которая позволит сделать ряд основных выводов и провести оценку значений оптимальных разностей, а также наиболее благоприятных геологических условий для применения метода ЧЗ. В качестве примера мы приведем номограмму для разреза  $\mu_2 = 8$ ;  $\mu_3 = 1/64$ ;  $v_2 = \text{var}$  (рис. 6).

Номограмма построена в координатах  $\tilde{\rho}_{\max}$  и  $\tilde{\lambda}_{\max}$ . Так как нас интересует разрешающая способность кривых  $\tilde{\rho}_2$  как при определении мощности высокоомного слоя  $h_2$ , так и глубины его погружения  $h_1$  при зондированиях на разных разностях  $r$ , то на номограмме проведены изолинии  $x = h_1/r = \text{const}$  и  $y = h_2/r = \text{const}$ , включающие все интересующие нас величины. Кроме того, номограмма объединяет обе координаты  $\tilde{\rho}_{\max}$ ,  $\tilde{\lambda}_{\max}$ , что соответствует разработанным способам интерпретации.

Точка пересечения изолиний, имея координаты  $\tilde{\rho}_{\max}$ ,  $\tilde{\lambda}_{\max}$ , соответствует, кроме того, значению мощности высокоомного слоя разреза, для которого проводились расчеты на разности  $r$ , так как  $y/x = v_2$ . Значения  $x$  и  $y$  в точке пересечения изолиний позволяют также определить относительный разнос  $r/H$ , при котором проводится зондирование в известном разрезе со слоем мощности  $v_2 = y/x$ , так как  $\frac{1}{x+y} = r/H$ . По номограмме можно также, зная параметры разреза и разнос, рассчитать экстремальные значения  $(\tilde{\rho}_2)_{\max}$  и  $\tilde{\lambda}_{\max}$  соответствующей частотной кривой, так как  $x = \frac{H}{r}(1+v_2)$ ;  $y = \frac{H v_2}{r(1+v_2)}$ . Приведенная номограмма построена для мощности высокоомного слоя, изменяющегося в пределах  $0,02 \leq v_2 \leq 64$ , и для разностей  $0,5 < r/H < 40$ . Аналогичная

номограмма в координатах  $(\tilde{\rho}_a)_{\min}$ ,  $(\tilde{\lambda})_{\min}$  была приведена в [1] для выяснения возможности выделения в разрезе слоя-изолятора при использовании в качестве особой точки минимума кривой.

Интерес представляют два вопроса: какие мощности высокоомного слоя  $h_2$  мы можем уверенно определять при зондировании

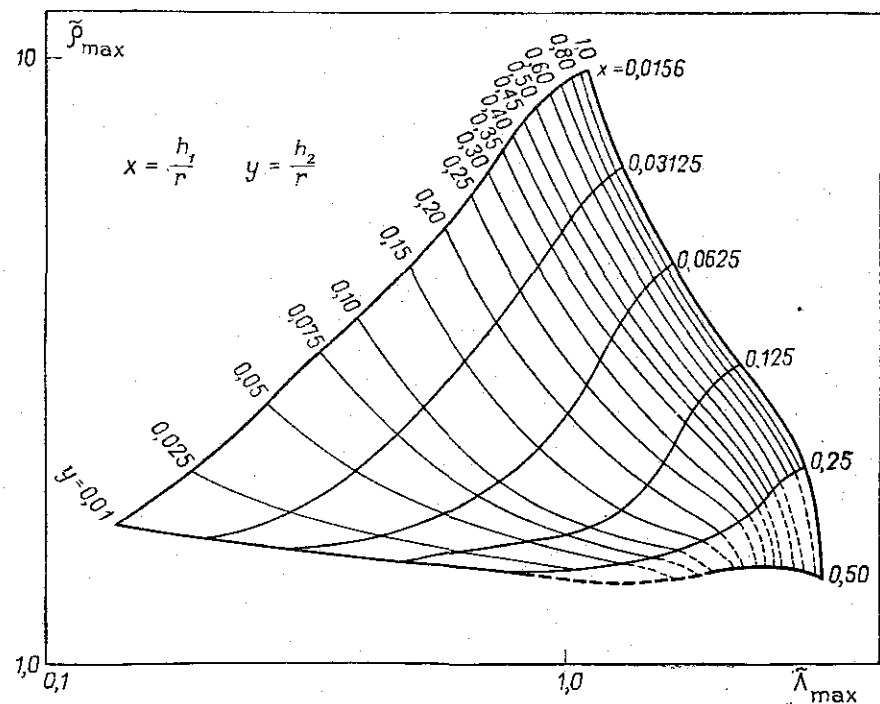


Рис. 6 Номограмма значений  $(\tilde{\rho}_a)_{\max}$  и  $(\tilde{\lambda})_{\max}$  для трехслойных разрезов типа «К» с высокоомным слоем  $\mu_2 = 8$  и параметрами  $x = h_1/r$  и  $y = h_2/r$

на выбранных разносах и на какой глубине  $h_1$  выделяемый высокоомный слой может располагаться.

Рассмотрим номограмму при условии постоянства разноса  $r = \text{const}$ , при котором проводящий зондирования. В этом случае перемещение по изолинии  $x = \text{const}$  означает, что на одинаковой глубине расположен слой, мощность которого  $h_2$  изменяется. Перемещение по изолинии  $y = \text{const}$  означает, что слой одной и той же мощности  $h_2$  погружен от поверхности Земли на разные глубины  $h_1$ .

По приведенной номограмме хорошая разрешающая способность (по  $\tilde{\rho}_a)_{\max}$  и  $(\tilde{\lambda})_{\max}$ ) падает на область

$$x < 0,125; \quad y < 0,25.$$

Область со слабой разрешающей способностью соответствует разносам, недостаточно большим либо по сравнению с глубиной залегания высокоомного слоя, либо по сравнению с мощностью этого слоя. Увеличивая разнос, мы всегда можем попасть в область хорошей разрешающей способности кривой  $\tilde{\rho}_a$  и уверенно определить параметры высокоомного слоя  $h_1$  и  $h_2$ , используя координаты максимума кривой.

#### § 4. ВЛИЯНИЕ НА ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПРОВОДЯЩЕЙ ЗОНЫ

Случай, когда разрез содержит слой-изолятор, подробно рассмотрен в [1]. Поэтому остановимся на возможности изучения при

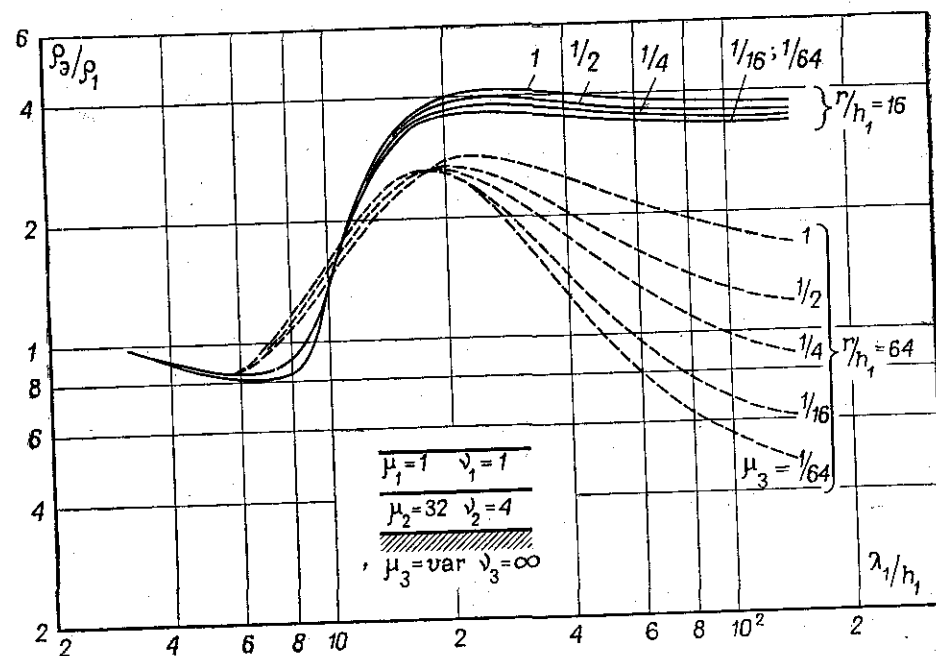


Рис. 7. Кривые  $\rho_a/\rho_1$  трехслойного разреза типа «К» с различным сопротивлением  $\mu_3$  подстилающего основания

помощи компоненты  $E_x$  строения разреза под слоем высокого, но конечного сопротивления, т. е. на случае, когда  $\mu_i \gg 1$ ,  $\mu_i \neq \infty$ . Такая задача весьма часто ставится на практике. В частности, при исследовании строения кристаллического фундамента наряду с определением верхней границы проводящей зоны интерес пред-

ставляет также выяснение природы самой проводящей зоны и расчет ее электродинамических характеристик.

Результаты расчетов кривых  $\rho_a$  для большого количества различных типов разрезов, включающих высокоомный слой (разрезов типа К, КН, КQ, КНКН), и анализ особенностей кривых для этих разрезов показали принципиальную возможность изучать ме-

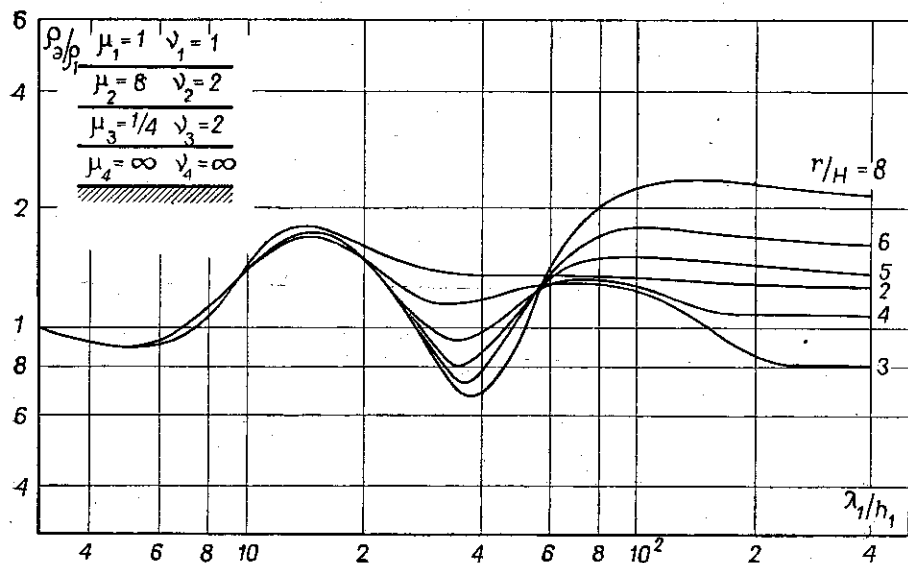


Рис. 8. Палетка кажущегося сопротивления  $\rho_a/\rho_1$  для разреза типа «КН» при  $\mu_2 \neq \infty$  и  $\mu_3 < 1$

тодом ЧЗ с помощью электрической составляющей поля  $E_x$  строение разреза под высокоомным слоем конечного сопротивления, в частности, выделять в разрезе несколько слоев высокого сопротивления. Следует при этом отметить, что во всех случаях, когда в разрезе имеется высокоомный слой, большую роль при формировании кривой играет величина разноса, на котором проводится зондирование. Приведем два примера.

**1. Разрез типа К.** В этом случае стоит задача определения значения сопротивления основания разреза, т. е. сопротивления  $\mu_3$ . Расчеты показали, что кривые  $\rho_a$  для случая  $\mu_3 \leq 1$  будут отличаться от случая  $\mu_3 > 1$ , но для хорошо проводящего основания, когда  $\mu_3 \ll 1$  (примерно  $\mu_3 < 1/4$ ), равно как и для слабо проводящего основания, когда  $\mu_3 \gg 1$ , разрешающая способность кривых  $\rho_a$  резко снижается при изменении  $\mu_3$ , особенно на малых и средних разносах. Необходимы разносы, значительно превышающие глубину залегания верхней границы проводящей зоны (в среднем  $r/H > 6$ ), для того, чтобы оценить с достаточной степенью точно-

сти сопротивление основания  $\mu_3$ . Рис. 7 иллюстрирует влияние сопротивления  $\mu_3$  на кривую  $\rho_a$ , рассчитанную для средних и для больших разносов. Для рассматриваемого разреза разнос  $r/h_1 = 16$  не позволяет достаточно надежно рассчитывать сопротивление  $\mu_3$ ; для определения  $\mu_3$  необходимо проводить зондирование на весьма больших относительных разносах (например на разносе  $r/h_1 = 64$ ).

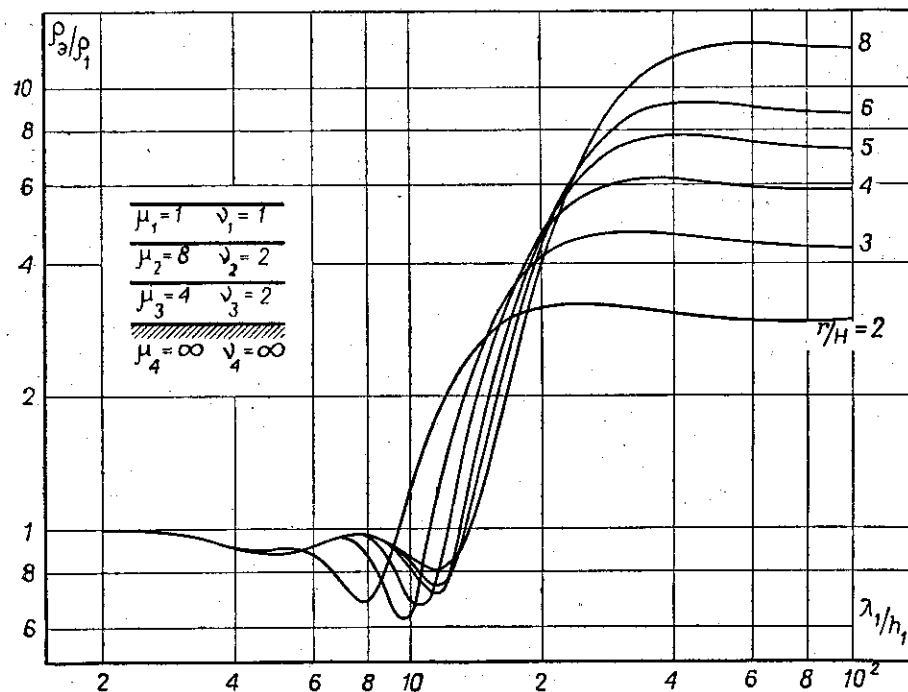


Рис. 9. Палетка кажущегося сопротивления  $\rho_a/\rho_1$  для разреза типа «КН» при  $\mu_2 \neq \infty$  и  $\mu_3 > 1$

Из сказанного следует, что для большого интервала изменения разноса  $r/h_1$  кривые четырехслойного разреза КQ не могут существенно отличаться от кривых соответствующего трехслойного разреза К, т. е. постепенное уменьшение сопротивления основания, состоящего из нескольких слоев, не скажется на кривых  $\rho_a$ , рассчитанных для однородного основания с постоянным малым значением  $\mu_3$ .

**2. Кривые КН.** Расчет кривых для разреза типа КН наиболее наглядно показывает принципиальную возможность изучения по кривым  $\rho_a$  строения разреза под слоем высокого, но конечного со-

противления, в частности, исследовать хорошо проводящую надпорную толщу разреза (т. е. параметры  $\mu_3$  и  $\nu_3$ ). При этом в случае хорошо проводящей надпорной толщи большое влияние на разрешающую способность кривых  $\rho_s$ , как и во всех высокоомных разрезах, оказывает разнос. Кривые, соответствующие таким разрезам, хорошо отмечают ход изменения кажущегося сопротивления по глубине разреза (рис. 8). Напротив, кривые  $\rho_s$  для разрезов со значением  $\mu_3 > 1$  (рис. 9) близки по форме к кривым трехслойного разреза типа А и послышная интерпретация разреза в этом случае, особенно при не резком отличии  $\mu_2$  от  $\mu_3$ , затрудняется.

Рассмотрение особенности электрической составляющей поля  $E_x$  в высокоомных разрезах указывает на широкие возможности применения метода ЧЗ в геологических условиях, соответствующих наличию в горизонтально-слоистом разрезе высокоомных слоев, что позволяет использовать метод ЧЗ при изучении строения кристаллического фундамента и поиска в фундаменте проводящих зон.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Скугаревская О. А., Федорова Э. А., Дмитриев В. И., Королева К. П. Особенности электромагнитного поля над геоэлектрическим разрезом, содержащим непроводящий слой. «Изв. АН СССР», сер. Физика Земли, № 11, 1971.
2. Дмитриев В. И., Скугаревская О. А., Федорова Э. А. О высокочастотной асимптотике электромагнитного поля в слоистых средах. «Изв. АН СССР», сер. Физика Земли, № 2, 1970.

С. Г. КОСТЯНЕВ

### ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА В ГРАДИЕНТНЫХ СРЕДАХ

В электроразведке большое значение имеет расчет и исследование поля постоянного тока в градиентной среде, когда проводимость изменяется вдоль одной избранной координаты.

В настоящей работе рассмотрен метод расчета поля для случаев произвольной зависимости проводимости среды вдоль радиуса в сферической и цилиндрической системе координат.

Если в произвольной точке помещен точечный источник тока, то возбуждаемый им потенциал  $U(M)$  удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div} \{ \sigma(r) \operatorname{grad} U(M) \} = 0 \quad \text{при } M \neq M_0, \quad (1)$$

где  $M = \{r, \theta, \varphi\}$ ,  $M_0 = \{r_0, \theta_0, \varphi_0\}$  в сферической системе координат и  $M = \{r, z, \varphi\}$ ,  $M_0 = \{r_0, z_0, \varphi_0\}$  в цилиндрической системе координат.

противления, в частности, исследовать хорошо проводящую надпорную толщу разреза (т. е. параметры  $\mu_3$  и  $\nu_3$ ). При этом в случае хорошо проводящей надпорной толщи большое влияние на разрешающую способность кривых  $\rho_3$ , как и во всех высокоомных разрезах, оказывает разнос. Кривые, соответствующие таким разрезам, хорошо отмечают ход изменения кажущегося сопротивления по глубине разреза (рис. 8). Напротив, кривые  $\rho_3$  для разрезов со значением  $\mu_3 > 1$  (рис. 9) близки по форме к кривым трехслойного разреза типа А и послойная интерпретация разреза в этом случае, особенно при не резком отличии  $\mu_2$  от  $\mu_3$ , затрудняется.

Рассмотрение особенности электрической составляющей поля  $E_x$  в высокоомных разрезах указывает на широкие возможности применения метода ЧЗ в геологических условиях, соответствующих наличию в горизонтально-слоистом разрезе высокоомных слоев, что позволяет использовать метод ЧЗ при изучении строения кристаллического фундамента и поиска в фундаменте проводящих зон.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Скугаревская О. А., Федорова Э. А., Дмитриев В. И., Королева К. П. Особенности электромагнитного поля над геоэлектрическим разрезом, содержащим непроводящий слой. «Изв. АН СССР», сер. Физика Земли, № 11, 1971.
2. Дмитриев В. И., Скугаревская О. А., Федорова Э. А. О высокочастотной асимптотике электромагнитного поля в слоистых средах. «Изв. АН СССР», сер. Физика Земли, № 2, 1970.

С. Г. КОСТЯНЕВ

### ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА В ГРАДИЕНТНЫХ СРЕДАХ

В электроразведке большое значение имеет расчет и исследование поля постоянного тока в градиентной среде, когда проводимость изменяется вдоль одной избранной координаты.

В настоящей работе рассмотрен метод расчета поля для случаев произвольной зависимости проводимости среды вдоль радиуса в сферической и цилиндрической системе координат.

Если в произвольной точке помещен точечный источник тока, то возбуждаемый им потенциал  $U(M)$  удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div} \{ \sigma(r) \operatorname{grad} U(M) \} = 0 \quad \text{при } M \neq M_0, \quad (1)$$

где  $M = \{r, \theta, \varphi\}$ ,  $M_0 = \{r_0, \theta_0, \varphi_0\}$  в сферической системе координат и  $M = \{r, z, \varphi\}$ ,  $M_0 = \{r_0, z_0, \varphi_0\}$  в цилиндрической системе координат.

На границах разрыва проводимости  $\sigma(r)$  вследствие непрерывности касательной к границам компоненты электрического поля  $\vec{E}$  и нормальной компоненты тока  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  имеют место следующие условия сопряжения:

$$[U] = 0; \quad \left[ \sigma(r) \frac{\partial U}{\partial r} \right] = 0 \quad (2)$$

(здесь и всюду в дальнейшем квадратные скобки означают разность предельных значений с различных сторон поверхности разрыва параметра  $\sigma$ ). Кроме того, на бесконечности имеет место условие регулярности функции  $U(M)$ . Условие возбуждения имеет вид

$$U(M) \sim \frac{I}{2\pi\sigma_0 r_{MM_0}} \quad \text{при } M \rightarrow M_0, \quad (3)$$

где  $\sigma_0 = \sigma(r_0)$ ,  $I$  — сила источника тока,  $r_{MM_0}$  — расстояние между точками  $M$  и  $M_0$ .

Решение задачи (1) — (3) можно искать в виде

$$U(M) = \frac{I}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} F_n(r) \cdot P_n(\cos \theta) \quad (4)$$

для сферического случая, где  $P_n(\cos \theta)$  — полином Лежандра  $n$ -го порядка первого рода от  $\cos \theta$ , а  $F_n(r)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dr} \left\{ r^2 \sigma(r) \frac{dF_n(r)}{dr} \right\} - \sigma(r) \lambda_n F_n(r) = 0 \quad (5)$$

при  $r \neq r_0$  и  $\lambda_n = n(n+1)$  и

$$U(M) = \frac{I}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \cos n \varphi \int_0^{\infty} R_n(r, \lambda) \cos \lambda z d\lambda \quad (6)$$

для цилиндрического случая, где  $R_n(r, \lambda)$  будет удовлетворять уравнению при  $r \neq r_0$

$$\frac{d}{dr} \left\{ r \sigma(r) \frac{dR_n}{dr} \right\} - \sigma(r) \cdot r \left\{ \lambda^2 + \frac{n^2}{r^2} \right\} R_n = 0. \quad (7)$$

При  $r = r_0$  имеем условия

$$[F_n(r)]_{r=r_0} = 0, \quad \left[ \frac{dF_n(r)}{dr} \right]_{r=r_0} = \frac{2n+1}{\sigma(r_0) r_0^2}, \quad (8)$$

$$[R_n(r)]_{r=r_0} = 0, \quad \left[ \frac{dR_n(r)}{dr} \right]_{r=r_0} = \begin{cases} \frac{2}{\pi \sigma(r_0) r_0} & n=0, \\ \frac{4}{\pi \sigma(r_0) r_0} & n \geq 1. \end{cases} \quad (9)$$

В точках разрыва  $\sigma(r)$  выполняются граничные условия

$$\begin{aligned} [F_n(r)] = 0, \quad \left[ \sigma(r) \frac{dF_n(r)}{dr} \right] &= 0, \\ [R_n(r)] = 0, \quad \left[ \sigma(r) \frac{dR_n(r)}{dr} \right] &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $F_n$  и  $R_n$  ограничены при  $r \rightarrow 0$  и  $F_n \rightarrow 0$ ,  $R_n \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ .

Численное решение задач (5) и (7) наиболее удобно проводить следующим образом. Введем вместо функций  $F_n$  и  $R_n$  новые функции:

$$Z_n(r) = \frac{r^2 \sigma(r)}{F_n(r)} \cdot \frac{dF_n}{dr}, \quad Y_n = \frac{r \sigma(r)}{R_n(r)} \cdot \frac{dR_n}{dr}, \quad (11)$$

которые удовлетворяют соответствующим уравнениям Риккати:

$$\frac{dZ_n}{dr} + \frac{1}{r^2 \sigma(r)} Z_n^2(r) = \sigma(r) \cdot \lambda_n, \quad (12)$$

$$\frac{dY_n}{dr} + \frac{1}{r \sigma(r)} Y_n^2(r) = \sigma(r) \cdot r \left( \lambda^2 + \frac{n^2}{r^2} \right). \quad (13)$$

Мы должны задать условия поведения  $Z_n(r)$  и  $Y_n(r)$  при  $r \rightarrow 0$  и  $r \rightarrow \infty$ . Так как общее решение для  $F_n(r)$  при  $\sigma = \text{const}$  есть

$$F_n(r) = Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}},$$

то получаем

$$Z_n \sim n \sigma(r) r \quad \text{при } r \rightarrow 0,$$

$$Z_n \sim -(n+1) \sigma(r) r \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Аналогично для  $Y_n(r)$  получаем

$$Y_n \sim n \sigma(r) \quad \text{при } r \rightarrow 0,$$

$$Y_n \sim -\sigma(r) \left[ \lambda r + \frac{1}{2} \right] \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Пусть  $\sigma(r)$  задано в виде

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_0 & \text{при } 0 < r < a_0, \\ \sigma(r) & \text{при } a_0 < r < a, \\ \sigma_n & \text{при } r > a. \end{cases}$$

Так как функции  $Z_n$  и  $Y_n$  непрерывны, то мы получаем граничные условия в виде

$$Z_n(a_0) = n \sigma_0 a_0, \quad Z_n(a) = -(n+1) \sigma_n a, \quad (14)$$

$$Y_n(a_0) = \lambda \sigma_0 a_0 \frac{I'_n(\lambda a_0)}{I_n(\lambda a_0)}, \quad Y_n(a) = \lambda \sigma_n a \frac{K'_n(\lambda a)}{K_n(\lambda a)}. \quad (15)$$

Таким образом, для определения  $Z_n(r)$  и  $Y_n(r)$  надо решить задачи Коши для уравнений (12) и (13) с начальными условиями (14)–(15) для соответствующих участков  $a_0 < r < r_0$  и  $r_0 < r < a$ .

Решив эти задачи Коши для уравнения Риккати, найдем  $Z_n(r=r_0-0)$  и  $Z_n(r=r_0+0)$ ,  $Y_n(r=r_0-0)$ ,  $Y_n(r=r_0+0)$ . Используя (11) и условия возбуждения (8), получим

$$[Z_n(r)]_{r=r_0} = \frac{r_0^2 \sigma(r_0)}{F_n(r_0)} \left[ \frac{dF_n}{dr} \right]_{r=r_0} = \frac{2n+1}{F_n(r_0)},$$

откуда находим

$$F_n(r_0) = \frac{2n+1}{[Z_n(r)]_{r=r_0}}. \quad (16)$$

Аналогично определяем и  $R_n(r_0)$ .

Используя (11), легко можно определить функции  $F_n(r)$  и  $R_n(r)$ . Это дает нам соответственно

$$F_n(r) = F_n(r_0) \exp \left\{ \int_{r_0}^r \frac{Z_n(r)}{r^2 \sigma(r)} dr \right\}, \quad (17)$$

$$R_n(r) = R_n(r_0) \exp \left\{ \int_{r_0}^r \frac{Y_n(r)}{r \sigma(r)} dr \right\}. \quad (18)$$

Подставляя (16) в (17), а затем в (4), окончательно получим

$$U(M) = \frac{I}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) P_n(\cos \theta)}{[Z_n(r)]_{r=r_0}} \exp \left\{ \int_{r_0}^r \frac{Z_n(r)}{r^2 \sigma(r)} dr \right\}. \quad (19)$$

Аналогично и для  $R_n$ , используя (6), и

$$U(M) = \frac{I}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\varphi \int_0^{\infty} R_n(r_0) \cos \lambda z \cdot \exp \left\{ \int_{r_0}^r \frac{Y_n(r)}{r \sigma(r)} dr \right\} d\lambda. \quad (20)$$

Зная из (17) и (18) функции  $F_n(r)$  и  $R_n(r)$ , мы можем согласно (19) и (20) вычислить потенциал в произвольной точке в сферической и цилиндрической системе координат.

Для примера приведем расчет кажущегося сопротивления:

$$\rho_k^E = \frac{2\pi x^2}{I} E_x(x, y=0) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(x_0) Z_n(x)}{\sigma(x)} e^{x_0} \int_{r_0}^x \frac{Z_n(r) dr}{r^2 \sigma(r)} \quad (21)$$

для полусферического включения в проводящее полупространство. На рисунке 1 приведены значения  $\rho_k^E/\rho_1$  при различных значениях  $\rho_2/\rho_1$  в зависимости от  $r/R$ , где  $r$  — расстояние от центра включения, а  $R$  — радиус включения. Источник тока находится в точке  $M_0$ , расположенной внутри включения.

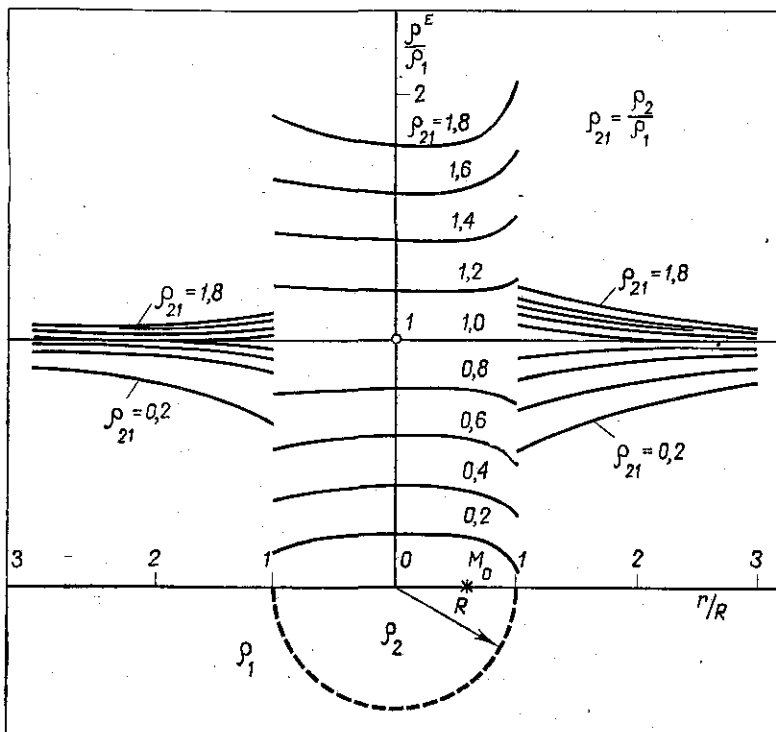


Рис. 1

Характерной особенностью этих кривых является наличие над полусферической областью ярко выраженного максимального (минимального) значения  $\rho_k^E$  при  $\rho_{21} > \rho_1$  ( $\rho_{21} < \rho_1$ ). Слева и справа полусферы значения  $\rho_k^E$  стремятся к постоянной величине  $\rho_1$ .