

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
В ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

XXXII

СБОРНИК ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

*Под редакцией
В. И. Дмитриева и А. С. Ильинского*

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

1980

Из содержания Т.32, 1980г.,

- Н. И. Березина, В. И. Дмитриев.* О методах численного исследования задач синтеза излучающих систем. **56**
- В. И. Дмитриев, Э. А. Федорова,* Численные исследования электромагнитных полей в слоистых средах. **150**
- Е. В. Захаров, И. В. Ильин, Н. И. Несмеянова.* Методы численного анализа математических моделей электромагнитного каротажа скважин. **184**
- В. И. Дмитриев, Н. А. Мерщикова.* Метод интегральных уравнений при моделировании электромагнитных зондирований неоднородных сред. **200**

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ АНТЕННО-ФИДЕРНЫХ УСТРОЙСТВ

Н. И. БЕРЕЗИНА, В. И. ДМИТРИЕВ

О МЕТОДАХ ЧИСЛЕННОГО
ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ
СИНТЕЗА ИЗЛУЧАЮЩИХ СИСТЕМ

В течение последних десяти лет в НИВЦ МГУ проводились работы, связанные с разработкой и применением математических методов к решению одной из основных задач проектирования антенных систем — задачи синтеза излучающей системы по заданной диаграмме направленности. Накопленный опыт говорит об эффективности применения вариационного подхода к постановке и решению различных задач синтеза антенн. Настоящая работа посвящена результатам, полученным при применении вариационного подхода к решению задач синтеза антенн по амплитудной диаграмме направленности. Круг рассматриваемых в статье вопросов включает как вопросы математических постановок задач синтеза, так и вопросы численных методов решения соответствующих вариационных задач. Обсуждаются также особенности применения вариационного подхода к задачам амплитудного синтеза.

Введение

Для многих типов антенн можно построить такую математическую модель, что связь между диаграммой направленности антенны по полю и некоторым N -мерным вектором (который характеризует способ возбуждения антенны и в дальнейшем называется вектором возбуждения (в. в.) антенны) может быть описана с помощью линейного оператора, действующего из конечномерного векторного пространства X_N в. в. антенны в пространство непрерывных функций.

К такому типу антенн относятся дискретные антенны, т. е. антенны, имеющие физическую дискретную структуру, например волноводно-щелевые решетки, системы одиночных излучателей и др. Для этих антенн естественным образом вводится понятие век-

тора возбуждения антенны $a = \{a_1, \dots, a_N\}$ [1]. Компонентами в. в. a являются комплексные числа, которые представляют собой комплексные амплитуды возбуждения излучателей и могут иметь различный физический смысл. Компонентами вектора a могут быть электрические или «магнитные» токи в излучателях антенны, тангенциальные составляющие поля в раскрывах излучателей и т. д.

Обозначим через $\hat{f}_n(\theta, \varphi)$ индивидуальную д. н. по полю n -го излучателя дискретной антенны. Тогда связь между д. н. по полю всей дискретной антенны и в. в. антенны $a = \{a_1, \dots, a_N\}$ описывается соотношением

$$D(\theta, \varphi) = \sum_{n=1}^N a_n \hat{f}_n(\theta, \varphi); \quad (1)$$

$$\hat{f}_n(\theta, \varphi) = \hat{f}_n(\theta, \varphi) e^{i(kx_n \sin \theta \cos \varphi + ky_n \sin \theta \sin \varphi + kz_n \cos \theta)}, \quad (2)$$

где $\{kx_n, ky_n, kz_n\}$ — приведенные координаты n -го излучателя антенны, а (θ, φ) — угловые координаты точки наблюдения.

Для непрерывных антенн в некоторых случаях также можно ввести понятие конечномерного в. в. антенны. В этом случае связь между д. н. $D(\theta, \varphi)$ и током в антенне $J(\vec{m})$ описывается с помощью интегрального оператора

$$D(\theta, \varphi) = \int_V G(\theta, \varphi, \vec{m}) J(\vec{m}) d\vec{v}. \quad (3)$$

V — область, где локализован ток $J(\vec{m})$. Допустим, что заданная д. н. $D(\theta, \varphi)$ определяется током $J(\vec{m})$. Этот ток в антенне создается с помощью возбуждения системы питания антенны с конечным числом входов. Обозначим через $a = \{a_1, \dots, a_N\}$ комплексные амплитуды возбуждения входов системы питания. Если связь между $J(\vec{m})$ и a линейна, то в силу линейности соотношения (3) связь между д. н. $D(\theta, \varphi)$ и в. в. антенны будет определяться с помощью линейного оператора

$$D = P[a]. \quad (4)$$

Пусть для некоторого базиса l_1, \dots, l_N в пространстве X_N известны д. н., которые будет иметь антенна, если она возбуждается векторами

$$f_i(\theta, \varphi) = P[l_i]. \quad (5)$$

Тогда д. н., которая соответствует произвольному вектору $a = \{a_1, \dots, a_N\}$, связана с a соотношением

$$D(\theta, \varphi) = \sum_{n=1}^N a_n f_n(\theta, \varphi), \quad (6)$$

имеющим такой же вид, как и для дискретной антенны. Действительная функция

$$F(\theta, \varphi) = |D(\theta, \varphi)|^2 \quad (7)$$

называется амплитудной диаграммой направленности антенны.

В работе рассматриваются задачи синтеза по амплитудной диаграмме направленности для дискретных антенн или непрерывных антенн, которые математически можно описать как дискретные, при заданной геометрии антенны, т. е. заданных функциях $f_1(\theta, \varphi), \dots, f_N(\theta, \varphi)$.

1. Постановка задач простого и оптимального амплитудно-фазового синтеза

Удобной формой математического описания требований к амплитудной д. н. являются неравенства, которые определяют допустимые значения для амплитудной д. н. в заданном множестве точек.

В области рассматриваемых углов наблюдения выберем систему точек $\psi_i = \{\theta_i, \varphi_i\}$, $i = 1, 2, \dots, L$, которые в дальнейшем будем называть контролируемыми направлениями. Пусть ψ_i , $i = 1, \dots, M$ находятся в области главного лепестка, а ψ_i , $i = M+1, \dots, L$ в области боковых лепестков. Обозначим через $F_i(a)$ значение амплитудной д. н., соответствующей в. в. антенны a , в направлении $\psi_i = \{\theta_i, \varphi_i\}$.

Зададим допустимые границы изменения амплитудной д. н. в контролируемых направлениях неравенствами

$$d_i \leq F_i(a) \leq c_i, \quad i = 1, \dots, M; \quad (8)$$

$$F_i(a) \leq c_i, \quad i = M+1, \dots, L.$$

Неравенства (8) позволяют учесть все основные требования, которые обычно предъявляются на практике к а. д. н. Отметим, что при такой форме задания синтезируемой д. н., значения д. н. отдельных источников необходимо знать только в контролируемых направлениях $\psi_i = \{\theta_i, \varphi_i\}$, $i = 1, \dots, L$.

Множество в. в., которым соответствуют амплитудные д. н., удовлетворяющие в контролируемых направлениях неравенствам (8), обозначим через D .

Если нет никаких ограничений на в. в. антенны, задачу синтеза можно сформулировать как задачу нахождения какого-либо вектора из множества D , т. е. в. в. антенны, который определяет амплитудную д. н., удовлетворяющую неравенствам (8). Эту задачу назовем задачей простого синтеза.

Задача простого синтеза может не иметь решений или иметь одно или несколько решений. Это зависит от того, насколько сильные требования предъявляются к синтезируемой д. н.

Как правило, при проектировании антенны на в. в. накладываются различного рода ограничения, связанные с возможностью и простотой реализации в. в. в конкретной антенне. В том случае, когда множество D содержит несколько в. в., решением задачи синтеза, естественно считать наилучший с точки зрения реализации в данной антенне в. в.

В работе [2] критерий оптимальности в. в. антенны предлагается сформулировать в виде условия минимальности некоторого функционала $\Omega(a)$. Конкретный вид функционала $\Omega(a)$ выбирается для каждой решаемой задачи и зависит от требований, которые предъявляются к в. в. при проектировании данной антенны. Например, для дискретных антенн с близко расположенными в пространстве излучающими элементами существенно, чтобы соседние компоненты в. в. не сильно отличались друг от друга по модулю, так как из-за взаимного влияния источников в. в. с резко изменяющимися по модулю компонентами трудно реализовать в реальной антенне. В этом случае в качестве $\Omega(a)$ можно взять функционал вида

$$\Omega(a) = \sum_{j=1}^N \alpha_j |a_j|^2 + \sum_{j=1}^{N-1} \beta_j |a_j - a_{j+1}|^2. \quad (9)$$

Здесь α_j, β_j — заданные неотрицательные числа, которые играют роль весовых коэффициентов.

Распространенное требование к в. в. антенны, которое состоит в том, чтобы крайние излучатели антенны не возбуждались токами с большей амплитудой, можно учесть, если задать в функционале (9) большие значения весовых коэффициентов α_j соответствующих крайним излучателям.

Другой возможный вид дополнительного функционала

$$\Omega(a) = \|a - a_0\|^2 = \sum_{i=1}^N |a_i - a_i^0|^2, \quad (10)$$

где a_0 — заданный вектор со свойствами, которые хотелось бы получить у искомого в. в. антенны.

Можно использовать предложенный в [3] функционал

$$\Omega(a) = \int_{r_0}^{r_1} R(\lambda) |\Phi(\lambda) - h(\lambda)|^2 d\lambda + \int_{-\infty}^{r_0} |\Phi(\lambda) - h(\lambda)|^2 d\lambda + \int_{r_1}^{\infty} |\Phi(\lambda) - h(\lambda)|^2 d\lambda; \quad (11)$$

$$\Phi(\lambda) = \frac{\sin \lambda H}{\lambda H} \sum_{n=1}^N a_n e^{i\lambda(2n-N)H},$$

с помощью которого можно учесть требования на спектральную характеристику непрерывной функции, эквивалентной конечно-мерному в. в. антенны [4]. Здесь H — числовой параметр; $h(\lambda)$ — заданная функция, которая представляет собой спектральную характеристику, которую хотелось бы иметь у искомого решения; $R(\lambda)$ — неотрицательная весовая функция.

Задачей оптимального синтеза дискретной антенны по амплитудной д. н. назовем следующую задачу: найти в. в. антенны, который определяет д. н., удовлетворяющую неравенствам (8) и дает минимум функционалу $\Omega(a)$, т. е. задачу

$$\min_{a \in D} \Omega(a). \quad (12)$$

Заметим, что при определенных (и естественных) условиях на весовые коэффициенты и функции все перечисленные выше дополнительные функционалы $\Omega(a)$ можно записать в виде

$$\Omega(a) = (A(a - a_0), a - a_0), \quad (13)$$

где A — положительно-определенная эрмитова матрица, a_0 — некоторый заданный N -мерный вектор. Очевидно, что в том случае, когда $\Omega(a)$ представим в виде (13), решение задачи оптимального синтеза существует, если множество D непусто.

К сожалению, в вычислительном отношении задача (12) очень сложна, так как представляет собой задачу поиска минимума выпуклой функции по невыпуклому и в общем случае несвязному множеству, эффективные методы решения которой не разработаны. Поэтому предлагается еще одна постановка задачи синтеза, которая названа задачей квазиоптимального синтеза. Решение этой задачи хотя и не обеспечивает в общем случае минимум функционалу $\Omega(a)$, но удовлетворяет условию «квазиоптимальности», смысл которого разъяснен ниже. Для решения этой задачи разработан достаточно просто реализуемый на ЭВМ алгоритм.

2. Задача квазиоптимального синтеза

В связи с тем, что множество D в задаче оптимального синтеза задано неявно, основная трудность при численном решении задачи (12) связана не столько с выбором элемента из множества D , на котором достигается минимум функционала $\Omega(a)$, сколько с поиском самих элементов множества D .

В работах [5—6] в вариационную задачу

$$\min_{a \in X_N} \left\{ \Omega(a) + \sum_{i=1}^N u_i F_i(a) \right\} \quad (14)$$

введены управляющие параметры u_i , с помощью которых можно изменять в заданных направлениях значения амплитудной д. н. в контролируемых направлениях. Следующие два утверждения

устанавливают связь между задачей (14) и задачей оптимального синтеза.

Лемма. Пусть \hat{a} — решение задачи

$$\min_{a \in X_N} \left\{ \Omega(a) + \sum_{i=1}^L \hat{u}_i F_i(a) \right\}, \quad (15)$$

где \hat{u}_i — некоторые заданные числа. Тогда \hat{a} — решение задачи

$$\min_{a \in \hat{D}} \Omega(a), \quad (16)$$

где $\hat{D} = \{a: F_i(a) \leq F_i(\hat{a}), i \in J_1(\hat{u})\}$;

$$F_i(a) \geq F_i(\hat{a}), i \in J_2(\hat{u}); \quad (17)$$

$$J_1(\hat{u}) = \{i: \hat{u}_i > 0\}; J_2(\hat{u}) = \{i: \hat{u}_i < 0\}; J_3(\hat{u}) = \{i: \hat{u}_i = 0\}. \quad (18)$$

Из леммы следует, что если мы найдем такие значения управляющих параметров \bar{u}_i , что решение \bar{a} соответствующей задачи на минимум функционала

$$\Phi(a) = \Omega(a) + \sum_{i=1}^L \bar{u}_i F_i(a) \quad (19)$$

принадлежит множеству D , то \bar{a} будет являться решением задачи оптимального синтеза на подмножестве \bar{D} множества D . Множество \bar{D} определяется неравенствами

$$\bar{D} = \{a: d_i \leq F_i(a) \leq F_i(\bar{a}), i \in J_1(\bar{u});$$

$$F_i(\bar{a}) \leq F_i(a) \leq c_i, i \in J_2(\bar{u}); d_i \leq F_i(a) \leq c_i, i \in J_3(\bar{u})\}. \quad (20)$$

Из (20) следует, что $D = \bar{D}$ в том случае, когда для каждого контролируемого направления либо $\bar{u}_i = 0$, либо значение $F_i(a)$ равно значению соответствующей границы допустимых значений для амплитудной д. н. (т. е. d_i , если $u_i < 0$ и c_i , если $u_i > 0$).

Так как $\Omega(a)$ и $F_i(a)$ — эрмитовы квадратичные формы, решение задачи (14) можно найти из системы линейных алгебраических уравнений N -го порядка.

$$A(a - a_0) + \sum_{i=1}^L u_i B_i a = 0, \quad (21)$$

B_i — эрмитова матрица, соответствующая форме $F_i(a)$. Элементы матрицы B_i выражаются через значения д. н. по полю отдельных источников в направлении $\psi_i = \{\theta_i, \varphi_i\}$ следующим образом:

$$(B_i)_{k,l} = \bar{f}_k(\theta_i, \varphi_i) \bar{f}_l(\theta_i, \varphi_i). \quad (22)$$

Несмотря на то что функции $-F_i(a)$, соответствующие ограничениям $-F_i(a) \leq -d_i, i = 1, \dots, M$, не выпуклые, в рассматри-

важном случае справедлива теорема типа теоремы Куна — Таккера. При доказательстве теоремы предполагается, что множество D удовлетворяет условию Слейтера [7], т. е. предполагается, что существует вектор $a' \in D$, удовлетворяющий неравенствам

$$\begin{aligned} d_i < F_i(a') < c_i, \quad i = 1, \dots, M; \\ F_i(a') < c_i, \quad i = M + 1, \dots, L. \end{aligned} \quad (23)$$

Теорема 1. Пусть \hat{a} — решение задачи оптимального синтеза (12) и множество D удовлетворяет условию Слейтера. Тогда существует такой вектор, управляющих параметров $\hat{u} = \{\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_N\}$, что справедливы равенства

$$A(\hat{a} - a_0) + \sum_{i=1}^L \hat{u}_i B_i \hat{a} = 0; \quad (24)$$

$$\begin{cases} \hat{u}_i ((B_i \hat{a}, \hat{a}) - c_i) (d_i - (B_i \hat{a}, \hat{a})) = 0, \quad i = 1, \dots, M \\ \hat{u}_i ((B_i \hat{a}, \hat{a}) - c_i) = 0, \quad i = M + 1, \dots, L; \\ \begin{cases} (B_i \hat{a}, \hat{a}) - c_i = 0, \quad i \in J_1(\hat{u}); \\ (B_i \hat{a}, \hat{a}) - d_i = 0, \quad i \in J_2(\hat{u}), \end{cases} \end{cases} \quad (25)$$

$J_1(\hat{u})$ и $J_2(\hat{u})$ определяются соотношениями (18).

Доказательство этой теоремы можно свести к доказательству эквивалентного утверждения для квадратичных симметричных форм от $2N$ действительных переменных, в которые переходят входящие в сформулированную выше теорему эрмитовы формы при замене переменных

$$x_{2i-1} = \operatorname{Re} a_i; \quad x_{2i} = \operatorname{Im} a_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (26)$$

Обозначим через \hat{x} образ вектора \hat{a} , который является решением задачи оптимального синтеза, при замене переменных (26). Пусть B_i и A — действительные формы, соответствующие эрмитовым формам B_i и A . Можно показать, что для любого вектора g , такого, что

$$\begin{aligned} (B_j \hat{x}, g) &\leq 0, \quad j \in I_1, \\ (B_j \hat{x}, g) &\geq 0, \quad j \in I_2, \end{aligned} \quad (27)$$

выполнено

$$(A(\hat{x} - x_0), g) \geq 0. \quad (28)$$

Множество индексов I_1 и I_2 определяются соотношениями

$$\begin{aligned} I_1 &= \{i : (B_i \hat{x}, \hat{x}) = c_i\}; \\ I_2 &= \{i : (B_i \hat{x}, \hat{x}) = d_i\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Из (27) — (28) и леммы Фаркаша [8] следует утверждение теоремы. Подробное доказательство теоремы приведено в работе [9].

В том случае, когда вектору управляющих параметров $\hat{u} = \{\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_L\}$ соответствует положительно-определенная форма

$$(Aa, a) + \sum_{i=1}^L u_i (B_i a, a), \quad (30)$$

верно и обратное утверждение: решение уравнения (24) с условиями (25) является решением задачи оптимального синтеза (12).

Обозначим через U множество векторов управляющих параметров $u = \{u_1, \dots, u_L\}$ таких, что соответствующие им формы

$$(Aa, a) + \sum_{i=1}^L u_i (B_i a, a) \quad (31)$$

положительно определены.

Задачей квазиоптимального синтеза назовем следующую задачу: среди в. в. антенны из замыкания множества

$$K = \bigcup \operatorname{argmin} \left\{ \Omega(a) + \sum_{i=1}^L u_i F_i(a) \right\} \quad (32)$$

найти в. в. антенны, который минимизирует суммарную невязку амплитудной д. н.

$$S(a) = \sum_{i=1}^M \max \{0, d_i - F_i(a), F_i(a) - c_i\} + \sum_{i=M+1}^L \max \{0, F_i(a) - c_i\}, \quad (33)$$

т. е. задачу

$$\min_{a \in \bar{K}} S(a). \quad (34)$$

Справедлива следующая теорема 2. Если $\Omega(a)$ имеет вид (13), то задача квазиоптимального синтеза имеет решение.

Действительно, так как $a_0 \in K$, то множество решений задачи (34) совпадает с множеством решений задачи

$$\min_{K_S \cap \bar{K}} S(a), \quad (35)$$

где

$$K_S = \{a : \max \{0, F_i(a) - c_i, d_i - F_i(a)\} \leq S(a_0), \quad (36)$$

$$i = 1, 2, \dots, M; \max \{0, F_i(a) - c_i\} \leq S(a_0), \quad i = M + 1, \dots, L\}.$$

Из приведенной леммы следует, что для любого $\tilde{a} \in K_S \cap \bar{K}$ справедлива оценка

$$\Omega(a) \leq \sup_{\substack{0 \leq q_i \leq c_i + S(a_0) \\ i=1, \dots, L}} \min_{\substack{F_i(a) = q_i \\ i=1, \dots, L}} \Omega(a) \quad (37)$$

Для того чтобы доказать, что правая часть неравенства (37) ограничена, сделаем замену переменных

$$\begin{aligned} z_1 &= (f_{i_1}, a); \\ &\dots \\ z_k &= (f_{i_k}, a); \\ &\dots \\ z_{k+1} &= a_{i_{k+1}}; \\ &\dots \\ z_N &= a_{i_N}. \end{aligned} \quad (38)$$

Здесь f_i — N -мерный комплексный вектор, образованный из величин, сопряженных к значениям д. н. отдельных излучателей антенны в направлении

$\psi_i = \{\theta_i, \varphi_i\}$, $f_i = \{f_{i_1}(\theta_i, \varphi_i), \dots, f_{i_N}(\theta_i, \varphi_i)\}$, а f_{i_1}, \dots, f_{i_k} — линейно-независимые векторы из множества векторов f_i , $i=1, \dots, L$, через которые можно выразить все остальные.

После замены переменных $a = Tz$, которая задается формулами (38), $F_i(a)$ будут иметь вид

$$\begin{aligned} \bar{F}_j(z) &= |z_j|^2, \quad j = 1, \dots, k; \\ \bar{F}_j(z) &= \left| \sum_{i=1}^k \alpha_i^{(j)} z_i \right|^2, \quad j = k+1, \dots, L, \end{aligned} \quad (39)$$

где коэффициенты $\alpha_i^{(j)}$ выражаются через компоненты векторов f_i , $i=1, \dots, L$.

Так как для \hat{z} , на котором достигается

$$\min(z - z_0, z - z_0), \quad (40)$$

$$\bar{F}_i(z) = q_i, \quad i = 1, \dots, L$$

должно быть выполнено

$$\begin{cases} \hat{z}_{k+1} = z_{k+1}^0, \\ \dots \\ \hat{z}_N = z_N^0, \end{cases} \quad (41)$$

то для правой части неравенства (37) справедлива оценка

$$\Omega(\tilde{a}) \leq \sup_{\substack{0 \leq q_i \leq c_i + S(a_0) \\ i=1, \dots, L}} \min_{\substack{F_i(a) = q_i \\ i=1, \dots, L}} \Omega(a) \leq 2 \|\tilde{A}\| (N \max_i (c_i + S(a_0)) + \|z_0\|^2), \quad (42)$$

где

$$\tilde{A} = T^* A T, \quad z_0 = T^{-1} a_0.$$

Из (42) следует, что $\bar{K} \cap K_S$ — ограниченное множество, а так как $S(a)$ — непрерывная функция и $\bar{K} \cap K_S$ замкнуто, то задача (35), а следовательно и (34), имеют решение.

Таким образом, задача квазиоптимального синтеза имеет решение и в том случае, когда множество D пусто — это вектор из \bar{K} , которому соответствует диаграмма, наиболее близкая к границам допустимых значений. Это существенно для приложений, так как при решении конкретных задач для реальных антенн, как правило, заранее не известно, можно ли реализовать заданные требования на рассматриваемой антенне.

Все в. в. антенны из множества \bar{K} , а следовательно и решение задачи квазиоптимального синтеза, обладают следующим свойством «квазиоптимальности».

Обозначим через G подпространство N -мерного комплексного пространства X , образованное из всевозможных линейных комбинаций векторов $g_i = \{f_{i_1}(\theta_i, \varphi_i), \dots, f_{i_N}(\theta_i, \varphi_i)\}$, $i=1, 2, \dots, L$. Пусть число линейно-независимых векторов меньше N . Тогда любой вектор $a \in X$ можно представить в виде $a = a_{\perp} + a_G$, где a_G — проекция a на G , а a_{\perp} — проекция вектора a на подпространство G_{\perp} , ортогональное G . Проекция a_{\perp} не связана с требованиями к амплитудной д. н. антенны и в том случае, когда не учтены ограничения на в. в. антенны, может привести к неограниченному возрастанию дополнительного функционала. Но так как множество K состоит из векторов, которые дают минимум функционалу

$\Omega(a) = \sum_{i=1}^L u_i F_i(a)$, то проекция любого в. в. антенны из K на пространство G_{\perp} имеет значение, которое обеспечивает минимум $\Omega(a)$ среди возможных значений проекций a_{\perp} .

Отсюда следует, что когда число линейно-независимых векторов g_i равно числу излучателей в антенне, введение дополнительного функционала в постановку задачи уже не играет существенной роли, и с точки зрения приложений задачи простого, оптимального и квазиоптимального синтеза становятся равноценными. Это говорит также о том, что введение дополнительного функционала в некотором смысле можно заменить минимизацией числа источников в антенне.

Так как в. в. антенны из множества K однозначно определяются по вектору управляющих параметров $u = \{u_1, \dots, u_L\} \in U$ из системы линейных алгебраических уравнений, процесс поиска минимума функции $S(a)$ можно организовать в виде целенаправленного перебора управляющих параметров из множества U . Конкретный алгоритм перебора управляющих параметров предложен в работах [10—11]. В этих работах процесс перебора пара-

метров организован в виде итерационного процесса, на каждом шаге которого решается задача на минимум многопараметрического функционала для некоторого набора управляющих параметров. Для полученного решения вычисляются значения амплитудной д. н. в контролируемых направлениях. В зависимости от расположения значений амплитудной д. н. по отношению к границам допустимых значений выбираются новые значения управляющих параметров, при этом используется информация о связи между значениями амплитудной д. н., полученными на трех предыдущих итерациях, и соответствующими изменениями управляющих параметров. Подробное численное исследование сходимости алгоритма проведено в работах [10—11].

3. Задача амплитудного синтеза дискретной антенны по амплитудной д. н.

Наряду с задачами амплитудно-фазового синтеза практически интерес представляют и другие задачи синтеза, в частности задача амплитудного синтеза.

Представим каждую компоненту в. в. антенны в виде

$$a_n = x_n e^{iy_n}, \quad (43)$$

где $x_n \geq 0$. Тогда в. в. антенны a определяется заданием двух действительных векторов $x = \{x_1, \dots, x_N\}$, $y = \{y_1, \dots, y_N\}$, один из которых представляет собой амплитуды, а другой — фазы компонент в. в. антенн.

Часто при проектировании антенны вектор фаз $y = \{y_1, \dots, y_N\}$ задается из некоторых конструктивных соображений. В этом случае д. н. с заданными свойствами приходится формировать только за счет изменения амплитуд $x = \{x_1, \dots, x_N\}$. Такого типа задачи называются задачами амплитудного синтеза.

Как и в случае амплитудно-фазового синтеза, можно сформулировать задачи простого, оптимального и квазиоптимального синтеза.

Пусть $\Omega(x)$ — некоторый функционал, с помощью которого учитываются требования к вектору амплитуд $x = \{x_1, \dots, x_N\}$. Задача оптимального амплитудного синтеза заключается в том, чтобы найти вектор $x = \{x_1, \dots, x_N\}$, который дает минимум функционалу $\Omega(x)$ на множестве $D_x \cap R_N^+$. D_x представляет собой множество векторов $x = \{x_1, \dots, x_N\}$ из N -мерного пространства R_N , таких, что амплитудная д. н., соответствующая в. в. антенны с компонентами $a_n = x_n e^{iy_n}$, $n=1, \dots, N$, где $\{y_1, \dots, y_N\}$ — заданный вектор фаз, удовлетворяет системе неравенств (8). R_N^+ — множество всех векторов x с неотрицательными компонентами.

Задача квазиоптимального синтеза в этом случае будет состо-

ять в том, чтобы среди векторов $x = \{x_1, \dots, x_N\}$ из замыкания множества

$$K = \bigcup_U \arg \min_{x^+} \left\{ \Omega(x) + \sum_{i=1}^L u_i F_i(x) \right\} \quad (44)$$

найти вектор, который дает минимальное значение функции

$$S(x) = \sum_{i=1}^M \max \{0, d_i - F_i(x), F_i(x) - c_i\} + \sum_{i=M+1}^L \max \{0, F_i(x) - c_i\}, \quad (45)$$

где $F_i(x)$ — значение амплитудной д. н., соответствующей в. в. с компонентами $a_n = x_n e^{iy_n}$, $n=1, \dots, N$ в контролируемом направлении $\psi_i = \{\theta_i, \varphi_i\}$.

Доказательство существования решения задачи квазиоптимального амплитудного синтеза почти дословно совпадает с доказательством аналогичной теоремы для амплитудно-фазового синтеза. Для численного решения можно использовать алгоритм, разработанный для решения соответствующей задачи амплитудно-фазового синтеза. Отличие состоит только в том, что в случае амплитудно-фазового синтеза на каждом шаге итерационного процесса решается задача на безусловный минимум квадратичного функционала, а в случае амплитудного синтеза приходится решать задачу на минимум квадратичного функционала с линейными ограничениями

$$x_i \geq 0 \quad (46)$$

$$i = 1, \dots, N,$$

численные методы решения которой достаточно хорошо разработаны.

В практике проектирования антенн встречается модификация задачи амплитудного синтеза, которая отличается от сформулированной выше задачи амплитудного синтеза тем, что в ней допускается изменение фаз отдельных компонент в. в. антенны на π . Это эквивалентно тому, что компоненты вектора $x = \{x_1, \dots, x_N\}$ могут принимать отрицательные значения, поэтому задача оптимального синтеза в этом случае имеет вид

$$\min_{x \in D_x} \Omega(x), \quad (47)$$

а в задаче квазиоптимального синтеза множество K определяется формулой

$$K = \bigcup_U \arg \min \left\{ \Omega(x) + \sum_{i=1}^L u_i F_i(x) \right\}. \quad (48)$$

Численное решение этой задачи квазиоптимального синтеза значительно проще, чем решение обычной задачи квазиоптимального амплитудного синтеза, так как вектор x , который минимизирует функционал $\Omega(x) + \sum_{i=1}^L u_i F_i(x)$, определяется из системы линейных алгебраических уравнений N -го порядка.

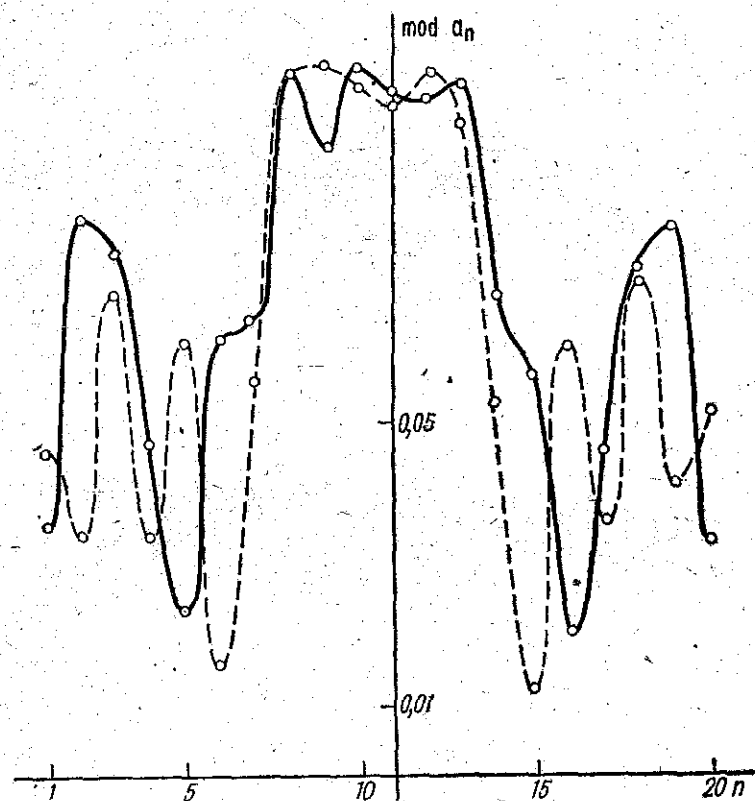


Рис. 1

В заключение приведем пример численного решения задач амплитудно-фазового и амплитудного синтеза для одной дискретной антенны.

Рассматриваемая антенна состоит из 20 излучателей, которые расположены по окружности, приведенный радиус которой равен 144.876, с угловым шагом 0.039. Приведенные координаты источников равны

$$kx_n = 144.876 \cos((n - 10.5) 0.039),$$

$$ky_n = 144.876 \sin((n - 10.5) 0.039), \quad (49)$$

$$kz_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots, 20.$$

Диаграмма направленности по полю n -го излучателя задается формулой

$$\hat{f}_n(90^\circ, \varphi) = \begin{cases} \sqrt{D}, & D \geq 0, \\ 0, & D < 0, \end{cases} \quad (50)$$

$$D = 0.05 + 0.95 \cos^2(\varphi - (n - 10.5) 0.039), \quad \varphi \in [-90^\circ, 90^\circ].$$

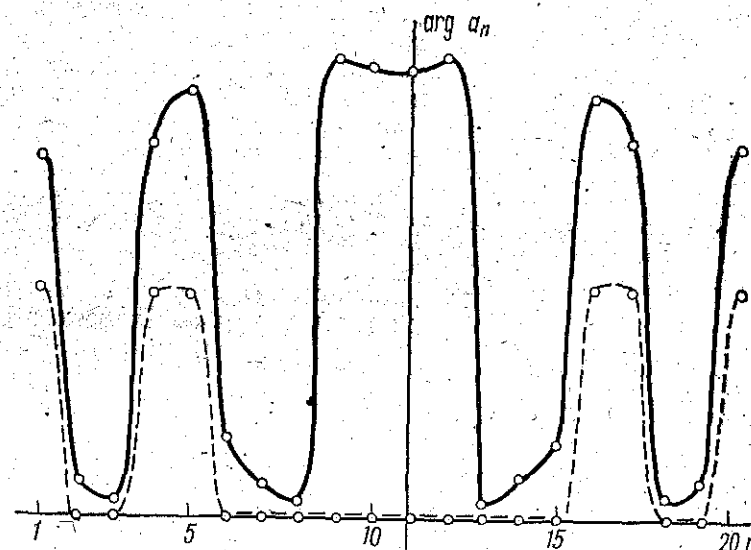


Рис. 2

Требуется найти реализуемую амплитудную диаграмму направленности, которая в контролируемых направлениях $\varphi_i: i = 1, 2, \dots, 9$ (указанных в первой строке таблицы) принимает значения, лежащие в пределах, указанных во второй и третьей строках таблицы:

φ_i	-4°	-3°	-2°	-1°	0°	1°	2°	3°	4°
c_i	0.1	0.2	0.5	0.9	1.0	0.9	0.5	0.2	0.1
d_i	0.0	0.0	0.3	0.7	1.0	0.7	0.3	0.0	0.0

Уровень боковых лепестков д. н. не должен превышать 0.1.

На рис. 1—2 представлены амплитуды и фазы компонент в. в. антенны, являющихся решением задачи квазиоптимального син-

теза с дополнительным функционалом $\Omega(a)$, который имеет вид

$$\Omega(a) = \sum_{n=1}^{20} |a_n - 1|^2. \quad (51)$$

На рис. 3 сплошной линией изображена амплитудная д. н., соответствующая этому в. в.

Для этой же антенны решена задача амплитудного синтеза, в которой фазы всех компонент в. в. антенны равны нулю, причем допускалось изменение фаз отдельных компонент в. в. на λ . В. в. антенны, амплитуды и фазы которого изображены пунктиром на рис. 1 и 2, является решением задачи квазиоптимального амплитудного синтеза с дополнительным функционалом

$$\Omega(x) = \sum_{i=1}^{20} (x_i - 1)^2. \quad (52)$$

Соответствующая этому в. в. диаграмма направленности изображена на рис. 3 пунктиром.

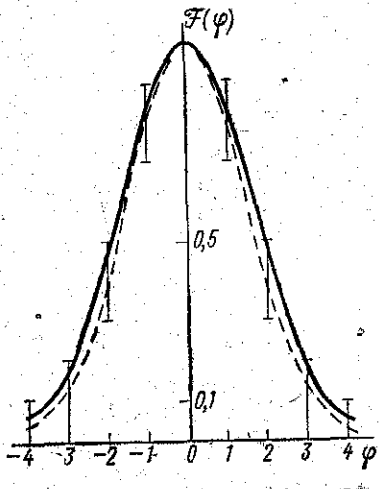


Рис. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. Чечкин А. В. О математической теории излучения.— В сб.: Вычислительные методы и программирование, вып. 24. М., Изд-во Моск. ун-та, 1975, с. 161—170.
2. Тихонов А. Н., Дмитриев В. И. О методах решения обратной задачи теории антенн.— В сб.: Вычислительные методы и программирование, вып. 13. М., Изд-во Моск. ун-та, 1969, с. 209—214.
3. Дмитриев В. И., Чечкин А. В. Методы решения задач синтеза антенн. М., Изд-во Моск. ун-та, 1969.
4. Дмитриев В. И., Чечкин А. В. Об одном методе теории синтеза дискретной антенны.— «Радиотехника и электроника», 1971, т. 16, № 3, с. 425—427.
5. Чечкин А. В. Метод формирования амплитудной диаграммы.— В сб.: Вычислительные методы и программирование, вып. 20. М., Изд-во Моск. ун-та, 1973, с. 270—279.
6. Кременецкий С. Д. О методах расчета распределения тока в излучающей системе по заданным требованиям к амплитудной диаграмме направленности.— «Вопросы радиоэлектроники, общетехническая», 1970, вып. 4, с. 37—43.

7. Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. Введение в минимакс. М., «Наука», 1972.

8. Зангвилл У. И. Нелинейное программирование. М., «Советское радио», 1973.

9. Березина Н. И., Дмитриев В. И. О различных постановках задачи синтеза дискретной антенны.— В сб.: Численные методы электродинамики, вып. 2. М., Изд-во Моск. ун-та, 1977, с. 40—50.

10. Березина Н. И., Чечкин А. В. Численное исследование метода формирования амплитудной диаграммы.— В сб.: Вычислительные методы и программирование, вып. 24. М., Моск. ун-та, 1975, с. 183—191.

11. Березина Н. И. Численное исследование задачи квазиоптимального синтеза дискретной антенны.— В сб.: Численные методы электродинамики, вып. 2. М., Изд-во Моск. ун-та, с. 51—78.

Е. В. ЗАХАРОВ, Х. Д. ИКРАМОВ,
А. Н. СИВОВ

МЕТОД РАСЧЕТА СОБСТВЕННЫХ ВОЛН ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

В технике СВЧ происходит процесс интенсивного освоения миллиметрового и оптического диапазона волн, одно из основных направлений которого создание волноводных трактов с малыми потерями. Принципиальная возможность решения данной проблемы лежит, в частности, на пути применения диэлектрических волноводов. В связи с этим большую актуальность приобрела задача расчета собственных волн диэлектрических волноводов произвольного профиля. Диэлектрический волновод представляет собой открытую систему и поэтому создание универсальных вычислительных методов и алгоритмов на основе разложения по дискретному спектру сопряжено со значительными математическими трудностями. Вместе с тем в работе [1] предложен универсальный математический аппарат, применимый при любой форме сечения. Он состоит в сведении векторной однородной задачи для уравнения Максвелла к системе одномерных интегродифференциальных уравнений второго рода по контуру поперечного сечения. В данной работе развиваются метод и алгоритмы численного решения системы интегродифференциальных уравнений с целью определения значений постоянных распространения поверхностных волн в диэлектрических волноводах и распределения собственных волн вдоль контура сечения. Приведены некоторые результаты методических исследований.

Постановка задачи. Задача о собственных волнах диэлектрического волновода состоит в определении нетривиальных решений однородных уравнений Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} + ih[\vec{H}e_z] &= ik\vec{E}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} + ih[\vec{E}e_z] &= -ik\vec{H}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
В ЗАДАЧАХ ГЕОФИЗИКИ**

В. И. ДМИТРИЕВ, Э. А. ФЕДОРОВА

**ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ
В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ**

В комплексе геологогеофизических исследований, связанных с проблемой изучения внутреннего строения Земли, а также поиска и разведки полезных ископаемых, важную роль играют методы электромагнитных зондирований. Эти методы обладают достаточно высокой производственной эффективностью. В связи с этим работы, посвященные созданию и исследованию математических моделей в электромагнитных методах геофизических исследований, имеют большое практическое значение.

Методы электромагнитных зондирований слоистых структур основаны на зависимости электромагнитного поля от геоэлектрических параметров среды, в которой оно распространяется. Первой работой, посвященной исследованию электромагнитного поля в слоистой структуре, была работа Зоммерфельда (1909 г.), в которой он рассмотрел поле диполя, расположенного на поверхности полупространства.

В дальнейшем исследованию этой проблемы был посвящен ряд работ, в которых были получены решения этой задачи для случая простейших структур [1—3]. Существенный вклад в развитие электромагнитных методов изучения строения Земли внес А. Н. Тихонов, который в своих работах дал математическое обоснование теории электромагнитных зондирований. Он предложил метод магнитотеллурического зондирования, метод становления электромагнитного поля и метод зондирования, использующий установленные электромагнитные поля, возбуждаемые искусственными источниками [6—8]. Эти методы были существенным шагом вперед по сравнению с методом, основанным на использовании постоянного тока (ВЭЗ), так как позволили изучать структуры, имеющие слой повышенного удельного сопротивления, являющиеся экраном для поля постоянного тока. Кроме того, использование переменного

электромагнитного поля дало возможность проведения совместной интерпретации магнитного и электрического полей, что повысило разрешающую способность электромагнитных методов. Важно отметить, что использование переменных полей позволяет проводить частотное зондирование в одной точке при фиксированном расстоянии между источником и приемником поля, что дает определенную экономическую выгоду при проведении полевых измерений.

Среди работ, сыгравших важную роль в развитии электроразведки, следует отметить значение работы [9], в которой был предложен алгоритм расчета электромагнитного поля горизонтального электрического диполя, заземленного на поверхности n -слойной проводящей среды. В этой работе впервые предлагался рекуррентный способ расчета функции, входящей в аналитическое выражение электромагнитного поля и отражающей многослойный характер рассматриваемой структуры. Предложенный алгоритм весьма просто реализуется на ЭВМ. Это дало возможность в достаточно короткий срок провести массовый расчет электромагнитных полей для широкого класса слоистых структур [12—13], позволивший изучить характерные особенности поведения полей и выяснить разрешающую способность метода частотного зондирования (ЧЗ).

Дальнейшее развитие этот метод получил в работах [10, 11, 14—17]. При этом основное внимание уделялось созданию как прямых численных, так и асимптотических методов расчета квазистационарных полей в проводящих слоистых средах. И это естественно. Электромагнитные зондирования по своему характеру — обратные задачи, и при их решении по характеру поведения электромагнитного поля определяются геоэлектрические параметры слоистых структур. Однако во всех методах решения этих задач основой является алгоритм расчета поля в слоистой среде.

В 1967 г. метод расчета электромагнитного поля в слоистой среде был обобщен на случай градиентных сред и произвольного источника [19]. На основе предложенного в этой работе алгоритма в НИВЦ МГУ был создан комплекс программ для расчета полей точечных источников в слоистых средах с плоскопараллельными границами раздела. В дальнейшем рассмотрим именно эту модель слоистой среды. Хотя земная кора имеет сложное строение, но во многих случаях, с точки зрения распределения удельного сопротивления, ее можно трактовать как пачку изотропных и однородных слоев, в которой последний слой простирается до бесконечности. Такая модель допускает постановку наиболее простой обратной задачи, и, кроме того, именно эта модель является первым шагом на пути к исследованию более сложных слоистых сред.

Проведенные в НИВЦ МГУ расчеты и исследования характера и особенностей поведения электромагнитного поля позволяют разработать методические способы и приемы интерпретации результатов полевых работ и могут служить основой для разработки измерительной аппаратуры с оптимальными характеристиками.

Ниже будет рассмотрен метод расчета произвольного точечно-

го источника, расположенного в слоистой среде с кусочно-постоянным распределением проводимости и диэлектрической проницаемости. Зависимость от времени берется в виде $e^{-i\omega t}$.

1. Численный метод расчета электромагнитного поля произвольного дипольного источника

Рассмотрим n -слойную структуру с границами раздела $z = z_m$ ($m=0, 1, \dots, n-1$) (рис. 1); m -й слой находится при $z_m < z < z_{m+1}$, причем $z_{m+1} - z_m = h_m$ — мощность этого слоя. Общую мощность обозначим: $H = \sum_{i=1}^{n-1} h_i$. Каждый слой характеризуется волновым числом $k = \omega \sqrt{\epsilon \mu} = \omega \sqrt{\mu(\epsilon + i\sigma/\omega)}$, где $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м, ϵ — диэлектрическая проницаемость, а σ — удельная проводимость соответствующего слоя. В данной среде находится локальный источник сторонних токов с плотностью $\vec{j}(M_0)$, где $M_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$. При сделанных предположениях электромагнитное поле будет являться решением системы уравнений Максвелла:

$$\text{rot } \vec{H} = -i\omega \epsilon \vec{E} + \vec{j}, \quad (1)$$

$$\text{rot } \vec{E} = i\omega \mu H.$$

Рассмотрим сначала поле электрического диполя длины l с силой тока $I = I_0(x, y, z)e^{-i\omega t}$. Тогда, учитывая характер источника, можно ввести векторный потенциал, связанный с электромагнитным полем соотношениями

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}; \quad (2)$$

$$\vec{E} = i\omega \left\{ \vec{A} + \text{grad} \left[\frac{\mu}{k^2} \text{div} \frac{\vec{A}}{\mu} \right] \right\}.$$

Из (1)—(2) следует, что уравнение для векторного потенциала будет иметь вид

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A} \right) - \frac{k^2}{\mu} \text{grad} \left(\frac{\mu}{k^2} \text{div} \frac{\vec{A}}{\mu} \right) - \frac{k^2}{\mu} \vec{A} = \vec{j}. \quad (3)$$

На границах разрыва геоэлектрических параметров должны выполняться граничные условия* для компонент \vec{A} :

* Квадратными скобками обозначен разрыв функций.

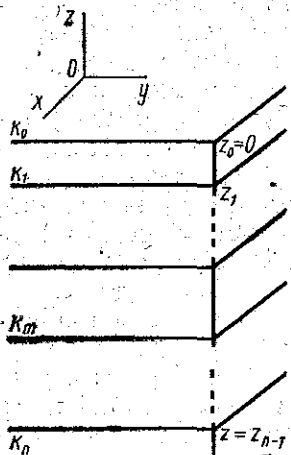


Рис. 1

$$[A_x] = [A_y] = [A_z/\mu] = 0;$$

$$\left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_x}{\partial z} \right] = \left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] = 0; \quad (4)$$

$$\left[\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{A_z}{\mu} \right) \right] = - \left[\frac{1}{\mu \epsilon} \right] \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \right).$$

Векторный потенциал можно представить в виде

$$\vec{A}(M) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \hat{G}(M, M_0) \vec{j}(M_0) dV M_0, \quad (5)$$

где \hat{G} — функция точечного источника. Таким образом, векторный потенциал находится как суперпозиция функций точечных источников, занимающих некоторый объем V . Функция точечного источника \hat{G} является тензором, поскольку векторный потенциал есть решение векторного уравнения (3). Следовательно, чтобы определить векторный потенциал при произвольной ориентации вектора \vec{j} , необходимо знать решение этой задачи при ориентации \vec{j} вдоль осей координат. Известно [4], что при ориентации момента электрического диполя вдоль осей Ox или Oy векторный потенциал имеет две компоненты, а при ориентации вдоль Oz — одну компоненту. Поэтому в нашем случае тензор \hat{G} будет содержать пять компонент и иметь вид

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} G_0(M, M_0) & 0 & 0 \\ 0 & G_0(M, M_0) & 0 \\ \mu \frac{\partial g(M, M_0)}{\partial x} & \mu \frac{\partial g(M, M_0)}{\partial y} & \frac{\mu}{\epsilon(M_0)} G_1(M, M_0) \end{pmatrix} \quad (6)$$

Как видим, тензор \hat{G} определяется через три функции G_0 , G_1 и g , которые являются согласно (3)—(5), решениями следующих задач:

$$\text{div} \left(\frac{1}{\mu} \text{grad } G_0 \right) + \frac{k^2}{\mu} G_0 = -4\pi \delta(r_{MM_0}),$$

граничные условия:

$$[G_0] = \left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial G_0}{\partial z} \right] = 0; \quad (7)$$

$$\text{div} \left(\frac{1}{\epsilon} \text{grad } G_1 \right) + \frac{k^2}{\epsilon} G_1 = -4\pi \delta(r_{MM_0}),$$

граничные условия:

$$[G_1] = \left[\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial G_1}{\partial z} \right] = 0; \quad (8)$$

$$\text{div} \left(\frac{1}{\epsilon} \text{grad } g \right) + \frac{k^2}{\epsilon} g = -G_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\epsilon \mu} \right),$$

граничные условия:

$$[g] = 0; \left[\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial g}{\partial z} \right] = - \left[\frac{1}{\varepsilon \mu} \right] G_0, \quad (9)$$

где $\delta(r_{MM_0})$ — дельта-функция.

Для выделения единственного решения поставленных задач, соответствующего физической постановке исходной задачи, будем считать, что $\text{Im} k \neq 0$ и функции G_0, G_1, g убывают на бесконечности. В случае $\text{Im} k = 0$ будем рассматривать решения (7-9) при бесконечно малой мнимой части комплексного поглощения [5].

Если линейные размеры диполя малы в сравнении с линейными размерами параметров, входящих в условие задачи, то из (5) следует, что векторный потенциал определяется соотношением

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \widehat{G} \vec{p}, \quad (10)$$

где \vec{p} — вектор момента электрического диполя; $|\vec{p}| = Il$.

Используя классический метод определения компонент \vec{A} в задаче о распространении электромагнитного поля, возбужденного точечным электрическим диполем, представим функции G_0, G_1 и g в виде*

$$G_0 = \int_0^{\infty} J_0(\lambda \rho) U_{\mu}^0(\lambda, z, z_0) \lambda d\lambda; \\ G_1 = \int_0^{\infty} J_0(\lambda \rho) U_{\varepsilon}^0(\lambda, z, z_0) \lambda d\lambda; \quad (11)$$

$$g = \int_0^{\infty} J_0(\lambda \rho) \left\{ U_{\varepsilon}^1(\lambda, z, z_0) - \frac{1}{\mu} \frac{dU_{\mu}^0(\lambda, z, z_0)}{dz} \right\} \frac{d\lambda}{\lambda},$$

где $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$, а $U_{\mu}^0, U_{\varepsilon}^0$ и U_{ε}^1 — некоторые неизвестные функции, которые мы должны определить. Введем обозначение U_a^v для этих функций. Тогда из (7) — (9) и (11) следует, что U_a^v — решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{a(z)} \frac{d}{dz} U_a^v \right) - \frac{\eta^2(z)}{a(z)} U_a^v = 0 \text{ при } z \neq z_0, \quad (12)$$

* Здесь и далее интегралы понимаются в смысле

$$\int_0^{\infty} J_0(\lambda \rho) f(\lambda, z, z_0) d\lambda = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\infty} J_0(\lambda \rho) f(\lambda, z, z_0) e^{-\alpha \lambda} d\lambda.$$

где

$$\eta^2 = \lambda^2 - k^2(z), \text{ Re } \eta > 0; \nu = \begin{cases} 0; \\ 1; \end{cases} a = \begin{cases} \mu \\ i\sigma/\omega \end{cases}$$

Граничные условия:

$$[U_a^v] = -2\nu \Delta(z-z_0); \left[\frac{1}{a} \frac{dU_a^v}{dz} \right] = -2(1-\nu) \Delta(z-z_0), \quad (13)$$

где

$$\Delta(z-z_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \neq z_0; \\ 1 & \text{при } z = z_0 \end{cases} \quad (14)$$

при условии, что $U_a^v \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \pm \infty$.

Введем функцию

$$Z(z) = \frac{1}{a(z)} \frac{(U_a^v)' z}{U_a^v} \quad (15)$$

Из (12) следует, что в этом случае $Z(z)$ — решение уравнения Риккати:

а) при $-H < z < z_0$

$$Z_1' + a(z) Z_1^2 = \frac{\eta^2(z)}{a(z)} \quad (16)$$

с начальным условием $Z_1(z = -H) = \frac{\eta_n}{a_n}$;

в) при $0 > z > z_0$

$$Z_2' + a(z) Z_2^2 = \frac{\eta^2(z)}{a(z)} \quad (17)$$

с начальным условием $Z_2(z = 0) = -\frac{\eta_0}{a_0}$.

Через z_0 проведем границу вне зависимости от наличия в этой точке разрыва параметров среды и обозначим эту границу z_l . Для сред с кусочно-постоянными геоэлектрическими параметрами уравнения (16) — (17) имеют простое решение при $z_m < z < z_{m-1}$ и $m-1 \geq l$:

$$Z_1(z) = \frac{\eta_m}{a_m} \frac{\eta_m + a_m Z_1^m - (\eta_m - a_m Z_1^m) e^{-2\eta_m(z-z_m)}}{\eta_m + a_m Z_1^m + (\eta_m - a_m Z_1^m) e^{-2\eta_m(z-z_m)}}, \quad (18)$$

где $Z_1^m = Z_1(z = z_m)$.

Таким образом, для определения $Z_1(z)$ достаточно знать Z_1^j ($j = n-1, \dots, m$), которые согласно (18) определяются по рекуррентной формуле

$$Z_1^j = \frac{\eta_{j+1}}{a_{j+1}} \cdot \frac{\eta_{j+1} + a_{j+1} Z_1^{j+1} - (\eta_{j+1} - a_{j+1} Z_1^{j+1}) e^{-2\eta_{j+1} h_{j+1}}}{\eta_{j+1} + a_{j+1} Z_1^{j+1} + (\eta_{j+1} - a_{j+1} Z_1^{j+1}) e^{-2\eta_{j+1} h_{j+1}}}; \quad (19)$$

величина Z_1^{n-1} известна:

$$Z_1^{n-1} = Z_1(z_{n-1}) = \frac{\eta_n}{a_n}.$$

Аналогично получаем рекуррентные формулы для случая $m \leq l$:

$$Z_2(z) = -\frac{\eta_m}{a_m} \cdot \frac{\eta_m - a_m Z_2^{m-1} - (\eta_m + a_m Z_2^{m-1}) e^{-2\eta_m(z_{m-1}-z)}}{\eta_m - a_m Z_2^{m-1} + (\eta_m + a_m Z_2^{m-1}) e^{-2\eta_m(z_{m-1}-z)}}; \quad (20)$$

все Z_2^j ($j = 1, \dots, l$) определяются по формуле

$$Z_2^j = -\frac{\eta_j}{a_j} \cdot \frac{\eta_j - a_j Z_2^{j-1} - (\eta_j + a_j Z_2^{j-1}) e^{-2\eta_j h_j}}{\eta_j - a_j Z_2^{j-1} + (\eta_j + a_j Z_2^{j-1}) e^{-2\eta_j h_j}} \quad (21)$$

величина Z_2^0 известна

$$Z_2^0 = Z_2(z_0) = -\frac{\eta_0}{a_0}.$$

Теперь можно перейти к выводу формулы для расчета $U_a^v(z)$. Используя граничные условия (13) и выражение (15), получаем

$$U_a^v(z_e - 0) = 2 \frac{1 - v - v Z_2(z_e)}{Z_1(z_e) - Z_2(z_e)}; \quad (22)$$

$$U_a^v(z_e + 0) = 2 \frac{1 - v - v Z_1(z_e)}{Z_1(z_e) - Z_2(z_e)}. \quad (23)$$

Полученные значения U_a^v берем за начальные при решении уравнения (15) и, решая его, будем иметь

а) при $z < z_0$

$$U_a^v(z) = 2 \frac{1 - v - v Z_2(z_e)}{Z_1(z_e) - Z_2(z_e)} e^{-\int_z^{z_e} a(z) Z_1(z) dz}; \quad (24)$$

б) при $z > z_0$

$$U_a^v(z) = 2 \frac{1 - v - v Z_1(z_e)}{Z_1(z_e) - Z_2(z_e)} e^{-\int_z^{z_e} a(z) Z_2(z) dz} \quad (25)$$

Интегралы, входящие в выражения (24) — (25), в случае кусочно-постоянной среды легко вычисляются. Если через z также провести границу вне зависимости от наличия в этой точке разрыва

геоэлектрических параметров и обозначить ее z_q , то формулы (24 — 25) можем записать в виде

а) при $q \geq l$

$$U_a^v = 2 \frac{1 - v - v Z_2^l}{Z_1^l - Z_2^l} \prod_{k=q}^{k=l-1} \left\{ \frac{2\eta_k e^{-2\eta_k h_k}}{\eta_k + a_k Z_1^k + (\eta_k - a_k Z_1^k) e^{-2\eta_k h_k}} \right\}; \quad (26)$$

б) при $q \leq l$

$$U_a^v = 2 \frac{1 - v - v Z_1^i}{Z_1^i - Z_2^i} \prod_{k=i}^{k=q-1} \left\{ \frac{2\eta_k e^{-2\eta_k h_k}}{\eta_k - a_k Z_2^{k-1} + (\eta_k + a_k Z_2^{k-1}) e^{-2\eta_k h_k}} \right\}. \quad (27)$$

Таким образом, мы определили все функции, входящие в выражения для компонент векторного потенциала, и тем самым электромагнитное поле произвольно ориентированного электрического диполя.

Перейдем к определению электромагнитного поля токовой рамки малого радиуса с магнитным моментом \vec{m} , где $|m| = IS'$. Так как в этом случае характер источника таков, что $\text{div } \vec{j} = 0$, то можем ввести функцию \vec{j}^M как распределения плотности магнитных токов:

$$\vec{j} = \text{rot } \vec{j}^M. \quad (28)$$

Как будет показано, формальное введение магнитных токов позволяет свести задачу для поля магнитного диполя к нахождению функции U_a^v .

В случае точечного источника связь векторов \vec{j} и \vec{j}^M имеет простой вид

$$\vec{j}^M = \vec{m} \delta(r_{MM_0}), \quad (29)$$

где $\delta(r_{MM_0})$ — дельта-функция.

Введя магнитный ток запишем систему (1) в виде

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= -i\omega \vec{E} + \text{rot } \vec{j}^M, \\ \text{rot } \vec{E} &= i\omega \vec{H}. \end{aligned} \quad (30)$$

Из (30) следует, что $\text{div } \vec{E} = 0$, следовательно, можно ввести векторный потенциал магнитного типа, связанный с электромагнитным полем следующими соотношениями:

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \text{rot } \vec{A}^*, \quad (31)$$

$$\vec{H} = -i\omega \left\{ \vec{A}^* + \text{grad} \left(\frac{i\omega}{k^2} \text{div } \frac{\vec{A}^*}{\epsilon} \right) \right\}.$$

Следовательно, уравнение для \bar{A}^* будет иметь вид

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{rot} \bar{A}^* \right) - \frac{k^2}{\varepsilon} \operatorname{grad} \left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{k^2} \operatorname{div} \frac{\bar{A}^*}{\varepsilon} \right) - \frac{k^2}{\varepsilon} \bar{A}^* = i\omega\mu \bar{j}^M. \quad (32)$$

Из условия непрерывности тангенциальных составляющих поля на границах разрыва геоэлектрических параметров получаем граничные условия для компонент векторного потенциала магнитного типа

$$[A_x^*] = [A_y^*] = \left[\frac{A_z^*}{\varepsilon} \right] = 0; \quad \left[\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial A_x^*}{\partial z} \right] = \left[\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial A_y^*}{\partial z} \right] = 0; \quad (33)$$

$$\left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{A_z^*}{\varepsilon} \right) \right] = - \left[\frac{1}{\varepsilon\mu} \right] \left(\frac{\partial A_x^*}{\partial x} + \frac{\partial A_y^*}{\partial y} \right).$$

Легко видеть, что задача (32)–(33) аналогична (3)–(4), поэтому, учитывая симметрию уравнений (3) и (32), можно записать

$$A^*(M) = \frac{i\omega\mu}{4\pi} \iiint \hat{G}^*(M, M_0) \bar{j}^M(M_0) dVM_0; \quad (34)$$

где \hat{G}^* — функция точечного источника:

$$\hat{G}^* = \begin{Bmatrix} G_0^*(M, M_0) & 0 & 0 \\ 0 & G_0^*(M, M_0) & 0 \\ \tilde{\varepsilon}(z) \frac{\partial g^*(M, M_0)}{\partial x} & \tilde{\varepsilon}(z) \frac{\partial g^*(M, M_0)}{\partial y} & \frac{\tilde{\varepsilon}(z)}{\mu} G_1^*(M, M_0) \end{Bmatrix}; \quad (35)$$

$$G_0^*(M, M_0) = \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) U_\varepsilon^0 \lambda d\lambda; \quad G_1^*(M, M_0) = \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) U_\mu^0 \lambda d\lambda; \quad (36)$$

$$g^*(M, M_0) = \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) \left\{ U_\mu^1 - \frac{1}{\varepsilon} \frac{dU_\varepsilon^0}{dz} \right\} \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Из представления (34) следует, что в случае, когда радиус токовой рамки мал в сравнении с линейными параметрами задачи, выражение для магнитного векторного потенциала упрощается:

$$A^* = \frac{i\omega\mu}{4\pi} G^* \bar{m}. \quad (37)$$

Таким образом, при возбуждении электромагнитного поля источником магнитного типа задача также свелась к решению краевой задачи (12–14) и численному расчету интегралов типа обратного преобразования Ханкеля. Как было показано, решение краевой задачи в случае кусочно-постоянных геоэлектрических параметров имеет вид (26–27). Кроме того, из (2) и (31) следует, что нам необходимо знать производные по z от функции U_a^v . Эти производные легко определяются из соотношений (12) и (16):

$$\begin{aligned} (U_a^v)'_z &= a(z) Z_1(z) U_a^v(z); \\ (U_a^v)''_z &= \eta^2(z) U_a^v(z); \\ (U_a^v)'''_z &= \eta^2(z) a(z) Z(z) U_a^v(z). \end{aligned} \quad (38)$$

Что касается численного расчета интегралов типа:

$$J_m = \int_0^\infty J_m(\lambda\rho) F(\lambda, z, z_0) d\lambda \quad (m = 0; 1),$$

то можно воспользоваться одним из методов, предложенных в работах [11, 21].

Рассмотрим далее ряд конкретных задач, которые решались на основе описанного выше метода.

2. Электромагнитное поле электрического диполя в методе частотного зондирования (ЧЗ)

Рассмотрим поле горизонтального электрического диполя, заземленного на поверхности n -слойной структуры в точке с координатами $\{0, 0, 0\}$ (см. рис. 1). Будем считать, что ось диполя направлена вдоль оси Ox . В точке $M = \{0, y, 0\}$ исследуется изменение электромагнитного поля в зависимости от частоты питающего тока. При этом рассматриваются амплитудные и фазовые характеристики поля, зависящие от геоэлектрических параметров среды. Задача решается в предположении, что токами смещения можно пренебречь (т. е. рассматривается квазистационарное поле).

Геоэлектрический разрез будет характеризоваться значениями удельных сопротивлений и мощностью слоев. Рассмотрим выражения для компонент векторного потенциала. С учетом сделанных выше предположений из (10–11) следует

$$A_x = \frac{I}{4\pi} \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) U_\mu^0 \lambda d\lambda; \quad A_y = 0; \quad (39)$$

$$A_z = \frac{I}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) \left\{ \mu U_{1\sigma/\omega}^1 - (U_\mu^0)'_z \right\} \frac{d\lambda}{\lambda},$$

где функции U_a^V и $(U_a^V)_z$ рассчитываются по формулам (27), (38). Далее, расписав по компонентам (2) с учетом (39), получим выражения для компонент электромагнитного поля:

$$H_x = 0; E_y = 0; E_z = 0;$$

$$H_y = \frac{H}{4\pi} \left\{ \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) U_\mu^0 Z \lambda d\lambda + \frac{1}{\rho} \int_0^\infty J_1(\lambda\rho) (U_{\frac{i\omega}{\omega}}^1 - U_\mu^0 Z_1) d\lambda \right\};$$

$$H_z = \frac{H}{4\pi\mu} \int_0^\infty J_1(\lambda\rho) U_\mu^0 \lambda^2 d\lambda; \quad (40)$$

$$E_x = i\omega \frac{H}{4\pi} \left\{ \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) U_\mu^0 \lambda d\lambda - \frac{1}{\rho} \int_0^\infty J_1(\lambda\rho) U_\mu^0 d\lambda - \frac{1}{\omega^2 \rho} \int_0^\infty J_1(\lambda\rho) Z U_{\frac{i\omega}{\omega}}^1 d\lambda \right\}.$$

В нашем случае, когда $k_0=0$, $\mu=\text{const}$, источник электромагнитного поля находится на поверхности слоистой среды и поле измеряется на этой поверхности, выражения (40) и (27) значительно упрощаются. Выпишем окончательно выражения для компонент квазистационарного электромагнитного поля:

$$H_y = \frac{H}{2\pi} \left\{ \int_0^\infty J_1(\lambda\rho) u_0 \lambda d\lambda - \frac{1}{\rho} \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) u_0 \lambda^2 d\lambda \right\}; \quad (41)$$

$$H_z = \frac{H}{2\pi} \int_0^\infty J_1(\lambda\rho) u_0 \lambda^2 d\lambda; \quad (42)$$

$$E_x = i\omega\mu \frac{H}{2\pi} \left\{ \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) u_0 \lambda d\lambda - \frac{1}{\rho} \int_0^\infty J_1(\lambda\rho) \left(u_0 + \frac{W_0}{k_1^2} \right) d\lambda \right\}; \quad (43)$$

где

1) W_0 рассчитывается по рекуррентной формуле

$$W_{m-1} = \eta_m \frac{\sigma_{m+1}\eta_m + \sigma_m W_m - (\sigma_{m+1}\eta_m - \sigma_m W_m) e^{-2\eta_m h_m}}{\sigma_{m+1}\eta_m + \sigma_m W_m + (\sigma_{m+1}\eta_m - \sigma_m W_m) e^{-2\eta_m h_m}}; \quad (44)$$

$$(m = h-1, \dots, 1)$$

при условии

$$W_{n-1} = \eta_n; \eta_j = \sqrt{\lambda^2 - k_j^2}, \text{Re } \eta_j > 0; (j=1, \dots, n).$$

2) $u_0 = \frac{1}{Z_0 + \nu}$; $a Z_0$ рассчитывается по рекуррентной формуле

$$Z_{m-1} = \eta_m \frac{\eta_m + Z_m - (\eta_m - Z_m) e^{-2\eta_m h_m}}{\eta_m + Z_m + (\eta_m - Z_m) e^{-2\eta_m h_m}}; (m = n-1, \dots, 1). \quad (45)$$

при условии $Z_{n-1} = \eta_n$.

Рассмотрим на примере однородного полупространства характер зависимости электромагнитного поля от разности $\rho=y$ и удельного сопротивления нижнего полупространства ρ_1 . В этом случае выражения для u_0 и W_0 имеют весьма простой вид

$$u_0 = \frac{1}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}; W_0 = \rho_1 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}. \quad (46)$$

Используя хорошо известное интегральное представление для функций e^{ikr}/r , получаем

$$H_z = \frac{i3H}{2\pi\omega\mu y^2} \rho_1 \{1 - e^{ik_1 y} (1 - ik_1 y - k_1^2 y^2/3)\}; \quad (47)$$

$$E_x = \frac{iH}{\pi y^3} \rho_1 \{i + 0.5(k_1 y - i) e^{ik_1 y}\}. \quad (48)$$

Для определения компоненты поля H_y , запишем (41) несколько иначе, используя соотношение, следующее из уравнения для функций Бесселя:

$$\lambda^2 J_0(\lambda\rho) = -\frac{\partial^2 J_0(\lambda\rho)}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial J_0(\lambda\rho)}{\partial \rho},$$

а именно:

$$H_y = -\frac{H}{2\pi k_1^2} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} d\lambda. \quad (49)$$

Далее, воспользуемся соотношением

$$\int_0^\infty J_0(\lambda\rho) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k^2} z} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} = I_0 \left[-\frac{ik}{2} (\sqrt{\rho^2 + z^2} - z) \right] \cdot K_0 \left[-\frac{ik}{2} (\sqrt{\rho^2 + z^2} + z) \right]; \quad (50)$$

где I_0 и K_0 — модифицированные функции Бесселя.

Из (49) — (50) следует

$$H_y = \frac{H}{2\pi k_1^2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ I_0 \left[-\frac{ik_1}{2} (\sqrt{z^2 + \rho^2} - z) \right] \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times K_0 \left[-\frac{ik_1}{2} (\sqrt{z^2 + \rho^2} + z) \right] \right\} \right\}. \quad (51)$$

Таким образом,

$$H_y = \frac{I_1}{2\pi y^2} \{3K_1(z^*) I_1(z^*) - z^* [I_0(z^*) \cdot K_1(z^*) - I_1(z^*) \cdot K_0(z^*)]\},$$

где $z^* = -ik_1 y/2$.

Рассмотрим характер зависимости H_y от удельного сопротивления нижнего полупространства при $|k_1 y| \gg 1$. В этом случае, используя асимптотические представления для модифицированных функций Бесселя, получаем выражение (51) в виде

$$H_y \simeq \frac{I_1}{2\pi k_1^2} \lim_{|z^*| \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{ie^{ik_1 z}}{k_1 y} \right) \right\},$$

т. е. при $|k_1 y| \gg 1$

$$H_y \simeq \frac{I_1}{\pi y^2} \sqrt{\frac{\rho_1}{2\omega\mu}} (1+i). \quad (52)$$

Таким образом, в волновой зоне (т. е. при больших разностях или высоких частотах) горизонтальная компонента магнитного поля слабее зависит от удельного сопротивления нижнего полупространства в сравнении с H_z и E_x . Поскольку вся существующая измерительная аппаратура для проведения ЧЗ рассчитана на измерение компонент H_z и E_x , то именно эти компоненты поля мы и рассмотрим ниже.

Из (46)–(47) следует, что H_z и E_x пропорциональны удельному сопротивлению нижнего полупространства. Таким образом, по напряженности электромагнитного поля, измеренному на поверхности однородного полупространства, можно судить об его удельном сопротивлении. Это определяет одну из возможных нормировок, которые обычно вводятся для удобства интерпретации результатов индукционных зондирований, использующих явление скин-эффекта, т. е. уменьшение глубины проникновения электрического тока в слоистую среду при увеличении скорости его изменения. А именно, рассчитываться будут величины E_x^* и H_z^* , имеющие вид

$$E_x^* = \frac{\pi\sigma_1 y^3}{iI_1} E_x; \quad (53)$$

$$H_z^* = \frac{2\pi\omega\sigma_1 y^4}{3I_1} H_z. \quad (54)$$

При этом рассматриваемые величины будут рассчитываться в зависимости от безразмерных параметров

$$\nu_m = \frac{h_m}{h_1}; \quad \gamma_m = \frac{\sigma_m}{\sigma_1}; \quad \Lambda_1 = \sqrt{\frac{8\pi^2}{\omega\mu\sigma_1}}; \\ \xi = \frac{\Lambda_1}{h_1}; \quad t = \lambda h_1; \quad r = \frac{y}{h_1}. \quad (55)$$

Кроме того, следует заметить, что при расчетах E_x^* и H_z^* удобно представлять в виде суммы двух слагаемых, одно из которых соответствует полю полупространства, имеющего сопротивление первого слоя разреза, а другое — учитывает многослойность структуры. Тогда задача сводится к расчету интегралов типа

$$I_m(r) = \int_0^\infty J_m(rt) F(t) dt \quad (m=0; 1), \quad (56)$$

где функция $F(t)$ непрерывна, ограничена на всем интервале интегрирования, монотонна при $t > t_0$ и удовлетворяет условию $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0$. При численном расчете рассматриваемых интегралов верхний предел интегрирования выбирается равным некоторому значению T , удовлетворяющему системе неравенств:

$$\begin{cases} T > t_0, \\ \frac{2|F(T)|}{r} \sqrt{\frac{2}{\pi r T}} < \varepsilon, \end{cases}$$

где ε — абсолютная погрешность интегрирования. Такой выбор T обусловлен тем, что в силу свойств функции $F(t)$ при $T > t_0$ будет справедлива следующая оценка [11]:

$$\left| \int_T^\infty J_1(rt) F(t) dt \right| < \frac{2|F(T)|}{r\sqrt{T}} \sqrt{\frac{2}{\pi r}}. \quad (57)$$

Перейдем к анализу численных результатов. Большой объем расчетов, проведенных в НИВЦ МГУ, позволил изучить характерные особенности кривых частотных зондирований для широкого класса слоистых структур. Рассчитывались, как уже указывалось выше (53), (54), безразмерные характеристики E_x^* и H_z^* , которые, согласно общепринятой терминологии, называются относительными, кажущимися сопротивлениями и обычно обозначаются ρ_a/ρ_1 и ρ_m/ρ_1 . Под кажущимся сопротивлением понимается сопротивление такого однородного полупространства, которое при данной частоте питающего тока дает то же значение поля, что и слоистая среда. В проведенных исследованиях особое внимание уделялось изучению геоэлектрических разрезов, имеющих высокоомные слои. Это связано с тем, что переменное электромагнитное поле вследствие индукционных эффектов проникает под экран и дает принципиальную возможность изучать как экран, так и подэкранную толщину разреза. Рассмотрим в качестве примера палетки амплитуд ρ_m/ρ_1 и ρ_a/ρ_1 для четырехслойного разреза, содержащего изолятор. Очевидно, что магнитное поле (рис. 2, сплошные линии) несет информацию о строении подэкранной толщи разреза и может быть использовано для изучения разреза под слоем изолятора. Наличие слоя-изолятора и непроводящего подстилающего

основания отмечается на кривых в виде двух четких максимумов. Однако, как показали расчеты, магнитное поле обладает слабой разрешающей способностью при наличии в разрезе изоляторов с малой в сравнении с первым слоем мощностью ($\nu_2 < 1/4$), и, кроме того, сильно зависит от мощности и проводимости под-

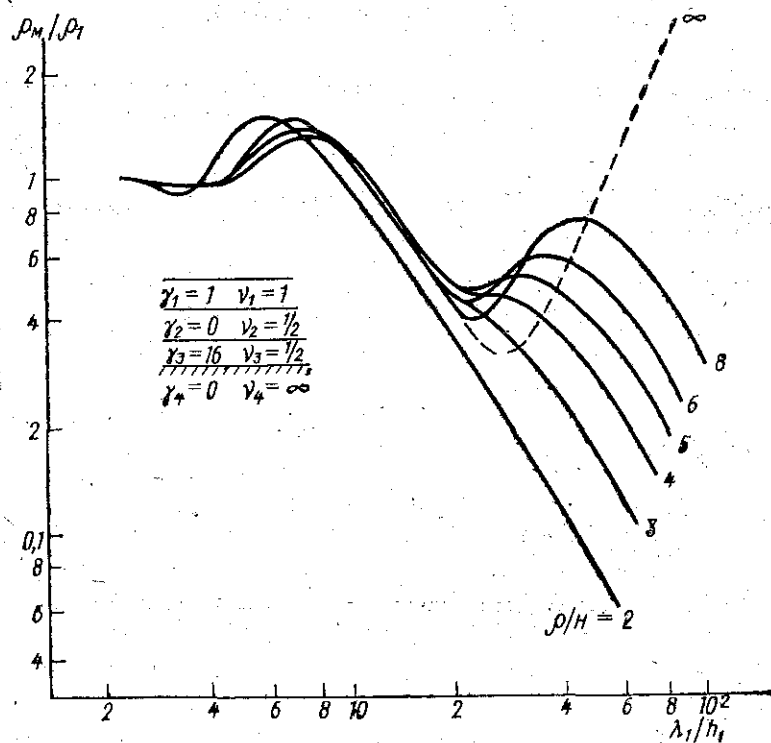


Рис. 2

экранной толщи и разреза. Электрическое поле (рис. 3, сплошные линии), которое в основном содержит гальваническую часть поля, слабо реагирует на строение подэкранной толщи, но отмечает наличие даже тонкого слоя-изолятора. При этом кривые имеют характерную особенность — наличие глубокого узкого минимума в высокочастотной области. Этот минимум может использоваться при интерпретации полевых измерений для выявления слоя-изолятора, определения его мощности и глубины залегания [20].

Если высокоомный слой имеет конечное сопротивление, то за счет перетекания токов через этот слой влияние разреза под этим слоем на кривые ρ_3/ρ_1 резко усиливается, вид частотных кривых меняется: появляется новая характерная точка — хорошо выраженный максимум перед выходом на горизонтальную асимптоту.

Как показали расчеты, характер кривой частотного зондирования в этом случае существенно зависит от величины сопротивления высокоомного слоя и от разноса, при котором выполняется зондирование. Так, с ростом сопротивления разрешающая способность кривых частотного зондирования падает, при этом сущест-

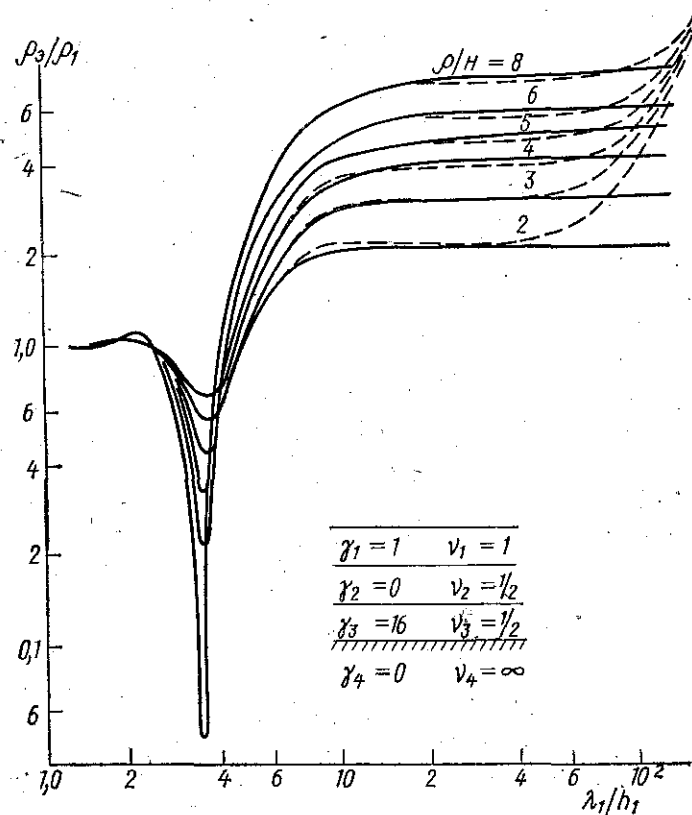


Рис. 3

вует такое критическое значение удельного сопротивления, при котором этот слой уже приобретает свойства слоя-изолятора [22]. Влияние разноса на кривые частотного зондирования также существенно. Так, при зондировании трехслойных разрезов типа К (т. е. $\sigma_2 < \sigma_1$ и $\sigma_2 < \sigma_3$) кривые ρ_3/ρ_1 при малых разносах в низкочастотной области близки по своему характеру к кривым для двухслойного разреза. Естественно, что такие кривые неудобны для интерпретации. Чтобы избежать ошибочной интерпретации экспериментальных кривых, полученных в условиях двухслойного разреза или разреза типа К, необходимо проводить зондирова-

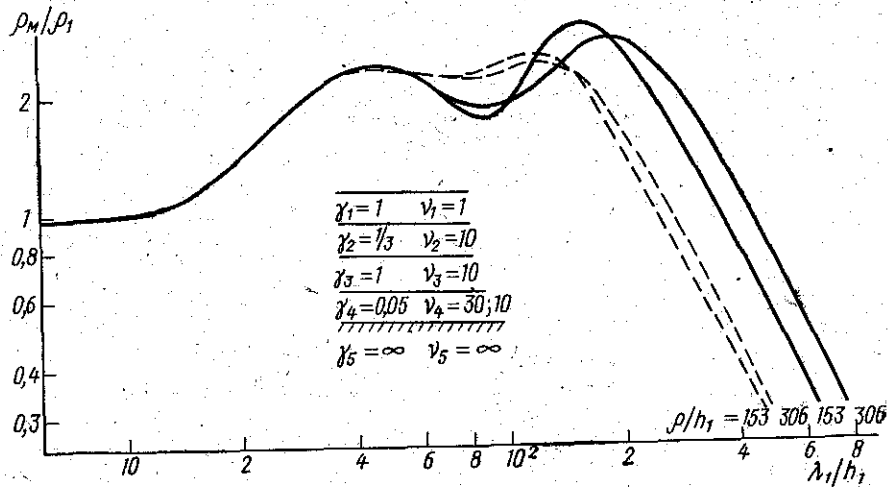


Рис. 4

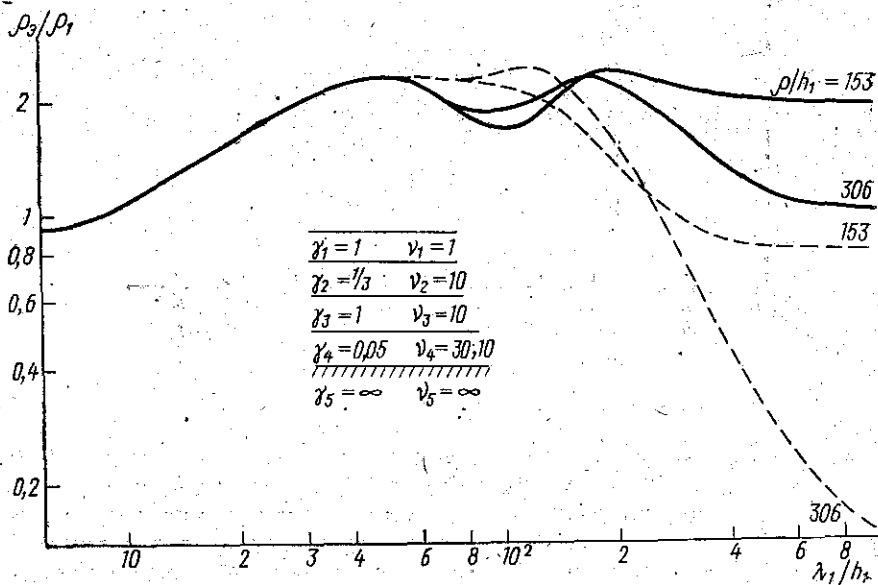


Рис. 5

ния на нескольких разносах. Это позволит правильно определить тип разреза.

В заключение параграфа рассмотрим частотные кривые для разрезов с несколькими мощными высокоомными слоями. На рис. 4 и 5 приведены соответственно амплитуды ρ_m/ρ_1 и ρ_3/ρ_1 для пятислойных разрезов, отличающихся мощностью четвертого слоя. Оба высокоомных слоя отмечаются на кривых частотного зондирования в виде локальных максимумов. Легко видеть, что на кривой кажущегося сопротивления, рассчитанной по электрической составляющей поля, слой $\nu_1=10$ при разносе $\rho/h_1=153$ практически не дал самостоятельного максимума, но с ростом разноса разрешающая способность этих кривых возрастает. На частотных кривых ρ_m/ρ_1 высокоомные слои более четко отмечаются при разносе $\rho/h_1=153$.

Проведенные расчеты и анализ особенностей поведения электромагнитного поля в методе частотного зондирования позволили сделать вывод о возможности использования этого метода при изучении кристаллического фундамента Земли и поиска в нем проводящих зон.

3. Асимптотический метод расчета электромагнитного поля электрического диполя в методе ЧЗ

При разработке и исследовании алгоритмов расчета полей в слоистых средах большое внимание уделялось созданию асимптотических методов, позволяющих быстро и с достаточной степенью точности рассчитывать эти поля в определенном диапазоне частот [14—17]. В основном все эти работы базировались на исследованиях А. Н. Тихоньва по асимптотическому поведению специального класса несобственных интегралов, содержащих бесселевы функции [16].

Как известно, в общей теории распространения радиоволн принято выделять две основные асимптотические зоны: ближнюю и волновую. Первая является низкочастотной зоной, когда расстояние между приемником и источником поля много меньше длины волны в среде, т. е. $\rho/\Lambda \ll 1$. Вторая — высокочастотная зона, определяемая соотношением — $\rho/\Lambda \gg 1$. При рассмотрении электромагнитного поля в многослойных структурах появляется возможность выделения еще одной асимптотической зоны. Это связано с тем, что многослойную структуру можно разбить на две группы слоев, в одну из которых входят высокоомные слои (минимальную длину волны в них обозначим Λ_{\min}), а в другую — низкоомные слои (максимальная длина волны — Λ_{\max}). При $\Lambda_{\min} \gg \Lambda_{\max}$ возможно выделение асимптотической зоны, в которой $\rho/\Lambda_{\min} \ll 1$ и $\rho/\Lambda_{\max} \gg 1$. В этом случае, осуществляя двойной предельный переход $\rho/\Lambda_{\max} \rightarrow \infty$ при $\rho/\Lambda_{\min} \rightarrow 0$, мы имеем возможность получить высокочастотную асимптотику электромагнит-

ного поля в квазистационарной зоне. Ниже будет рассмотрен этот тип асимптотики применительно к методу частотных зондирований ЧЗ, о котором шла речь в предыдущем пункте. При выводе асимптотических формул для компонент поля H_z и E_x будем пользоваться двумя утверждениями, доказанными в работе [16], в которой рассматриваются асимптотические представления для интегралов типа $I(\rho) = \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) F(\lambda) d\lambda$, а также их произвольных по

ρ при $\rho \gg 1$. При этом предполагается, что функция $F(\lambda)$ имеет ограниченную вариацию в промежутке (λ_0, ∞) , где λ_0 зависит от $F(\lambda)$. Класс функций, обладающих этим свойством, обозначим V . Утверждения следующие:

Теорема 1. Если функция $F(\lambda) \in V$ имеет в интервале $0 \leq \lambda < \infty$ n производных, принадлежащих к тому же классу, причем n -я производная ограничена, а остальные непрерывны, то

$$I(\rho) = \frac{F(0)}{\rho} + c_2 \frac{F''(0)}{\rho^3} + \dots + c_{2m} \frac{F^{2m}(0)}{\rho^{2m+1}} + \frac{1}{\rho^n} \varepsilon(\rho), \quad (58)$$

где

$$m = \left[\frac{n-1}{2} \right], \quad c_{2k} = (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2^k \cdot k!}, \quad \varepsilon(\rho) \rightarrow 0 \text{ при } \rho \rightarrow \infty.$$

Теорема 2. Имеет место формула

$$\frac{dI_0(\rho)}{d\rho} = -\frac{F(0)}{\rho^2} - \dots - (2m-1) c_{2m} \frac{F^{2m}(0)}{\rho^{2m+2}} + \frac{1}{\rho^{n+1}} \varepsilon(\rho), \quad (59)$$

если помимо условий, наложенных на $F(\lambda)$ в теореме 1, функция $F_1(\lambda) = \lambda[F(\lambda) - F(\infty)]$ и ее $(n+1)$ -я производная принадлежат классу V , причем $(n+1)$ -я производная этой функции ограничена, а остальные непрерывны.

Перейдем к выводу асимптотических представлений компонент поля E_x и H_z . Обозначим подынтегральную функцию $u_0(\lambda) + W_0(\lambda)/k_1^2$, входящую в выражение (43), $\varphi(\lambda)$. Для того чтобы применить разложение (58)–(59) к выражению полей (42)–(43), мы должны показать, что функции $u_0(\lambda) \cdot \lambda$, $\varphi_\lambda(\lambda)$ и их производные принадлежат классу V . Из (44)–(45) следует, что $u_0(\lambda)$ и $W_0(\lambda)$ непрерывны, дифференцируемы на всем интервале интегрирования и при $\lambda \gg 1$ с высокой степенью точности аппроксимируются функциями (46), откуда сразу следует существование такого λ_0 , что при $\lambda > \lambda_0$ $u_0 \cdot \lambda$ и φ_λ будут монотонными ограниченными функциями, т. е. эти функции и их производные принадлежат V . Таким образом, из (42) и (59) получаем

$$H_z \approx -\frac{3I}{2\pi y^4} \frac{du_0}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} \quad (60)$$

Запишем второй интеграл, входящий в выражение (43) в виде

$$\int_0^\infty J_1(\lambda\rho) \varphi(\lambda) d\lambda = -J_0(\lambda\rho) \cdot \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda\rho} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) \varphi'_\lambda(\lambda) d\lambda,$$

т. е.

$$\int_0^\infty J_1(\lambda\rho) \varphi(\lambda) d\lambda = -\frac{\varphi(0)}{\rho} + \frac{1}{\rho} \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) \varphi'_\lambda(\lambda) d\lambda. \quad (61)$$

Функцию $\varphi'_\lambda \in V$ поэтому, используя (58), можно записать (43) в виде

$$E_x \approx -\frac{i\omega\mu I}{2\pi y} \left\{ \frac{du_0}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} + y\varphi(0) + \frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} \right\}.$$

Из (44) следует, что $\frac{dW_0(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} = 0$, поэтому последнее соотношение можно записать в виде

$$E_x \approx -\frac{i\omega\mu I}{\pi y^3} \left\{ \frac{du_0}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} + \frac{y^2}{2} \left(\frac{\sigma_1 W_0(0)}{2k_1^2} + u_0(0) \right) \right\}. \quad (62)$$

Таким образом, если выполнены все ограничения на геоэлектрические и линейные параметры задачи, указанные выше, компоненты поля H_z и E_x будут определяться выражениями (62), (67). При этом можно выделить три случая, соответствующие трем типам геоэлектрических разрезов. К первому типу отнесем разрезы, содержащие только проводящие слои. В этом случае, как следует из (44)–(45), $\varphi(0) = 0$ и $u'_\lambda(0) = -1/Z_0^2(0)$, т. е. выражения кажущихся сопротивлений (53)–(54), соответствующих асимптотическим представлениям электрического и магнитного полей, совпадают. Ко второму типу отнесем разрезы, состоящие из пачки проводящих слоев, лежащей на высокоомном основании. В силу характера рассматриваемой асимптотики мы должны в этом случае положить проводимость подстилающего основания равной нулю и лишь затем в (44)–(45) устремить $\lambda \rightarrow 0$. Для этого типа разрезов $\varphi(0) = 0$, а

$$u'_\lambda \Big|_{\lambda=0} = -\frac{1 + Z_0'(0)}{Z_0^2(0)},$$

т. е. в этом случае асимптотические представления E_x^* и H_z^* также совпадают, но теперь в асимптотике появился дополнительный член, связанный с тем, что $Z_0'(0) \neq 0$. Физически это объясняется прохождением дополнительной волны по высокоомному основанию. К третьему типу отнесем разрезы, имеющие высокоомные слои, которые мы должны рассматривать как изоляторы, прежде чем осуществлять предельный переход $\lambda \rightarrow 0$. Для этого типа разрезов $\varphi(0) \neq 0$, т. е. асимптотики электрического и магнитного

полей не совпадают, и, кроме того, асимптотика электрического поля существенно зависит от разности.

Выпишем выражения для $W_0(0)$, $Z_0(0)$, $n Z_0(0)$, входящих в асимптотические представления электромагнитного поля:

1) $W_0(0)$ определяется рекуррентным соотношением

$$W_{m-1}(0) = -ik_m \frac{ik_m \sigma_{m+1} - W_m(0) \sigma_m - (ik_m \sigma_{m+1} + W_m(0) \sigma_m) e^{2ik_m h_m}}{ik_m \sigma_{m+1} - W_m(0) \sigma_m + (ik_m \sigma_{m+1} + W_m(0) \sigma_m) e^{2ik_m h_m}}, \quad (63)$$

при условии $W_{n-1}(0) = -ik_n$; или

$$W_{l-2}(0) = -ik_{l-1} \frac{1 - e^{2ik_{l-1} h_{l-1}}}{1 + e^{2ik_{l-1} h_{l-1}}},$$

где l — номер ближайшего к поверхности изолятора;

2) $Z_0(0)$ при переходе от проводящего слоя к проводящему определяется рекуррентным соотношением

$$Z_{m-1} = -ik_m \frac{ik_m - Z_m - (ik_m + Z_m) e^{2ik_m h_m}}{ik_m - Z_m + (ik_m + Z_m) e^{2ik_m h_m}} \quad (64)$$

при условии $Z_{n-1} = -ik_n$, а при переходе через изолятор ($\sigma_m = 0$) — соотношением

$$Z_{m-2} = -ik_{m-1} \frac{ik_{m-1} - Z_m (1 - ik_{m-1} h_m) - [ik_m + Z_m (1 + ik_{m-1} h_m)] e^{2ik_{m-1} h_{m-1}}}{ik_{m-1} - Z_m (1 - ik_{m-1} h_m) + [ik_m + Z_m (1 + ik_{m-1} h_m)] e^{2ik_{m-1} h_{m-1}}}, \quad (65)$$

3) $Z_0(0)$, как следует из (45), будет отлично от нуля только в случае, если подстилающее основание — изолятор, при этом при переходе от проводящего слоя к проводящему определяется рекуррентным соотношением

$$Z'_{m-1}(0) = - \frac{Z'_m(0) \cdot 4k_m^2 e^{2ik_m h_m}}{[ik_m - Z_m + (ik_m + Z_m) e^{2ik_m h_m}]^2}, \quad (66)$$

при условии

$$Z'_{n-1}(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sigma_n \neq 0; \\ 1, & \text{если } \sigma_n = 0; \end{cases}$$

а при переходе через изолятор ($\sigma_m = 0$) — соотношением

$$Z'_{m-2}(0) = - \frac{Z'_m(0) \cdot 4k_{m-1}^2 e^{2ik_{m-1} h_{m-1}}}{[ik_{m-1} - Z_m (1 - ik_{m-1} h_m) + [ik_m + Z_m (1 + ik_{m-1} h_m)] e^{2ik_{m-1} h_{m-1}}]^2}. \quad (67)$$

Расчеты относительных кажущихся сопротивлений (53) — (54) в зависимости от безразмерных параметров (55) для разрезов,

содержащих высокоомные слои, показали, что асимптотика электрического поля существенно отличается от асимптотики магнитного поля. На рис. 2—3 приведены в качестве примера результаты расчета амплитуд ρ_m/ρ_1 и ρ_a/ρ_1 по асимптотическим формулам. Естественно, что асимптотика дает правильный результат в области достаточно высоких частот. Но для определенного класса разрезов, содержащих высокоомные слои, асимптотика дает практически правильный результат во всем интервале частот, представляющих интерес при зондировании. Быстрота счета и удобство реализации асимптотического метода на ЭВМ позволили провести большой объем вычислений электромагнитного поля для этого класса разрезов [18] и на его основе исследовать разрешающую способность метода ЧЗ при выявлении в разрезе слоя-изолятора, определении его мощности и глубины залегания [17, 20].

4. Электромагнитное поле в слоистой среде для вертикальных источников

Рассмотрим две задачи, связанные с расчетом полей в слоистых средах для вертикального магнитного и электрического диполей. Источники этого типа находят широкое применение в разведочной геофизике. В частности, магнитный диполь используется в методе ЧЗ, а электрический диполь — в методах радиопросвечивания. При решении этих задач будем пользоваться описанным выше алгоритмом построения аналитического представления компонент поля произвольного источника, расположенного в слоистой структуре с кусочно-постоянным характером изменения геоэлектрических параметров.

Первой рассмотрим задачу расчета квазистационарного электромагнитного поля вертикального магнитного диполя, расположенного на поверхности n -слойной структуры (рис. 1). Согласно (35) — (37) векторный потенциал магнитного типа для поставленной задачи будет иметь только одну составляющую:

$$A_z^* = - \frac{IS}{4\pi} \sigma(z) \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) U_\mu^0(z, z_0, \lambda) \lambda d\lambda,$$

и, следовательно, компоненты поля с учетом (31, 38) будут иметь вид

$$E_\varphi(z, z_0, \rho) = i\omega \frac{IS}{4\pi} \int_0^\infty J_1(\lambda \rho) U_\mu^0(z, z_0, \lambda) \lambda^2 d\lambda,$$

$$H_z(z, z_0, \rho) = \frac{IS}{4\pi\mu} \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) U_\mu^0(z, z_0, \lambda) \lambda^3 d\lambda,$$

$$H_\rho(z, z_0, \rho) = -\frac{IS}{4\pi} \int_0^\infty J_1(\lambda\rho) Z(z, z_0, \lambda) U_\mu^0(z, z_0, \lambda) \lambda^2 d\lambda,$$

где функции Z и U_μ^0 определяются согласно (19), (21) и (26) — (27).

Предположим, что поле измеряется на поверхности рассматриваемой структуры. Тогда компоненты электромагнитного поля определяются через функцию $u_0(\lambda)$, введенную ранее (45), следующим образом:

$$E_\varphi(\rho) = i\omega\mu \frac{IS}{2\pi} \int_0^\infty J_1(\lambda\rho) u_0(\lambda) \lambda^2 d\lambda, \quad (69)$$

$$H_z(\rho) = \frac{IS}{2\pi} \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) u_0(\lambda) \lambda^3 d\lambda, \quad (70)$$

$$H_\rho(\rho) = \frac{IS}{2\pi} \int_0^\infty J_1(\lambda\rho) u_0(\lambda) \lambda^3 d\lambda. \quad (71)$$

Рассмотрим на примере однородного полупространства характер зависимости поля от разноса и удельного сопротивления среды. В случае полупространства интегралы, входящие в выражения для E_φ и H_z , легко вычисляются, и мы получаем

$$F_\varphi = i\omega\mu \frac{3IS}{2\pi\rho^4 k_1^2} [e^{ik_1\rho} (1 - ik_1\rho - k_1^2\rho^2/3) - 1], \quad (72)$$

$$H_z = \frac{9IS}{2\pi\rho^5 k_1^2} [1 - e^{ik_1\rho} (1 - ik_1\rho - 4k_1^2\rho^2/9 + ik_1^3\rho^3/9)].$$

Следовательно, при малых разносах E_φ обратно пропорционально ρ^2 , а H_z — ρ^3 . При больших разносах E_φ убывает как $O(1/\rho^4)$, а H_z — как $O(1/\rho^5)$. Рассмотрим далее H_ρ . Из (71) следует, что при малых разносах (или низких частотах) $H_\rho \approx 0$ а при больших разносах (или высоких частотах) согласно представлению (50)

$$H_\rho \approx i \frac{3IS}{2\pi\rho^4 k_1} \quad (73)$$

Таким образом, в волновой зоне H_ρ слабее зависит от удельного сопротивления нижнего полупространства в сравнении с H_z и E_φ . Поскольку в ЧЗ используются именно эти две последние компоненты, то мы и рассмотрим их ниже. Из (72) следует, что E_φ и H_z в области высоких частот пропорциональны ρ_1 . Поэтому обыч-

но при исследовании электромагнитного поля рассчитываются следующие безразмерные величины:

$$\rho_2/\rho_1 = -\frac{2\pi\rho^4}{3IS} E_\varphi \quad \text{и} \quad \rho_m/\rho_1 = i\omega\mu \frac{2\pi\rho^5}{9IS'} H_z \quad (74)$$

в зависимости от безразмерных параметров (55). Как в случае возбуждения поля горизонтальным электрическим диполем, ρ_2/ρ_1 и ρ_m/ρ_1 представляются в виде суммы двух слагаемых, одно из которых соответствует полю полупространства с удельным со-

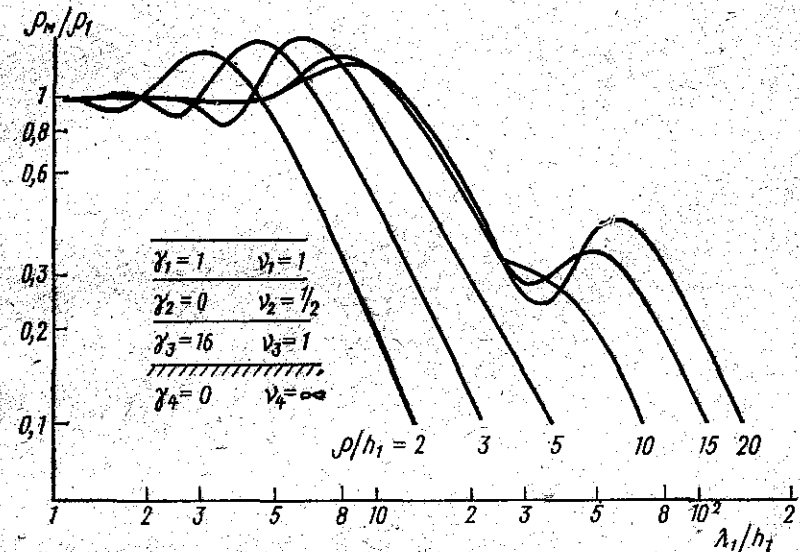


Рис. 6

противлением, равным сопротивлению первого слоя разреза, а другое — учитывает многослойность среды.

На рис. 6 и 7 приведены результаты расчета амплитуд ρ_m/ρ_1 и ρ_2/ρ_1 для четырехслойного разреза, второй слой которого и подстилающее основание являются изоляторами. Кривые частотного зондирования рассчитаны для серии разносов $\rho/h_1 = 2 \div 15$. В отличие от частотных кривых, соответствующих электрическому диполю (рис. 2—3), приведенные частотные кривые имеют практически одинаковый характер поведения. Высокоомный слой проявляется на кривых в виде максимума. Хорошо видно, что при $\rho/h_1 > 10$ на кривых наблюдается второй четкий максимум, связанный с наличием в разрезе подстилающего основания, являющегося изолятором. Проведенные расчеты показали, что этот метод электромагнитных зондирований может быть использован при поиске и исследовании хорошо проводящих зон в кристаллическом фундаменте Земли.

Перейдем к рассмотрению поля вертикального электрического диполя, расположенного в слоистой среде. Эта задача приобретает в настоящее время определенный практический интерес в связи с разработкой и внедрением в практику разведочной геофизики шахтно-скваженного радиоволнового метода, основанного на использовании электромагнитных полей, возбуждаемых источниками типа вертикальный электрический диполь, и предназна-

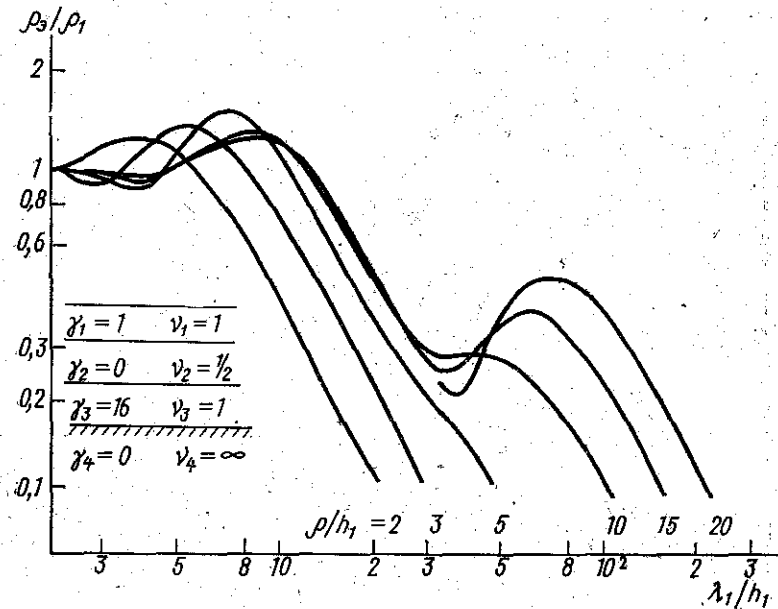


Рис. 7

ченного для поиска и разведки рудных образований, отличающихся от вмещающих пород более высоким электрическим сопротивлением.

Предположим, что исследуемая среда представляет собой однородное изотропное пространство, содержащее слой, геоэлектрические параметры которого отличны от параметров вмещающей среды. Измерение поля происходит при синхронном перемещении передающего и приемного диполей. Источник поля находится в точке $M_0 = \{0, 0, z\}$, приемник — в точке $M = \{0, y, z\}$. Введем следующие обозначения: k_1 — волновое число вмещающей среды, k_2 — волновое число слоя, h — мощность слоя. Из физической постановки задачи следует, что ее решение будет симметрично относительно $z = -h/2$, поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать интересующую нас компоненту поля E_z при $z \geq -h/2$. Согласно (2), (6), (10) — (11) E_z будет иметь вид

$$E_z = \frac{iI}{4\pi\omega\tilde{\epsilon}^2(z)} \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) U_\epsilon^0(z, \lambda) \lambda^3 d\lambda. \quad (75)$$

Функция U_ϵ^0 определяется в соответствии с представлениями (26), (21), (19). Следовательно, учитывая характер исследуемой среды, можно записать

$$U_\epsilon^0 = \begin{cases} \frac{\tilde{\epsilon}_1}{\eta_1} \left\{ 1 - \frac{ab(1 - e^{-2\eta_2 h})}{a^2 - b^2 e^{-2\eta_2 h}} e^{-2\eta_1 |z|} \right\} & \text{при } z \geq 0, \\ \frac{\tilde{\epsilon}_2}{\eta_2} \left\{ 1 + \frac{b[ae^{2\eta_2 z}(1 + e^{-2\eta_2 h}) + 2be^{-2\eta_2 h}]}{a^2 - b^2 e^{-2\eta_2 h}} \right\} & \text{при } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0, \end{cases}$$

где

$$\eta_j = \sqrt{\lambda^2 - k_j^2} \quad \text{Re } \eta_j > 0; \quad a = \tilde{\epsilon}_1 \eta_2 + \tilde{\epsilon}_2 \eta_1; \quad b = \tilde{\epsilon}_1 \eta_2 - \tilde{\epsilon}_2 \eta_1.$$

Следует заметить, что при расчете E_z функцию U_ϵ^0 удобно представить в виде суммы

$$U_\epsilon^0(\lambda, z) = U_0(\lambda, z) + [U(\lambda, z) - U^*(\lambda, z)] + U^*(\lambda, z),$$

в которой U_0 соответствует однородному пространству:

$$U_0(\lambda, z) = \begin{cases} \tilde{\epsilon}_1 / \eta_1 & \text{при } z \geq 0, \\ \tilde{\epsilon}_2 / \eta_2 & \text{при } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0, \end{cases}$$

а U^* с высокой степенью точности аппроксимирует функцию $U(\lambda, z)$ при $\lambda \gg \max |k_i|$:

$$U^*(\lambda, z) = \frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} \left(1 + \frac{k_1^2 \cdot k_2^2}{(k_1^2 - k_2^2) \lambda^2} \right) e^{-2\eta(z)|z|} \cdot \frac{\tilde{\epsilon}(z)}{\eta(z)}.$$

В этом случае компоненту поля E_z можно записать в виде

$$E_z = i\omega\mu \frac{I}{4\pi} \frac{1}{k^2(z)} \left\{ \frac{e^{ik(z)}}{\rho^3} [-1 + ik(z)\rho + k^2(z)\rho^2] - \text{sign}(z) \times \right. \\ \times \left\{ \frac{e^{ik(z)r}}{r^3} \frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} \left[(1 - ik(z)r) \left(2 + \frac{ik(z)\rho}{r} \right) - \rho^2 \frac{3 - 2ik(z)r}{r^3} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{k_1^2 k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} r^2 \right] + \int_0^\infty J_0(\rho t) [U(\lambda, z) - U^*(\lambda, z)] \lambda^3 d\lambda \right\} \right\}.$$

где $r = \sqrt{\rho^2 + 4z^2}$.

Расчеты электрического поля, проведенные в НИВЦ МГУ, позволили исследовать характер зависимости аномалий поля от

геоэлектрических параметров среды и параметров установки. Приведем в качестве примера результаты расчета коэффициента экранирования $\Theta = |E_z|/|E_z^0|$ (E_z^0 — нормальное поле в отсутствие слоя) для различных значений мощности слабопроводящего слоя (рис. 8). По оси абсцисс в указанной палетке отложено расстоя-

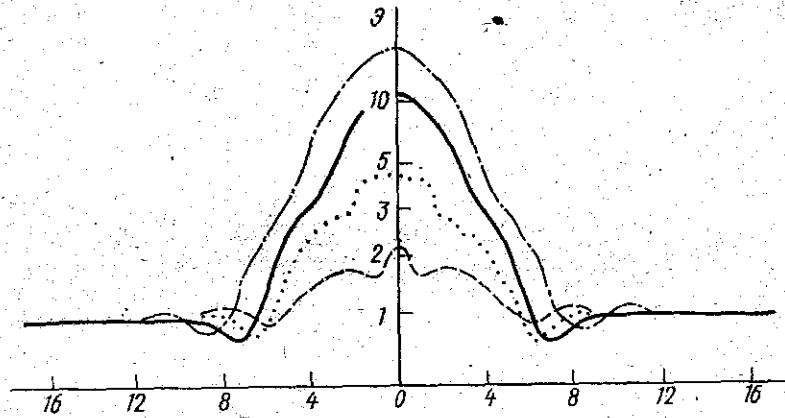


Рис. 8

ние в метрах между источником поля и плоскостью $z = -h/2$ (— — — $h=1$ м, ... $h=3$ м, — $h=5$ м, - · - $h=7$ м, $\rho_1=300$ Ом·м, $\rho_2=2000$ Ом·м, $f=18$ м·Гц, $\epsilon_1=12\epsilon_0$, $\epsilon_2=10\epsilon_0$, $\rho=20$ м).

Сравнение результатов физического моделирования, а также результатов полевых измерений электрического поля с результатами численных исследований позволяет сделать вывод о возможности использования последних для определения разрешающей способности шахтно-скважинного радиоволнового метода разведки жил высокого сопротивления и разработки приемов интерпретации полевых измерений.

5. Электромагнитное поле вертикального электрического диполя в слоистой диэлектрической среде

При электромагнитных зондированиях слоистых диэлектрических сред в отличие от зондирования проводящих сред возникают трудности, связанные с тем, что поле на любой частоте проникает на очень большую глубину и измеряемое поле сложным образом зависит от геоэлектрических параметров разреза. Это обстоятельство затрудняет интерпретацию результатов, полученных при проведении зондирования. Рассмотрим возможности исследования таких сред с помощью поля вертикального электрического диполя.

Предположим, что диполь расположен на поверхности n -слой-

ной диэлектрической магнито-однородной среды (рис. 1). Как было показано выше, электрическая составляющая поля E_z определяется соотношением (75). В случае, когда поле измеряется на поверхности среды, выражение для E_z упрощается:

$$E_z = \frac{iIl}{2\pi\omega\epsilon_0} \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) \frac{\lambda^2 d\lambda}{\epsilon_0 Z_1^0(\lambda) + \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}}, \quad (76)$$

где функция $Z_1^0(\lambda)$ определяется рекуррентным соотношением (19) при условии $a_j = \epsilon_j$. Следует заметить, что исследоваться будет нормированное электрическое поле

$$E_z^* = \frac{2\pi\rho^2}{iIl} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu}} E_z \quad (77)$$

в зависимости от безразмерных параметров

$$t = \frac{\lambda}{k_0}; \quad r = k_0\rho; \quad \delta_j = \frac{\epsilon_j}{\epsilon_0}; \quad \nu_j = k_0 h_j;$$

$$\tilde{\delta}_j = \frac{\tilde{\epsilon}_j}{\epsilon_0} = \delta_j(1 + il_j); \quad l_j = \frac{\delta_j}{\omega\epsilon_j}, \quad (78)$$

где $k_0 = \omega^2\epsilon_0\mu$, а $l_j \ll 1$ по условию задачи. Введение в нормированный множитель величины ρ^2 связано с удобством интерпретации результатов, так как вертикальная составляющая электрического поля убывает в горизонтальной плоскости пропорционально квадрату расстояния до источника. Из (76) — (78) следует, что

$$E_z = r^2 \int_0^\infty J_0(rt) u_0(t) t^3 dt, \quad (79)$$

где $u_0(t) = \left(\frac{\epsilon_0}{k_0} Z_1^0 + \sqrt{t^2 - 1} \right)^{-1}$. При расчете E_z^* функцию $t^3 u_0(t)$ удобно представить в виде

$$u_0(t) \cdot t^3 = (u_0 \cdot t^3 - u^*(t)) + u^*(t),$$

где $u^*(t) \approx t^3 u_0$ при $t > t_0$. Легко убедиться, что при больших значениях параметра интегрирования

$$u_0 \cdot t^3 \approx \frac{\tilde{\delta}_1}{1 + \tilde{\delta}_1} \left(t^2 + \frac{\tilde{\delta}_1}{1 + \tilde{\delta}_1} \right).$$

Введем обозначения:

$$\Phi(t) = u_0(t) \cdot t^3 - u^*(t) \quad \text{и} \quad L = \tilde{\delta}_1 / (1 + \tilde{\delta}_1).$$

Тогда можно записать:

$$E_z^* = r^3 \int_0^\infty J_0(rt) \Phi(t) dt + rL(L - 1/r^2), \quad (80)$$

где функция $\Phi(t)$ является непрерывной, ограниченной, монотонной при $t > t_0$ и удовлетворяющей условию $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = 0$. Таким образом, задача свелась к расчету интеграла типа (56), о котором мы уже говорили выше.

Рассмотрим характерные особенности в поведении электрической составляющей поля на примере однородного нижнего пространства при $\sigma_1 = 0$. Общий характер изменения поля для различных значений $\delta_1 = \epsilon_1/\epsilon_0$ в зависимости от ρ/Λ_0 представлен на

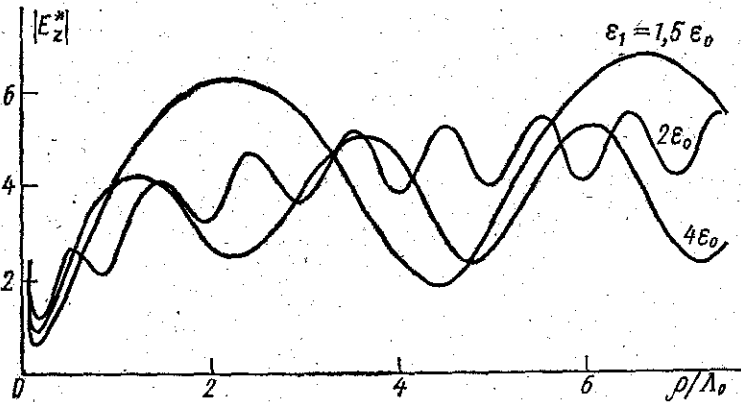


Рис. 9

рис. 9. В окрестности нуля поле имеет особенность, которая, как следует из представления для E_z^* , будет типа $\delta_1/(1+\delta_1)r$. Затем поле имеет четко выраженный минимум, после которого начинает медленно расти до выхода на некоторое среднее значение, имея при этом осциллирующий характер. Скорость выхода на это среднее значение, а также период и амплитуда колебания $|E_z^*|$ зависят от δ_1 . Для анализа этой зависимости рассмотрим поведение поля при тех значениях ρ/Λ_0 , при которых происходят установившиеся колебания, т. е. рассмотрим асимптотическое представление для E_z^* при $r \rightarrow \infty$. Так как при больших r основной вклад в интеграл дают окрестности точек $t=1$ и $t=\sqrt{\delta_1}$, то необходимо построить $f(t)$, которая бы с высокой степенью точности аппроксимировала бы функцию $u_0(t)$ в окрестности особых точек, а вне была бы гладкой медленно меняющейся функцией. Для определения $f(t)$ разложим $u_0(t)$ в ряд по $\sqrt{t^2-1}$ в окрестности точки $t=1$ и в ряд по $\sqrt{t^2-\delta_1}$ в окрестности точки $t=\sqrt{\delta_1}$. Получим

$$u_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\sqrt{t^2-1})^n \text{ и } u_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (\sqrt{t^2-\delta_1})^n,$$

где

$$a_n(\delta_1) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{\delta_1 x + \sqrt{x^2+1-\delta_1}} \right)_{x=0},$$

$$b_n(\delta_1) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{x + \delta_1 \sqrt{x^2+\delta_1+1}} \right)_{x=0}.$$

Легко показать, что $a_n(\delta_1)$ и $b_n(\delta_1)$ связаны соотношением

$$b_n(\delta_1) = \frac{1}{(\sqrt{\delta_1})^{n+3}} a_n \left(\frac{1}{\delta_1} \right).$$

В качестве $f(t)$ можно взять функцию $f(t) = [u_1(t) + u_2(t)]$, которая удовлетворяет указанным выше условиям. Поэтому при больших r

$$E_z^*(r, \delta_1) \simeq \delta_1 r^2 \int_0^{\infty} J_0(rt) [u_1 + u_2] t^3 dt =$$

$$= \delta_1 r^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_n(\delta_1) I_n(r) + \sqrt{\delta_1} a_n \left(\frac{1}{\sqrt{\delta_1}} \right) I_n(r\sqrt{\delta_1}) \right\},$$

где

$$I_n(r) = \int_0^{\infty} J_0(rt) (\sqrt{t^2-1})^n t^3 dt.$$

Для $I_n(r)$ имеет место следующая рекуррентная формула:

$$I_n(r) = - \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dI_{n-2}(r)}{dr} \right) + I_{n-2} \right\},$$

причем

$$I_{-1}(r) = e^{ir}/r; \quad I_0(r) = 0.$$

Следовательно, при $r \gg 1$

$$E_z^*(r, \delta_1) \simeq \delta_1 r^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_{2n+1}(\delta_1) I_{2n+1}(r) + \sqrt{\delta_1} a_{2n+1} \left(\frac{1}{\delta_1} \right) I_{2n+1}(r\sqrt{\delta_1}) \right\}.$$

Выпишем первый член разложения. В этом случае

$$a_1 = \frac{\delta_1}{\delta_1-1}; \quad I_1 = \frac{9-9ir-4r^2+ir^3}{r^3} e^{ir}$$

и

$$E_z^*(r, \delta_1) \simeq \frac{i\delta_1^2}{\delta_1-1} \left(e^{ir} - \frac{1}{\delta_1 \sqrt{\delta_1}} e^{ir\sqrt{\delta_1}} \right), \quad (81)$$

т. е. на больших расстояниях поле представляется в виде суммы двух бегущих волн с волновыми числами верхнего и нижнего полупространств.

Таким образом,

$$|E_z^*| \approx \frac{\sqrt{\delta_1(1+\delta_1^3)}}{\delta_1-1} \sqrt{1 - \frac{2\delta_1\sqrt{\delta_1}}{1+\delta_1^3} \cos \frac{2\pi\rho(\sqrt{\delta_1}-1)}{\lambda_0}} \quad (82)$$

На рис. 10 приведены результаты расчета $|E_z^*|$ по формуле (80) (сплошные линии) и по асимптотической формуле (82) (пунктир) для $\delta_1=2$ и $\delta_1=4$ в зависимости от ρ/Λ_0 . Легко видеть, что асимп-

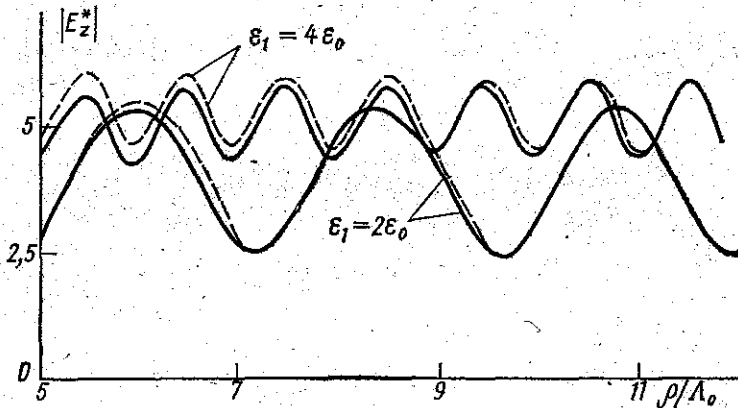


Рис. 10

тотические кривые хорошо приближают поле, причем для больших δ_1 выход на асимптотику происходит позднее.

Из (82) следует, что $|E_z^*|$ на больших расстояниях есть периодическая функция с периодом

$$F_T = \frac{1}{(\sqrt{\delta_1}-1)}.$$

При этом амплитуда колебания поля

$$F_A = \frac{1}{2} (\max |E_z^*| - \min |E_z^*|) = \frac{\sqrt{\delta_1}}{\delta_1-1},$$

а среднее значение $|E_z^*|$, около которого происходят колебания,

$$F_C = \frac{1}{2} (\max |E_z^*| + \min |E_z^*|) = \frac{\delta_1}{\delta_1-1}.$$

Таким образом, имеются три параметра, позволяющие определять величину $\delta_1 = \epsilon_1/\epsilon_0$ при решении обратной задачи.

Рассмотрим далее зависимость электрической составляющей поля от ρ/Λ_0 при измерении ее на поверхности двухслойного разреза. Анализ результатов расчета позволяет выделить три диапа-

зона изменения мощности верхнего слоя с различным характером поведения E_z^*

1. Для достаточно тонких слоев при $\rho \gg h_1$ электрическое поле ведет себя примерно так же, как и в случае однородного полупространства с параметрами нижнего полупространства двухслойки (рис. 11, кривая, соответствующая полупространству с $\delta_1 = 6$ — пунктир).

2. В случае мощных слоев поле в определенном конечном диапазоне изменения ρ/Λ_0 становится похожим на поле над однород-

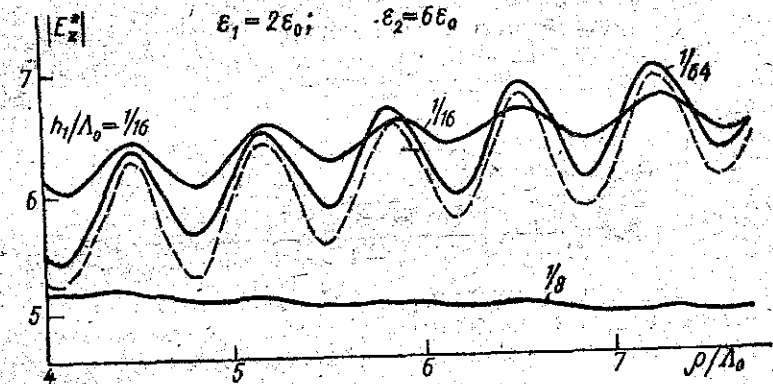


Рис. 11

ным пространством с параметрами, совпадающими с параметрами верхнего слоя.

3. Существует промежуточная область значений h_1/Λ_0 , при которых поле либо слабо меняется с ростом ρ/Λ_0 , либо имеет весьма сложный характер поведения.

Рассмотрим асимптотическое представление $|E_z^*|$ при $\rho/\Lambda_0 \gg 1$, при выводе которого мы, по аналогии с полупространством, должны исследовать функцию $u_0(t)$ в трех особых точках: $t=1$, $t=1$, $t=\sqrt{\delta_1}$ и $t=\sqrt{\delta_2}$. Оказывается, что разрыв производных функции $u_0(t)$ имеется только в точках $t=1$ и $t=\sqrt{\delta_2}$. В точке $t=\sqrt{\delta_1}$ функция $u_0(t)$ имеет непрерывные производные. Поэтому вклад в асимптотику дают только точки $t=1$ и $t=\sqrt{\delta_2}$. В остальном вывод асимптотики проходит так же, как и для полупространства, и при $\rho/\Lambda_0 \gg 1$ получаем

$$|E_z^*| = \text{mod} \left\{ \frac{\delta_1^2}{1-\delta_1} \left[\frac{\delta_2 \sqrt{\delta_1-1} C + \delta_1 \sqrt{\delta_2-1} D}{\delta_2 \sqrt{\delta_1-1} D + \delta_1 \sqrt{\delta_2-1} C} \right]^2 + \frac{4\delta_1 \sqrt{\delta_2} (N-1)}{[\sqrt{\delta_2-\delta_1} M + \delta_1 \sqrt{\delta_2-1} N]^2} e^{i\rho(\sqrt{\delta_2}-1)} \right\}, \quad (83)$$

где

$$C = 1 + e^{i2v_1 \sqrt{\delta_1 - 1}}; D = 1 - e^{-i2v_1 \sqrt{\delta_1 - 1}};$$

$$M = 1 - e^{-2v_1 \sqrt{\delta_2 - \delta_1}}; N = 1 + e^{-2v_1 \sqrt{\delta_2 - \delta_1}}.$$

Из (83) следует, что период установившихся колебаний поля зависит только от δ_2

$$F_T = \frac{1}{\sqrt{\delta_2 - 1}},$$

т. е. совпадает с аналогичным выражением для однородного полупространства с параметром, совпадающим с параметром нижнего полупространства двухслойки. Кроме того, при $h_1/\Lambda_0 \ll 1$, выражение (83) переходит в асимптотику для поля однородного полупространства.

Для второго и третьего диапазонов изменения h_1/Λ_0 , рассмотренных выше, выражение (83) принимает вид

$$|E_z^*| = \text{mod} \left\{ \frac{\delta_1^2}{\delta_1 - \delta_1} \left[\frac{\delta_2 \sqrt{\delta_1 - 1} C + \delta_1 \sqrt{\delta_2 - 1} D}{\delta_2 \sqrt{\delta_1 - 1} D + \delta_1 \sqrt{\delta_2 - 1} C} \right]^2 \right\}. \quad (84)$$

Из (83) — (85) следует, что при $\rho/\Lambda_0 \gg 1$ поле выходит на постоянное значение, величина которого зависит от отношения мощности слоя к длине волны в верхнем полупространстве и принадлежит интервалу

$$\frac{\delta_1^4 (\delta_2 - 1)}{\delta_2^2 (\delta_1 - 1)^2} \leq |E_z^*| \leq \frac{\delta_2^2}{\delta_2 - 1}. \quad (85)$$

Следовательно, проведя зондирование для серии частот, при котором $e^{i4\pi \rho/\Lambda_0}$ пробегает один раз все свои значения, можно получить максимальное и минимальное значение $|E_z^*|$ и по (85) найти δ_1 и δ_2 , а затем по (84) мощность слоя.

Эти выводы подтверждаются численными расчетами для двухслойных разрезов. Таким образом, мы можем сделать вывод о принципиальной возможности изучения слоистых диэлектрических сред с помощью электромагнитных зондирований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фок В. А., Бурсиан В. Р. Электромагнитное поле переменного тока в цепи с двумя заземлениями. — «Журн. Русск. физ.-хим. об-ва», 1926, т. 58, с. 355—363.
2. Бурсиан В. Р. Теория электромагнитных полей, применяемых в электроразведке, ч. I. Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та, 1933; ч. II, 1936.
3. Norton K. A. Propagation of radio waves over a plane earth. — «Nature», 1935, v. 135, p. 954—955.
4. Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики. М., ИЛ, 1950.

5. Свешников А. Г. Принципы излучения. — ДАН, 1950, т. 73, № 5, с. 917—920.

6. Тихонов А. Н. Об определении электрических характеристик глубинных слоев земной коры. — ДАН, 1950, т. 73, № 2, с. 295—297.

7. Тихонов А. Н. О становлении электромагнитного поля в слоистой среде. — «Изв. АН СССР, геогр. и геофиз.», 1950, т. 14, № 3, с. 199—222.

8. Тихонов А. Н. К математическому обоснованию теории электромагнитных зондирований. — «Журн. вычисл. матем. и мат. физики», 1965, т. 5, № 3, с. 545—548.

9. Тихонов А. Н., Шахсуваров Д. Н. Метод расчета электромагнитных полей, возбуждаемых переменным током в слоистых средах. — «Изв. АН СССР, геогр. и геофиз.», 1956, 20, № 3, с. 245—251.

10. Ваньян А. Л. Основы электромагнитных зондирований. М., «Недра», 1965.

11. Дмитриев В. И. Расчет электромагнитного поля в методе частотного зондирования. — В кн.: Вычислительные методы и программирование, вып. 3. М., Изд-во Моск. ун-та, 1965, с. 386—397.

12. Тихонов А. Н., Дмитриев В. И., Скугаревская О. А., Шахсуваров Д. Н. Таблицы амплитуд и фаз электромагнитного поля в слоистом пространстве. М., Изд-во Моск. ун-та, 1967.

13. Тихонов А. Н., Дмитриев В. И., Скугаревская О. А. Таблицы амплитуд и фаз электромагнитного поля в слоистом пространстве, вып. 2. М., Изд-во Моск. ун-та, 1968.

14. Тихонов А. Н., Шахсуваров Д. Н. Электромагнитное поле диполя в дальней зоне. — «Изв. АН СССР, геофиз.», 1959, т. 23, № 7, с. 946—955.

15. Тихонов А. Н., Шахсуваров Д. Н. О неравномерности асимптотики электромагнитных полей, возбуждаемых диполем переменного тока в слоистой среде. — «Изв. АН СССР, геофиз.», 1961, № 1, с. 107—110.

16. Тихонов А. Н. Об асимптотическом поведении интегралов, содержащих бесселевы функции. — ДАН, 1959, т. 125, № 5, с. 982—985.

17. Дмитриев В. И., Скугаревская О. А., Федорова Э. А. О высокочастотной асимптотике электромагнитного поля в слоистой среде. — «Изв. АН СССР, физика Земли», 1970, № 2, с. 44—51.

18. Тихонов А. Н., Дмитриев В. И., Скугаревская О. А., Федорова Э. А. Таблицы амплитуд и фаз электромагнитного поля в слоистом пространстве, вып. 3 и 4. М., Изд-во Моск. ун-та, 1968.

19. Дмитриев В. И. Общий метод расчета электромагнитного поля в слоистой среде. — В кн.: Вычислительные методы и программирование, вып. 10. М., Изд-во Моск. ун-та, 1968, с. 55—65.

20. Скугаревская О. А., Федорова Э. А., Дмитриев В. И., Королева К. П. Особенности электромагнитного поля над геоэлектрическим разрезом, содержащим непроводящий слой. — «Изв. АН СССР, физика Земли», 1971, № 11, с. 61—70.

21. Дмитриев В. И., Королева К. П., Скугаревская О. А., Федорова Э. А. Электромагнитное поле электрического диполя над геоэлектрическим разрезом, содержащим мощные высокоомные слои. — «Изв. АН СССР, физика Земли», 1974, № 11, с. 102—109.

22. Дмитриев В. И., Моисеева Т. С., Скугаревская О. А., Федорова Э. А. Некоторые особенности электромагнитного поля электрического диполя в высокоомных разрезах. — В кн.: Вычислительные методы и программирование, вып. 24. М., Изд-во Моск. ун-та, 1975, с. 143—156.

МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА
МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО КАРОТАЖА СКВАЖИН

Введение. Среди геофизических методов изучения геологического разреза, пройденного скважиной, важное место принадлежит электромагнитному каротажу, основанному на изучении электромагнитных полей, возбуждаемых в скважине. Современное состояние теории электромагнитного каротажа характеризуется все возрастающим применением ЭВМ для численного анализа математических моделей реальных геофизических ситуаций.

Основными целями численного анализа математических моделей электромагнитного каротажа являются:

- развитие теорий электромагнитного каротажа, т. е. исследование влияния различных параметров геоэлектрического разреза и измерительного устройства на электромагнитное поле в скважине;
- оптимизация измерительных устройств с точки зрения конструкции и характеристик;
- исследование характеристик проектируемых устройств;
- оптимизация измерительного эксперимента путем выбора наиболее информативных и помехоустойчивых элементов электромагнитного поля.

В настоящей работе рассматриваются основные классы моделей среды и источников, возникающих в теории электромагнитного каротажа. Дается математическая постановка соответствующих электродинамических задач и развивается единый метод их численного исследования, который заключается в сведении электродинамической задачи к интегральным уравнениям. Имеется обзор исследований, выполненных в последнее время [1—20].

Теория электромагнитного каротажа имеет свою систему моделей, в рамках которых исследуется влияние различных параметров геоэлектрического разреза на электромагнитное поле в скважине. Эта система моделей не является неизменной. Применение современных ЭВМ и развитие методов численного анализа позволило успешно подойти к исследованию таких классов математических моделей, которые ранее считались совершенно недоступными для аналитических методов. Естественно, что эволюция моделей идет от простых (с малым числом параметров) моделей к сложным (многопараметрическим). Однако математическое описание геофизических явлений уже предполагает их идеализацию, а потому модель не может быть адекватной самому явлению. Выбор класса моделей существенно зависит от уровня развития численных методов, применяемых технических средств

(ЭВМ), а также от целей математического моделирования. Рассмотрим основные классы моделей в теории электромагнитного каротажа.

Предварительно заметим, что теория электромагнитного каротажа основана на анализе граничных задач электродинамики в неоднородных сплошных средах. Поэтому в основе описания процесса распространения электромагнитных полей для всех классов моделей лежат уравнения Максвелла.

Пусть электромагнитные свойства среды характеризуются параметрами $\sigma(M)$, $\varepsilon(M)$, $\mu(M)$, — электропроводностью, диэлектрической и магнитной проницаемостью соответственно, $M(x, y, z)$ — точка пространства. Для изотропных сред и гармонических во времени полей (зависимость типа $\exp(-i\omega t)$) эти уравнения в точках, свободных от сторонних источников, имеют вид

$$\operatorname{rot} \bar{E}(M) = i \omega \mu(M) \cdot \bar{H}(M), \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \bar{H}(M) = \gamma(M) \cdot \bar{E}(M), \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mu(M) \cdot \bar{H}(M) = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \gamma(M) \cdot \bar{E}(M) = 0, \quad (4)$$

где $\gamma(M) = \sigma(M) - i\omega\varepsilon(M)$ — комплексная проводимость среды, ω — циклическая частота колебаний, а $\bar{E}(M)$ и $\bar{H}(M)$ — векторы электрической и магнитной напряженности. На поверхностях разрыва параметров среды выполнены условия сопряжения для векторов \bar{E} и \bar{H} вида

$$[E_{\tau}] = 0; [H_{\tau}] = 0, \quad (5)$$

что означает непрерывность касательных к границам раздела сред компонент. На бесконечности выполнены условия убывания

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \bar{E} = 0; \lim_{R \rightarrow \infty} R \bar{H} = 0, \quad (6)$$

где $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Наличие в некоторых точках сторонних источников будем учитывать условиями возбуждения.

Модели источников возбуждения. Рассмотрим вначале модели источников, возбуждающих электромагнитное поле. При изучении разреза, пройденного скважиной, используют электромагнитные поля, создаваемые некоторыми типами источников. Обычно реальным источником поля является генераторная катушка (система катушек) с переменным током. В качестве приемника также берут катушку (систему катушек), расположенную соосно с генераторной. При наиболее распространенном способе возбуждения оси катушек совпадают с воображаемой линией — осью скважины (имеются и другие способы возбуждения, о чем будет сказано ниже). Так как размеры катушки много меньше расстояний, на которых измеряется электромагнитное поле, то целесообразно заменить ее моделью точечного источника электромагнитного поля — диполем. Аналогично приемная катушка моделируется просто

точкой на оси скважины. Поле реального источника можно вычислить, пользуясь принципом суперпозиции. Будем считать еще, что источник и приемник расположены на оси скважины. Смещение источника с оси скважины порождает специальный класс математических моделей.

В практике электромагнитного каротажа широко применяются многокатушечные измерительные системы. Число катушек, их взаимное расположение, частота и другие параметры подбираются так, чтобы обеспечить оптимальные характеристики и высокую помехоустойчивость измерительной установки. В качестве модели многокатушечной измерительной установки будем выбирать систему осевых дипольных источников. Для анализа электромагнитных полей многокатушечных систем воспользуемся принципом суперпозиции полей. Поэтому модель с дипольным источником является основной. Итак, всюду в дальнейшем считается, что источники электромагнитного поля — диполи.

Рассмотрим модели среды. Так как векторы электромагнитного поля связаны уравнениями Максвелла, то выбор модели означает задание коэффициентов $\mu(M)$ и $\epsilon(M)$ в уравнениях (1) — (4). При этом размерность рассматриваемой модели определяется числом переменных, от которых зависят эти коэффициенты. Для цилиндрической системы координат, связанной с осью скважины (OZ-ось скважины), — это координаты точки ρ, φ, z .

1. Одномерные модели. Первый тип моделей из этого класса возникает в том случае, если электромагнитные параметры пород вблизи скважины являются кусочно-дифференцируемыми функциями координаты z (OZ-ось скважины), а влиянием самой скважины можно пренебречь. Тогда типичной моделью геоэлектрического разреза является модель горизонтальной слоистой среды. Простейшей и наиболее исследованной моделью из этого класса является модель пласта конечной мощности в однородной вмещающей среде, а более сложной — модель пачки пластов в однородной вмещающей среде.

Другой тип одномерных моделей позволяет изучить, если это необходимо, влияние скважины. В классе одномерных моделей это возможно сделать, лишь считая, что мощность пласта бесконечно велика. При этом электромагнитные параметры пород вблизи скважины описываются кусочно-дифференцируемыми функциями координаты ρ . Тогда достаточно типичной является модель цилиндрической слоистой среды. Здесь простейшими и наиболее исследованными моделями являются модели: скважина — пласт бесконечной мощности и скважина — зона проникновения — пласт бесконечной мощности, а более сложной — модель пачки цилиндрических пластов в однородной вмещающей среде.

Методы решения краевых задач для одномерных моделей достаточно полно разработаны. Задача (1) — (6), с учетом одномерности среды, значительно упрощается и может быть решена методом интегральных преобразований. При этом для плоскопарал-

лельной среды применяется преобразование Ханкеля (по координате ρ), а для цилиндрической слоистой среды — преобразование Фурье (по координате z). Образы искомого компонента полей удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям и для кусочно-постоянных параметров выписываются в явном виде (рекуррентно). Интегрируя найденные решения по параметру интегрального преобразования, получаем искомые компоненты полей.

Численный анализ одномерных моделей позволяет исследовать влияние пород и измерительной установки на результирующее электромагнитное поле в скважине. Однако ряд важнейших факторов требует рассмотрения более общих моделей геоэлектрического разреза.

II. Двумерные модели. Этот класс моделей возникает в том случае, если электромагнитные параметры пород вблизи скважины не зависят от азимутальной координаты φ . Наиболее простыми и изученными моделями этого класса являются модели скважина — пласт конечной мощности и скважина — пласт конечной мощности — зона проникновения. Класс двумерных моделей чрезвычайно широк и включает в себя класс одномерных моделей. В рамках этого класса можно исследовать взаимодействие и влияние важнейших параметров геоэлектрического разреза, а также обоснованно выбирать оптимальные размеры измерительных установок.

Решение электродинамической задачи (1) — (6) для двумерной модели сводится к скалярной задаче [1] в полуплоскости $\{\varphi=0; \rho \geq 0; -\infty < z < \infty\}$. Для этого необходимо переписать уравнения (1) — (2) в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) с учетом независимости от азимутальной координаты ($\partial/\partial\varphi \equiv 0$). Соответствующая система уравнений распадается на две независимые подсистемы для компонент E_φ, H_ρ, H_z и H_φ, E_ρ, E_z . Тогда любое осесимметричное поле представляется в виде суперпозиции полей двух типов: E -поляризованного поля:

$$H_\rho = \frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial E_\varphi}{\partial z}; \quad H_z = -\frac{i}{\omega\mu\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} (\rho E_\varphi), \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho} \left[\frac{1}{\mu\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} (\rho E_\varphi) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right) + i\omega\mu\gamma E_\varphi = 0 \quad (8)$$

и H -поляризованного поля:

$$E_\varphi = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial H_\rho}{\partial z}; \quad E_z = \frac{1}{\gamma\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} (\rho H_\rho), \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho} \left[\frac{1}{\gamma\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} (\rho H_\rho) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\partial H_\rho}{\partial z} \right) + i\omega\mu H_\rho = 0. \quad (10)$$

На линиях разрыва электромагнитных параметров азимутальные компоненты векторов удовлетворяют граничным условиям

$$[E_\varphi]_\Gamma = 0; \left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_\varphi}{\partial n} \right] + \left[\frac{1}{\mu} \right] \cdot E_\varphi \frac{\cos(\widehat{n\rho})}{\rho} = 0, \quad (11)$$

$$[H_\varphi]_\Gamma = 0; \left[\frac{1}{\gamma} \frac{\partial H_\varphi}{\partial n} \right] + \left[\frac{1}{\gamma} \right] \cdot H_\varphi \frac{\cos(\widehat{n\rho})}{\rho} = 0 \quad (12)$$

на бесконечности убывают в соответствии с (6), а на линии $\rho=0$ выполнены условия

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} E_\varphi = 0; \lim_{\rho \rightarrow 0} H_\varphi = 0. \quad (13)$$

Таким образом, чтобы найти осесимметричное поле, необходимо решить в полуплоскости задачи (8), (11), (13) или (10), (12), (13) для азимутальных компонент полей E_φ и H_φ с дополнительными условиями возбуждения.

Интегральное представление. В основе сведения граничных задач для азимутальных компонент поля к интегральным уравнениям лежит возможность построения интегрального представления решений дифференциальных уравнений (8), (10) и фундаментальных решений дифференциального уравнения (14) при заданной зависимости параметра r от переменных ρ и z . Эти уравнения являются частным случаем дифференциального уравнения второго порядка для функции $U(M) = E_\varphi$ (или H_φ). Не ограничивая общности, можно считать, что электромагнитные параметры среды μ (или γ) являются постоянными в рассматриваемой области на полуплоскости. Тогда это уравнение принимает вид

$$L(U) = \Delta U + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \left(k^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) U = 0, \quad (14)$$

а сопряженное к нему

$$M(V) = \Delta V - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + k^2 V = 0. \quad (15)$$

Применяя теперь формулу Гаусса—Остроградского по области Ω , ограниченной достаточно гладким контуром Γ , получим представление

$$U(p) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \left\{ G(p, q) \frac{\partial U}{\partial n_q} - u \frac{\partial G(p, q)}{\partial n_q} \right\} dl_q + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \left\{ \frac{1}{\rho} \cos(\widehat{n\rho}) \cdot U(q) \cdot G(p, q) \right\} dl_q - \frac{1}{4\pi} \int_\Omega G(p, q) \cdot f(q) dq, \quad (16)$$

где $G(p, q)$ — фундаментальное решение уравнения (14) для некоторых основных моделей в электромагнитном каротаже.

Фундаментальное решение. Основными моделями, которые нас интересуют в связи с построением фундаментальных решений, являются модели: однородной, плоско параллельной и цилиндрической слоистой сред. Выбор модели задает зависимость параметра

k от переменных ρ и z в уравнениях (14) и (15). Для этой зависимости и строится фундаментальное решение.

Искомая функция G двух точек $p(\rho_0, z_0)$ и $q(\rho, z)$ полуплоскости $\Pi\{\varphi=0, \rho \geq 0, -\infty < z < \infty\}$ удовлетворяет по координатам точки p уравнению (14), а по координатам точки q — сопряженному уравнению (15). При совпадении аргументов обеих точек функция имеет логарифмическую особенность, на линии $\rho=0$ выполнены соотношения $G \sim O(\rho^2)$ при $\rho \rightarrow 0$; $G \sim O(\rho_0)$ при $\rho_0 \rightarrow 0$. На бесконечности удовлетворяет условию $(r^2 = \rho^2 + z^2)$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \cdot G(p, q) = 0.$$

Для перечисленных основных моделей электромагнитного каротажа фундаментальные решения построены в явном виде [17]: для однородной среды $(R^2 = \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \varphi + (z - z_0)^2)$

$$G(p, q) = \rho \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \cdot \cos \varphi d\varphi; \quad (17)$$

для горизонтальной слоистой среды

$$G(p, q) = \rho \int_0^\infty J_1(\lambda\rho) \cdot J_1(\lambda\rho_0) \cdot g(\lambda, z, z_0) \cdot \lambda d\lambda; \quad (18)$$

для цилиндрической слоистой среды

$$G(p, q) = \rho \int_0^\infty g(\lambda, \rho, \rho_0) \cdot \cos \lambda(z - z_0) d\lambda \quad (19)$$

Причем для построения в явном виде функций (18) и (19) достаточно решить граничные задачи для функции g , удовлетворяющей обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с дополнительными условиями, на оси OZ (либо на оси $O\rho$ при $\varphi=0$).

Используя интегральное представление (16) и фундаментальные решения (17—19), получим интегральные уравнения для одной из основных моделей в теории электромагнитного каротажа из класса осесимметричных моделей. Это модель скважина — зона проникновения — пласт конечной мощности (рис. 1). При выводе уравнений будем считать, что электромагнитное поле в среде возбуждается си-

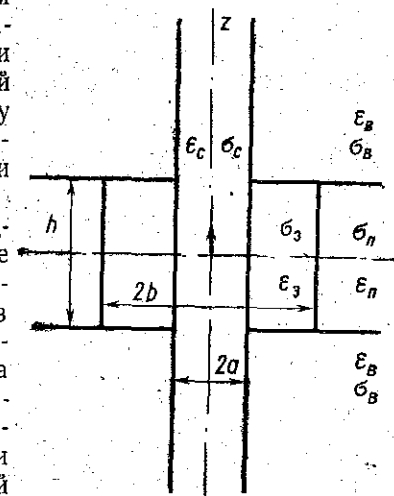


Рис. 1

стемой источников магнитного типа (магнитные диполи, ориентированные вдоль оси скважины OZ). Целенаправленно можно получить уравнения различной размерности.

Двумерные уравнения. Получим уравнения по плоской области Ω — скважина (Ω_c) и зона проникновения (Ω_a) в полуплоскости $\Pi\{\varphi=0, \rho \geq 0, -\infty < z < \infty\}$. Компонента E_φ согласно (8) удовлетворяет в плоскости уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\varphi) \right] + \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2} + i \omega \mu \cdot \sigma(M) \cdot E_\varphi = -i \omega \mu \cdot j_\varphi, \quad (20)$$

где j_φ — плотность сторонних источников, а

$$\sigma(M) = \begin{cases} \sigma_c, & \text{если } M \in \Omega_c, \\ \sigma_a, & \text{если } M \in \Omega_a, \\ \sigma_{cl}, & \text{если } M \in \Omega_s = \Omega_c + \Omega_a. \end{cases}$$

На границах разрыва $\sigma(M)$ компонента E_φ непрерывна вместе со своей нормальной производной, а при $r \rightarrow \infty \lim r E_\varphi = 0$. Используя фундаментальное решение $G(p, q)$ для горизонтальной слоистой среды (18), запишем для E_φ интегральное представление (16) в области Ω и вне ее, а затем сложим. Помещая точку p в область Ω , получим интегральное уравнение

$$E_\varphi(p) = \frac{(k_s^2 - k_{cl}^2)}{4\pi} \iint_{\Omega_s} G(p, q) \cdot E_\varphi(q) ds_q + \frac{(k_c^2 - k_{cl}^2)}{4\pi} \iint_{\Omega_c} G(p, q) \cdot E_\varphi(q) ds_q + E_\varphi^0(p), \quad (21)$$

где

$$G(p, q) = \rho \int_0^\infty J_1(\lambda \rho) \cdot J_1(\lambda \rho_0) \cdot g(\lambda, z, z_0) \cdot \lambda d\lambda \quad (22)$$

фундаментальная функция плоскопараллельной среды, а

$$E_\varphi^0(p) = \frac{i \omega \mu}{4\pi} \iint_{\Omega} j_\varphi(q) \cdot G(p, q) ds_q \quad (23)$$

азимутальная компонента вектора напряженности \vec{E} , создаваемая системой источников в плоскопараллельной слоистой среде в отсутствие скважины.

Если решение уравнения (21) найдено, то компонента $E_\varphi(M_0)$ определяется в любой точке M_0 с помощью интегрального представления (16), а компоненты магнитного поля $\vec{H} \{H_\rho, 0, H_z\}$ определяются из уравнений Максвелла (1) — (2).

Обычно интересуются вертикальной компонентой H_z напряженности магнитного поля \vec{H} :

$$H_z(\rho_0, z_0) = \frac{1}{i \omega \mu \rho_0} \frac{\partial}{\partial \rho_0} (\rho_0 E_\varphi(p)) + \frac{(\sigma_c - \sigma_{cl})}{4\pi} \iint_{\Omega_c} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \rho_0} (\rho_0 G(p, q)) \cdot E_\varphi(q) ds_q + \frac{(\sigma_a - \sigma_{cl})}{4\pi} \iint_{\Omega_a} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \rho_0} (\rho_0 G(p, q)) \cdot E_\varphi(q) ds_q, \quad (24)$$

Используя явное представление для $G(p, q)$, можно из (24) найти значение компоненты H_z на оси скважины при $\rho_0 = 0$

$$H_z(0, z_0) = H_z^{cl}(0, z_0) + \frac{(\sigma_c - \sigma_{cl})}{4\pi} \iint_{\Omega_c} I(\rho, z, z_0) \cdot E_\varphi(\rho, z) \cdot \rho d\rho dz + \frac{(\sigma_a - \sigma_{cl})}{4\pi} \iint_{\Omega_a} I(\rho, z, z_0) \cdot E_\varphi(\rho, z) \cdot \rho d\rho dz, \quad (25)$$

где

$$I(\rho, z, z_0) = \int_0^\infty J_1(\lambda \rho) \cdot \Psi(z, z_0, \lambda) d\lambda. \quad (26)$$

Как видно из выражений (25), вертикальная компонента вектора \vec{H} представляется в виде суммы трех слагаемых. Одно из которых есть компонента H_z в горизонтально-слоистой среде, а два других — возникают из-за наличия скважины и зоны проникновения. Заметим, что подобный метод был использован в [10, 15, 16].

Одномерные уравнения. Сведем теперь граничную задачу для уравнения (20) к системе одномерных интегральных уравнений по контуру L области Ω . Полуплоскость $\Pi\{\varphi=0, \rho \geq 0, -\infty < z < \infty\}$ линиями $L_1 \{\rho \geq 0, z = H/2\}$ и $L_2 \{\rho \geq 0, z = -H/2\}$ разбивается на три области: $\Omega_1 \{\rho \geq 0, z > H/2\}$; $\Omega_2 \{\rho \geq 0, -H/2 < z < H/2\}$; $\Omega_3 \{\rho \geq 0, z < -H/2\}$. Рассмотрим параметр $\gamma(M) = \sigma(M) - i \omega \varepsilon(M)$ отдельно в каждой из областей разбиения и доопределим этот параметр на всю полуплоскость. Результат доопределения в всех трех областях имеет вид

$$\gamma_I = \begin{cases} \gamma_c & \text{при } \rho < a, \\ \gamma_1 & \text{при } \rho > a, \end{cases} \quad \gamma_{II} = \begin{cases} \gamma_c & \text{при } \rho < a, \\ \gamma_a & \text{при } a < \rho < b, \\ \gamma_{cl} & \text{при } \rho > b, \end{cases} \quad \gamma_{III} = \begin{cases} \gamma_c & \text{при } \rho < a, \\ \gamma_2 & \text{при } \rho > a. \end{cases}$$

Каждая из трех областей представляет собой цилиндрическую слоистую среду, и для каждой из них построим фундаментальное решение (19).

Запишем теперь интегральное представление (16) в каждой из трех областей с соответствующими фундаментальными функциями. Сложив полученные равенства, получим представление $E_\Phi(M_0)$ во всей полуплоскости $\Pi\{\rho_0 > 0, -\infty < z_0 < \infty, z_0 \neq H/2\}$. Ядра интегральных операторов в этом представлении представляют разности соответствующих фундаментальных решений и являются регулярными функциями точки M_0 . Представление для E_Φ допускает операцию дифференцирования по нормали к линиям L_1 и L_2 под знаком интеграла, что дает нам второе представление для нормальной производной $\partial E_\Phi / \partial n_0$. Опуская точку M_0 последовательно на L_1 и L_2 , придем к системе одномерных интегральных уравнений

$$\bar{E}_\Phi(\rho_0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \hat{K}(\rho, \rho_0) \cdot \bar{E}_\Phi(\rho) \cdot d\rho - \frac{1}{4\pi} \bar{E}_\Phi^{0i}(\rho_0), \quad (27)$$

где матрицы ядер

$$\hat{K}(\rho, \rho_0) = \begin{pmatrix} \hat{K}_{21}\left(\rho, \rho_0, z = \frac{H}{2}, z_0 = \frac{H}{2}\right); \hat{K}_{32}\left(\rho, \rho_0, z = \frac{H}{2}, z_0 = \frac{H}{2}\right) \\ \hat{K}_{21}\left(\rho, \rho_0, z = \frac{H}{2}, z_0 = -\frac{H}{2}\right); \hat{K}_{32}\left(\rho, \rho_0, z = -\frac{H}{2}, z_0 = -\frac{H}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$\hat{K}_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial z} (G_i - G_j); & (G_i - G_j) \\ -\frac{\partial^2}{\partial z \partial z_0} (G_i - G_j); & \frac{\partial}{\partial z_0} (G_i - G_j) \end{pmatrix} \quad (29)$$

а векторы искомой функции и правой части

$$\bar{E}_\Phi = \begin{pmatrix} E_\Phi^1 \\ \frac{\partial E_\Phi^1}{\partial z} \\ E_\Phi^2 \\ \frac{\partial E_\Phi^2}{\partial z} \end{pmatrix}; \quad \bar{E}_\Phi^{0i} = \begin{pmatrix} E_\Phi^{0i}\left(z = \frac{H}{2}\right) \\ \frac{\partial E_\Phi^{0i}}{\partial z}\left(z = \frac{H}{2}\right) \\ E_\Phi^{0i}\left(z = -\frac{H}{2}\right) \\ \frac{\partial E_\Phi^{0i}}{\partial z}\left(z = -\frac{H}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (30)$$

Таким образом, задача для рассматриваемой модели сведена к системе четырех одномерных интегральных уравнений на полу-

прямой. Заметим, что подобный подход рассмотрен в работах [2, 5, 6, 8, 9, 12, 18].

В общем случае для анализа рассматриваемой модели необходимо численно решать интегральные уравнения (21) или (27). Общий подход состоит в замене интегралов конечной суммой и сведению интегрального уравнения к системе линейных алгебраических уравнений — прямые методы. Но численная реализация на этом пути встречает значительные трудности. В силу размерности и числа уравнений, а также неограниченности области системы алгебраических уравнений будут очень высокого порядка. Подобная ситуация имеет место как в низкочастотном (индукционном), так и в высокочастотном диапазонах. Но в низкочастотном диапазоне при определенных условиях возможно применение метода последовательных приближений [16].

Метод последовательных приближений. Перепишем (21) в виде операторного уравнения (u — неизвестная, а f — заданная функция):

$$u + Ku = f, \quad (31)$$

где K — интегральный оператор, порожденный ядром $G(p, q)$ в соответствующем пространстве функций. Если норма интегрального оператора $\|K\| < 1$, то существует ограниченный обратный оператор $(E + K)^{-1}$, и решение интегрального уравнения получается

в виде ряда последовательных приближений $u = \sum_{i=0}^{\infty} f \cdot K^i$. При

этом скорость сходимости существенно зависит от величины нормы оператора, а разность между точным решением и n -м приближением к нему имеет оценку

$$\|u - u_n\| \leq \frac{\|K\|^n \cdot \|f\|}{1 - \|K\|}.$$

Таким образом, следует оценить нормы интегральных операторов в уравнении (21).

Оценка нормы. Оценим величину нормы в пространстве непрерывных функций $C(S)$ в соответствии с определением

$$\|K\| = \max_{M_0 \in S} \iint_S |K(M, M_0)| ds_M. \quad (32)$$

Для уравнения (21) имеем

$$\begin{aligned} \|K_1\| &= \max_{\rho \in \Omega_3} \iint_{\Omega_3} |G(p, q)| ds_q \leq \\ &\leq \frac{\omega\mu}{4\pi} \max_{\rho \in \Omega_3} |\sigma_a - \sigma_{cл}| \iint_{\Omega_3} |G(p, q)| ds_q, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\|K_2\| = \max_{\rho \in \Omega_c} \iint_{\Omega_c} |G(\rho, q)| ds_q \ll$$

$$\ll \frac{\omega\mu}{4\pi} \max_{\rho \in \Omega_c} |\sigma_c - \sigma_{сн}| \iint_{\Omega_c} |G(\rho, q)| ds_q. \quad (34)$$

При оценке нормы оператора $\|K_2\|$ основная трудность заключается в неограниченности области интегрирования Ω_c ($-\infty < z < \infty$). Соответствующая оценка $\|K_2\|$ для случая однородной среды $\sigma_{сн}(z) = \sigma_B$, вмещающей скважину, приводится в [1]. Ее величина оценивается как

$$\|K_2\| \ll \frac{\omega\mu}{4\pi} |\sigma_c - \sigma_B| \max_{\rho \in \Omega_c} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} \rho d\rho \cdot \left| \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik_B R \rho q}}{R \rho q} \cos \varphi d\varphi \right|. \quad (35)$$

Подробные вычисления дают при этом зависимость от параметров модели следующим образом:

$$\|K_2\| \ll 2 \left| 1 - \frac{\sigma_c}{\sigma_B} \right| \alpha \left\{ 2 \int_0^{\infty} \mathcal{H}_0(x) dx + \frac{1}{\alpha} - \mathcal{H}_1(\alpha) \right\} \quad (36)$$

где \mathcal{H}_0 и \mathcal{H}_1 — функции Макдональда нулевого и первого порядка $\alpha = \frac{a k_B}{\sqrt{2}}$. Параметр α характеризует относительные размеры скважины по отношению к длине волны во вмещающей среде. При $\alpha \rightarrow 0$ норма оператора $\|K_2\|$ также стремится к нулю, если частота стремится к нулю. Это говорит о принципиальной возможности применения метода последовательных приближений при определенных параметрах модели, несмотря на неограниченную область интегрирования Ω_c .

Оценки норм операторов $\|K_1\|$ и $\|K_2\|$ для рассматриваемой модели получаются аналогичным образом. Используя полученные оценки, можно определить область изменения параметров модели, для которых достаточно лишь первого приближения в решении интегрального уравнения (21). Выпишем теперь выражение для вертикальной компоненты H_z , считая, что диапазон параметров модели таков, что решение уравнения (21) получается методом последовательных приближений и достаточно лишь первого. Тогда решение уравнения (21)

$$E_{\varphi}^{(1)}(M_0) = E_{\varphi}^{сн}(M_0) + \frac{(k_c^2 - k_{сн}^2)}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^a G(M, M_0) \cdot E_{\varphi}^{сн}(M) d\rho dz +$$

$$+ \frac{(k_s^2 - k_{сн}^2)}{4\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_a^b G(M, M_0) \cdot E_{\varphi}^{сн}(M) d\rho dz. \quad (37)$$

Подставив выражения (37) для E_{φ} в (24), получим первое приближение для вертикальной компоненты H_z напряженности магнитного поля \vec{H} на оси скважины OZ ($\rho_0 = 0$):

$$H_z^{(1)}(z_0) = H_z^{сн}(z_0) + \frac{(k_c^2 - k_{сн}^2)}{8} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} I_{\rho c}(\rho, \varphi) \cdot I(\rho, \varphi, z_0) \cdot a \rho^4 d\varphi d\rho +$$

$$+ \frac{(k_s^2 - k_{сн}^2)}{8} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} I_{\rho s}(\rho, \varphi) \cdot I(\rho, \varphi, z_0) \cdot \rho^4 d\varphi d\rho, \quad (38)$$

где $H_z^{сн}$ — вертикальная компонента напряженности магнитного поля \vec{H} в горизонтально-слоистой среде,

$$I_{\rho c} = [\sin \varphi \cdot J_1(a \rho \cos \varphi) \cdot J_0(a \rho \sin \varphi) -$$

$$- \cos \varphi \cdot J_0(a \rho \cos \varphi) \cdot J_1(a \rho \sin \varphi)];$$

$$I_{\rho s} = \{ b [\sin \varphi J_1(b \rho \cos \varphi) \cdot J_0(b \rho \sin \varphi) -$$

$$- \cos \varphi \cdot J_0(b \rho \cos \varphi) \cdot J_1(b \rho \sin \varphi)] -$$

$$- a [\sin \varphi J_1(a \rho \cos \varphi) \cdot J_0(a \rho \sin \varphi) - \cos \varphi J_0(a \rho \cos \varphi) \cdot J_1(a \rho \sin \varphi)];$$

а $I(\rho, \varphi, z_0)$ — результат интегрирования фундаментальной функции горизонтально-слоистой среды.

Метод последовательных приближений в рамках класса двумерных математических моделей дает удобный способ исследования важнейших факторов геоэлектрического разреза — скважины, зоны проникновения, пластов конечной мощности.

Тем не менее класс осесимметричных двумерных моделей не позволяет исследовать ряд важных факторов, которые могут возникнуть в реальной ситуации. В качестве таких факторов прежде всего следует указать смещение измерительной установки с оси скважины и возбуждение неосевым диполем или наклонное расположение оси скважины к пластам конечной мощности. В этих случаях приходим к необходимости исследования трехмерных моделей среды.

Следует заметить, что при возбуждении электромагнитного поля не осевым источником соответствующая модель среды остается осесимметричной и двумерной, т. е. трехмерность модели связана только со способом возбуждения электромагнитного поля (рис. 2 и 3).

III. Трехмерные модели. Эти модели образуют наиболее общий и сложный класс моделей среды. Электромагнитное поле в них зависит от трех переменных — координат x, y, z . Граничная зада-

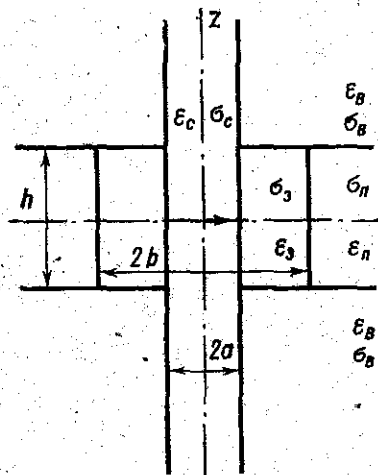


Рис. 2

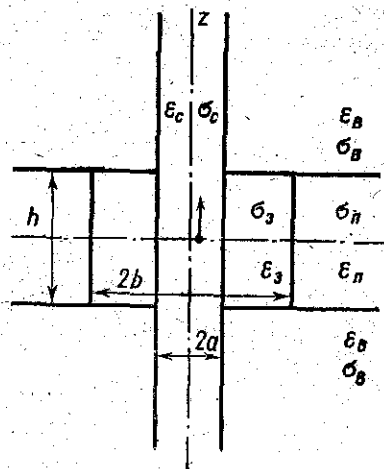


Рис. 3

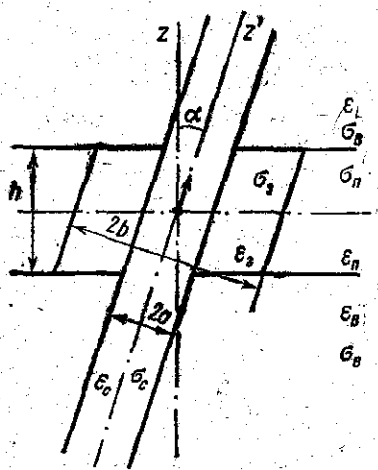


Рис. 4

ча (1)–(6) для уравнений Максвелла может быть сведена к интегральному уравнению. Как и в случае осесимметричных моделей, возможно получение различных интегральных уравнений. Рассмотрим, например, редукцию граничной задачи к интегральному уравнению по области, занимаемой скважиной, относительно вектора \vec{E} электрической напряженности (рис. 4).

При выводе интегрального уравнения основную роль играет векторная формула Грина [4]. При этом рассматривается магнитооднородная среда, что существенно для интегральных уравнений рассматриваемого типа.

При совместном решении уравнений (1)–(2) для вектора напряженности электрического поля \vec{E} получается следующее уравнение (в точках, где отсутствуют источники поля):

$$\text{rot rot } \vec{E}(M) = k^2(M) \cdot \vec{E}(M), \quad (39)$$

где $k^2(M) = i\omega\mu \cdot \gamma(M)$ — квадрат волнового числа среды. Представим вектор напряженности электрического поля \vec{E} в виде $\vec{E} = \vec{E}_H + \vec{E}_a$, аналогично $k^2(M) = k_H^2 + k_a^2$. Напряженность нормального электрического поля \vec{E}_H описывает поле в горизонтальной — слоистой среде без скважины и удовлетворяет уравнению

$$\text{rot rot } \vec{E}_H - k_H^2 \cdot \vec{E}_H = 0. \quad (40)$$

Аномальное поле \vec{E}_a учитывает присутствие скважины и удовлетворяет уравнению

$$\text{rot rot } \vec{E}_a - k_a^2 \vec{E}_a = k_a^2 \vec{E}, \quad (41)$$

где аномальный ток $\vec{j}_a = k_a^2 \cdot \vec{E}$ отличен от нуля лишь в скважине. Методы нахождения поля \vec{E}_H в горизонтальной слоистой среде известны. Аномальное поле \vec{E}_a будем искать методом функций Грина, которая должна быть тензором второго ранга.

Введем функцию $\hat{G}(M, M_0)$ декартовых координат двух точек $M(x, y, z)$ и $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Представим ее в виде диадного произведения трех векторов \vec{G}_p :

$$\hat{G}(M, M_0) = \sum_{p=1}^3 \vec{e}_p \cdot \vec{G}_p(M, M_0) = \sum_{m,n=1}^3 \vec{e}_m \cdot \vec{e}_n \cdot G_{mn}(M, M_0), \quad (42)$$

которые удовлетворяют уравнению

$$\text{rot rot } \vec{G}_p - k_a^2 \vec{G}_p = \vec{e}_p \cdot \delta(M, M_0), \quad (43)$$

где \vec{e}_p — единичный вектор, а $\delta(M, M_0)$ — дельта-функция. На горизонтальных границах раздела сред функция Грина удовлетворяет граничным условиям

$$[(\vec{G}_p)_{\tau}] = 0; [(\text{rot } \vec{G}_p)_{\tau}] = 0, \quad (44)$$

а на бесконечности убывает как

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \cdot \vec{G}_p = 0.$$

Элементы тензора G_{mn} допускают простую физическую интерпретацию: $G_{mn}(M, M_0)$ — m -я компонента вектора \vec{E}_a в точке M от единичного электрического диполя, находящегося в точке M_0 и ориентированного в n -м направлении. Очевидно, что

$$G_{mn}(M, M_0) = G_{nm}(M_0, M).$$

Интегральная форма уравнения (41) требует явного представления элементов тензора Грина.

Из уравнения (43) видно, что требуется построить тензор Грина для горизонтальной слоистой модели среды, т. е. необходимо вычислять напряженность электрического поля \vec{E} для электричес-

ких диполей произвольной ориентации. Само построение полей выполняется с помощью векторного потенциала \bar{A} . Для произвольного числа горизонтальных границ строится фундаментальная функция слоистой среды, используя которую можно выписать компоненты тензора \bar{G} в явном виде. Общий вид элементов тензора представлен в работе [20]. Для вывода уравнения воспользуемся векторной теоремой Грина:

$$\int_A \{\bar{F} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{N} - \bar{N} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{F}\} d\bar{A} = \oint_{\Sigma} \{[\bar{n} \bar{N}] \operatorname{rot} \bar{F} - [\bar{n} \bar{F}] \operatorname{rot} \bar{N}\} d\sigma. \quad (45)$$

Тождество (45) применим к вектору аномального электрического поля $\bar{E}_a(M)$ и вектору-столбцу тензора Грина $\bar{G}_p(M, M_0)$. Для этого умножим уравнение (41) на вектор \bar{G}_p , а уравнение (43) на вектор \bar{E}_a и вычтем одно из другого.

Полученный результат проинтегрируем по объему, ограниченному сферой S_R . При $R \rightarrow \infty$ получаем интегральное уравнение для p -й компоненты электрического поля ($p=1, 2, 3$). Сложив все три компоненты и переходя к полному полю, получаем уравнение

$$\bar{E}(M_0) = \bar{E}_n(M_0) + (k^2(M) - k_n^2) \int_V \bar{G}(M, M_0) \cdot \bar{E}(M) dV_M, \quad (46)$$

где \bar{E}_n — напряженность электрического поля в горизонтальной слоистой среде без скважины.

Отметим, что интегралы в уравнении (46) есть линейные комбинации объемного потенциала, его 1-й и 2-й производных. При совпадении аргументов ($M=M_0$) подынтегральные функции имеют особенность $R^{-\alpha}$ ($\alpha=1+3$). Для второй производной объемного потенциала соответствующий интеграл является сингулярным, который существует в смысле главного значения по Коши. Вторая производная объемного потенциала в соответствующем пространстве функций порождает непрерывный оператор. Так как этот оператор имеет постоянный множитель, пропорциональный разности квадратов волновых чисел скважины и слоистой среды, то при $\omega \rightarrow 0$ норма этого оператора стремится к нулю. Поэтому в индукционном диапазоне имеется принципиальная возможность применения к уравнению (46) метода последовательных приближений.

Выпишем первое приближение вектора напряженности электрического поля \bar{E} :

$$\bar{E}(M_0) = \bar{E}_n(M_0) + (k^2(M) - k_n^2) \int_V \bar{G}(M, M_0) \cdot \bar{E}_n(M) dV_M. \quad (47)$$

После этого с помощью уравнений Максвелла может быть найдена напряженность магнитного поля \bar{H} :

$$\bar{H}(M_0) = H_n(M_0) + (\gamma(M) - \gamma_n) \int_V \bar{Q}(M, M_0) \cdot \bar{E}(M) dV_M, \quad (48)$$

В частности, вертикальная составляющая напряженности магнитного поля в скважине имеет вид

$$H_z(M_0) = H_{zn}(M_0) + (\gamma(M) - \gamma_n) \int_V \{Q_{zx} \cdot E_x + Q_{zy} \cdot E_y + Q_{zz} \cdot E_z\} dV_M, \quad (49)$$

где величины

$$Q_{zx} = \frac{\partial G_{yx}}{\partial x_0} - \frac{\partial G_{xx}}{\partial y_0}; \quad Q_{zy} = \frac{\partial G_{yy}}{\partial x_0} - \frac{\partial G_{xy}}{\partial y_0};$$

$$Q_{zz} = \frac{\partial G_{yx}}{\partial x_0} - \frac{\partial G_{xz}}{\partial y_0}.$$

Рассмотренный метод позволяет получить явные выражения для векторов электромагнитного поля в скважине и провести численный анализ влияния скважины на трехмерное поле.

Заметим, что возможен и другой подход к численному анализу трехмерных моделей, который заключается в редукции исходной задачи к интегральному уравнению по поверхности скважины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров Е. В. Математическое моделирование в электромагнитном каротаже. М., «Недра», 1979.
2. Захаров Е. В. Метод интегральных уравнений в задачах электромагнитного каротажа скважин.— В сб.: Электромагнитный каротаж неоднородных сред. М., Изд-во Моск. ун-та, 1973, с. 4—15.
3. Захаров Е. В. Метод расчета осесимметричных электромагнитных полей в неоднородных средах.— В сб.: Электромагнитный каротаж неоднородных сред. М., Изд-во Моск. ун-та, 1976, с. 4—12.
4. Захаров Е. В., Ильин И. В. Интегральные представления электромагнитных полей в неоднородной слоистой среде.— «Изв. АН СССР, физика Земли», 1970, № 8, с. 62—71.
5. Захаров Е. В., Ильин И. В. Расчет кривых профилирования индукционного каротажа для модели скважина — пласт конечной мощности.— В сб.: Электромагнитный каротаж неоднородных сред. М., Изд-во Моск. ун-та, 1973, с. 17—67.
6. Захаров Е. В., Ильин И. В. Расчет кривых профилирования высокочастотного электромагнитного каротажа для модели скважина — пласт конечной мощности.— В сб.: Электромагнитный каротаж неоднородных сред. М., Изд-во Моск. ун-та, 1976, с. 13—69.
7. Захаров Е. В., Ильин И. В. Расчет кривых профилирования индукционного каротажа для многокатушечных систем в модели скважина — пласт конечной мощности.— В сб.: Численные методы в геофизике, вып. 1. М., Изд-во Моск. ун-та, 1978, с. 74—92.
8. Захаров Е. В., Несмеянова Н. И. Метод расчета осесимметричного электромагнитного поля в задачах каротажа неоднородных сред.— «Изв. АН СССР, физика Земли», 1977, № 7, с. 75—81.
9. Захаров Е. В., Несмеянова Н. И. Метод решения осесимметричных задач электродинамики неоднородных сред.— В сб.: Вычислительные методы и программирование, вып. XXIV. М., Изд-во Моск. ун-та, 1975, с. 43—49.
10. Несмеянова Н. И. О методе численного решения задачи индукционного каротажа для модели пласт—зона проникновения.— В сб.: Численные методы в геофизике, вып. 1. М., Изд-во Моск. ун-та, 1978, с. 93—101.

11. Дмитриев В. И., Захаров Е. В., Ильин И. В. О методе численного решения задачи индукционного каротажа в неоднородных средах.—Изв. АН СССР, физика Земли», 1972, № 2, с. 50—58.

12. Несмеянова Н. И. Решение прямой задачи теории электромагнитного каротажа для модели скважина—пласт с зоной проникновения.—В сб.: Электромагнитный каротаж неоднородных сред. М., Изд-во Моск. ун-та, 1976, с. 116—125.

13. Ильин И. В. О влиянии скважины на кривые профилирования высокочастотного электромагнитного каротажа.— В сб.: Электромагнитный каротаж неоднородных сред. М., Изд-во Моск. ун-та, 1976, с. 67—115.

14. Захаров Е. В., Ильин И. В. О численном решении задачи высокочастотного электромагнитного каротажа в неоднородных средах.—Изв. АН СССР, физика Земли», 1976, № 11, с. 44—51.

15. Несмеянова Н. И. Интегральные уравнения осесимметричных задач теории электромагнитного каротажа.— В сб.: Вычислительные методы и программирование, вып. XXVIII, М., Изд-во Моск. ун-та, 1978, с. 239—244.

16. Захаров Е. В., Несмеянова Н. И. К оценке влияния промежуточной зоны на результаты индукционного каротажа.— В сб.: Численные методы в геофизике, вып. 1, М., Изд-во Моск. ун-та, 1978, с. 25—30.

17. Несмеянова Н. И. О построении фундаментальных решений для некоторых осесимметричных задач электродинамики слоистых сред.— В сб.: Численные методы в геофизике, вып. 1, М., Изд-во Моск. ун-та, 1978, с. 42—51.

18. Захаров Е. В., Несмеянова Н. И. Метод решения осесимметричных задач дифракции электромагнитных полей.— «Журн. вычисл. матем. и мат. физики», 1978, т. 18, № 2, с. 512—516.

19. Ильин И. В. Исследование границ применимости некоторых приближенных теорий индукционного каротажа.— В сб.: Электромагнитный каротаж неоднородных сред. М., Изд-во Моск. ун-та, 1973, с. 68—94.

20. Захаров Е. В., Ильин И. В. Метод решения трехмерной задачи электромагнитного каротажа скважин.— В сб.: Численные методы в геофизике, вып. 1, М., Изд-во Моск. ун-та, 1978, с. 12—24.

В. И. ДМИТРИЕВ, Н. А. МЕРЩИКОВ,

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЗОНДИРОВАНИЙ
НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

В развитии электромагнитных методов разведочной геофизики большую роль играет математическое моделирование электромагнитных процессов в проводящей неоднородной среде. Простейшей моделью является горизонтально-слоистая среда. Однако многие задачи теории электромагнитных зондирований с учетом влияния поверхностных и глубинных неоднородностей среды не могут быть решены в рамках слоистой среды и требуют развития методов численных исследований моделей горизонтально-неоднородных сред. Одним из широко распространенных методов электромагнитных зондирований является магнитотеллурическое зондирование (МТЗ), использующее естественное электромагнитное поле Земли. Для развития методов интерпретации данных МТЗ, а также для оценки разрешающей способности этого метода важно

знать влияние неоднородности Земли на электромагнитное поле на поверхности Земли.

В связи с этим в Научно-исследовательском вычислительном центре Московского университета в течение последних нескольких лет проводятся исследования моделей двумерно-неоднородных сред в магнитотеллурическом зондировании, при этом широко используется метод интегральных уравнений. Изучение поля в двумерно-неоднородных средах позволяет проследить основные закономерности геоэлектрических процессов в неоднородной среде, сделать выводы о влиянии формы и размеров неоднородности на характеристики поля и тем самым подойти к анализу трехмерных неоднородностей, численное исследование которых весьма трудоемко.

Одним из важных классов рассматриваемых моделей являются двумерно-неоднородные среды, имеющие локальную неоднородность с границами параллельными осям координат, расположенную в плохо проводящем фундаменте трехслойного разреза, типичного для глубинного МТЗ. Задачи такого типа решались методом двумерных интегральных уравнений [1]. Вычислительный алгоритм, составленный на основе этого метода, и программа, реализующая этот алгоритм, позволили провести расчет магнитотеллурических полей для сред, моделирующих разломы земной коры [2], а также возможные неоднородности в астеносферном слое Земли [3].

Настоящая статья посвящена вычислительным аспектам метода, а именно оценке эффективности алгоритма, а также точности расчетов, проведенных по этому алгоритму. В начале остановимся коротко на общей постановке задачи и методе ее решения.

Рассмотрим горизонтально-неоднородную модель Земли, описываемую следующим распределением проводимости:

$$\sigma(y, z) = \begin{cases} \sigma_n(z) & \text{при } M \notin T, \\ \sigma_T(y, z) & \text{при } M \in T, \end{cases} \quad (1)$$

$\sigma_n(z)$ представляет проводимость слоисто-однородной среды, заданную кусочно-постоянной функцией

$$\sigma_n(z) = \begin{cases} \sigma_0 & \text{при } z < 0; \\ \sigma_n & \text{при } z_{n-1} < z < z_n; \quad n = 1, 2, \dots, N; \\ \infty & \text{при } z > z_N \end{cases} \quad (2)$$

$z_0 = 0$; $z_n - z_{n-1} = h_n$ (h_n — толщина n -го слоя). T — некоторая конечная двумерная область проводимости $\sigma_n(y, z)$, расположенная внутри произвольного слоя $z_{n-1} < z < z_n$ $n = 1, 2, \dots, N$.

Будем предполагать, что в воздухе находятся источники, создающие E -поляризованное гармонически изменяющееся во времени по закону $e^{-i\omega t}$ электромагнитное поле $\vec{E} = \{E_x, 0, 0\}$; $\vec{H} = \{0, H_y, H_z\}$.

11. Дмитриев В. И., Захаров Е. В., Ильин И. В. О методе численного решения задачи индукционного каротажа в неоднородных средах.—Изв. АН СССР, физика Земли», 1972, № 2, с. 50—58.

12. Несмеянова Н. И. Решение прямой задачи теории электромагнитного каротажа для модели скважина—пласт с зоной проникновения.—В сб.: Электромагнитный каротаж неоднородных сред. М., Изд-во Моск. ун-та, 1976, с. 116—125.

13. Ильин И. В. О влиянии скважины на кривые профилирования высокочастотного электромагнитного каротажа.— В сб.: Электромагнитный каротаж неоднородных сред. М., Изд-во Моск. ун-та, 1976, с. 67—115.

14. Захаров Е. В., Ильин И. В. О численном решении задачи высокочастотного электромагнитного каротажа в неоднородных средах.—Изв. АН СССР, физика Земли», 1976, № 11, с. 44—51.

15. Несмеянова Н. И. Интегральные уравнения осесимметричных задач теории электромагнитного каротажа.— В сб.: Вычислительные методы и программирование, вып. XXVIII, М., Изд-во Моск. ун-та, 1978, с. 239—244.

16. Захаров Е. В., Несмеянова Н. И. К оценке влияния промежуточной зоны на результаты индукционного каротажа.— В сб.: Численные методы в геофизике, вып. 1, М., Изд-во Моск. ун-та, 1978, с. 25—30.

17. Несмеянова Н. И. О построении фундаментальных решений для некоторых осесимметричных задач электродинамики слоистых сред.— В сб.: Численные методы в геофизике, вып. 1, М., Изд-во Моск. ун-та, 1978, с. 42—51.

18. Захаров Е. В., Несмеянова Н. И. Метод решения осесимметричных задач дифракции электромагнитных полей.— «Журн. вычисл. матем. и мат. физики», 1978, т. 18, № 2, с. 512—516.

19. Ильин И. В. Исследование границ применимости некоторых приближенных теорий индукционного каротажа.— В сб.: Электромагнитный каротаж неоднородных сред. М., Изд-во Моск. ун-та, 1973, с. 68—94.

20. Захаров Е. В., Ильин И. В. Метод решения трехмерной задачи электромагнитного каротажа скважин.— В сб.: Численные методы в геофизике, вып. 1, М., Изд-во Моск. ун-та, 1978, с. 12—24.

В. И. ДМИТРИЕВ, Н. А. МЕРЩИКОВ,

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЗОНДИРОВАНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

В развитии электромагнитных методов разведочной геофизики большую роль играет математическое моделирование электромагнитных процессов в проводящей неоднородной среде. Простейшей моделью является горизонтально-слоистая среда. Однако многие задачи теории электромагнитных зондирований с учетом влияния поверхностных и глубинных неоднородностей среды не могут быть решены в рамках слоистой среды и требуют развития методов численных исследований моделей горизонтально-неоднородных сред. Одним из широко распространенных методов электромагнитных зондирований является магнитотеллурическое зондирование (МТЗ), использующее естественное электромагнитное поле Земли. Для развития методов интерпретации данных МТЗ, а также для оценки разрешающей способности этого метода важно

знать влияние неоднородности Земли на электромагнитное поле на поверхности Земли.

В связи с этим в Научно-исследовательском вычислительном центре Московского университета в течение последних нескольких лет проводятся исследования моделей двумерно-неоднородных сред в магнитотеллурическом зондировании, при этом широко используется метод интегральных уравнений. Изучение поля в двумерно-неоднородных средах позволяет проследить основные закономерности геоэлектрических процессов в неоднородной среде, сделать выводы о влиянии формы и размеров неоднородности на характеристики поля и тем самым подойти к анализу трехмерных неоднородностей, численное исследование которых весьма трудоемко.

Одним из важных классов рассматриваемых моделей являются двумерно-неоднородные среды, имеющие локальную неоднородность с границами параллельными осям координат, расположенную в плохо проводящем фундаменте трехслойного разреза, типичного для глубинного МТЗ. Задачи такого типа решались методом двумерных интегральных уравнений [1]. Вычислительный алгоритм, составленный на основе этого метода, и программа, реализующая этот алгоритм, позволили провести расчет магнитотеллурических полей для сред, моделирующих разломы земной коры [2], а также возможные неоднородности в астеносферном слое Земли [3].

Настоящая статья посвящена вычислительным аспектам метода, а именно оценке эффективности алгоритма, а также точности расчетов, проведенных по этому алгоритму. В начале остановимся коротко на общей постановке задачи и методе ее решения.

Рассмотрим горизонтально-неоднородную модель Земли, описываемую следующим распределением проводимости:

$$\sigma(y, z) = \begin{cases} \sigma_n(z) & \text{при } M \notin T, \\ \sigma_T(y, z) & \text{при } M \in T, \end{cases} \quad (1)$$

$\sigma_n(z)$ представляет проводимость слоисто-однородной среды, заданную кусочно-постоянной функцией

$$\sigma_n(z) = \begin{cases} \sigma_0 & \text{при } z < 0; \\ \sigma_n & \text{при } z_{n-1} < z < z_n; \quad n = 1, 2, \dots, N; \\ \infty & \text{при } z > z_N \end{cases} \quad (2)$$

$z_0 = 0$; $z_n - z_{n-1} = h_n$ (h_n — толщина n -го слоя). T — некоторая конечная двумерная область проводимости $\sigma_n(y, z)$, расположенная внутри произвольного слоя $z_{n-1} < z < z_n$ $n = 1, 2, \dots, N$.

Будем предполагать, что в воздухе находятся источники, создающие E -поляризованное гармонически изменяющееся во времени по закону $e^{-i\omega t}$ электромагнитное поле $\vec{E} = \{E_x, 0, 0\}$; $\vec{H} = \{0, H_y, H_z\}$.

При этом в слоистой среде создается так называемое нормальное электромагнитное поле $E_x^{(n)}(z)$. Наличие неоднородности T приводит к появлению аномального поля $E_x^{(a)}(y, z)$, а полное электромагнитное поле, создаваемое в среде, представляет собой сумму нормального и аномального полей:

$$E_x(M) = E_x^{(n)}(z) + E_x^{(a)}(M).$$

Аномальное поле $E_x^{(a)}(M)$ удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца:

$$\Delta E_x^{(a)}(M) + k_n^2(z) E_x^{(a)}(M) = F(M), \quad (3)$$

правая часть которого

$$F(M) = [k_n^2(z) - k^2(y, z)] E_x(M), \quad (4)$$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — двумерный оператор Лапласа, $k_n^2(z) = i\omega\mu\sigma_n(z)$; $k^2(y, z) = i\omega\mu\sigma(y, z)$.

Поля $E_x(M)$ и $E_x^{(n)}(z)$ и их первые производные всюду непрерывны, поэтому для аномального поля выполняются условия сопряжения на границах раздела сред, а именно:

$$[E_x^{(a)}] = \left[\frac{\partial E_x^{(a)}}{\partial n} \right] = 0, \quad (5)$$

где n — нормаль к границе разрыва функции $\sigma(y, z)$. Наличие бесконечной проводимости при $z > z_N$ приводит к граничному условию

$$E_x^{(a)}|_{z=z_N} = 0. \quad (6)$$

Кроме того, функция $E_x^{(a)}$ удовлетворяет условию излучения на бесконечности.

Задачу нахождения полного электромагнитного поля $E_x(M)$ в рассматриваемой среде будем решать методом двумерных интегральных уравнений. Для получения интегрального уравнения необходимо знать функцию Грина слоистой-однородной среды (2), определяемую как решение следующей задачи:

$$\Delta G(M, M_0) + k_n^2(z) G(M, M_0) = -\delta(M, M_0); \quad (7)$$

$$G(M, M_0)|_{z=z_N} = 0; \quad (8)$$

$$[G] = \left[\frac{\partial G}{\partial z} \right] = 0. \quad (9)$$

на границах раздела сред;

$$G(M, M_0) \rightarrow 0 \text{ при } \sqrt{(y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Применим к функциям $E_x^{(a)}(M)$ и $G(M, M_0)$ вторую формулу Грина при $z \leq z_N$, тогда

$$E_x(M_0) - E_x^{(n)}(M_0) = \iint_T F(M) G(M, M_0) d\tau_M, \quad (11)$$

или, учитывая (4), получим двумерное интегральное выражение, определяющее поле $E_x(M_0)$ в любой точке пространства $z_0 \leq z_N$ через поле $E_x(M)$ в области неоднородности T :

$$E_x(M_0) = E_x^{(n)}(M_0) + \iint_T [k_n^2(z) - k^2(M)] G(M, M_0) E_x(M) d\tau_M. \quad (12)$$

Полагая, что точка $M_0 \in T$, получим интегральное уравнение

$$E_x(M_0) = E_x^{(n)}(M_0) + \iint_T [k_n^2(z) - k^2(M)] G(M, M_0) E_x(M) d\tau_M, \quad M_0 \in T, \quad (13)$$

решение которого позволяет найти поле $E_x(M_0)$ в области неоднородности T .

Функция $E_x^{(n)}(M)$ представляет собой нормальное поле, возбуждаемое в слоисто-однородной среде (2) локальным источником. Как правило, изучаемые неоднородности таковы, что длина волны распространяющегося поля намного больше размеров неоднородности, а также неоднородность достаточно далеко удалена от источника. Математически это можно сформулировать следующим образом:

$$R \gg D; \quad \Lambda \gg D; \quad (14)$$

где D — максимальный диаметр области неоднородности; Λ — длина волны в воздухе; R — расстояние от центра источника до центра тела. В этом случае поле $E_x^{(n)}(M)$ на неоднородности становится близким к полю плоской волны, и в целях упрощения расчетных формул правую часть интегрального уравнения (13) можно вычислять, пользуясь формулой плоской волны. Если сформулированные выше условия выполняются и в области, где необходимо определить значение электромагнитного поля, пользуясь интегральным соотношением (12), то при вычислении функции $E_x^{(n)}(M)$ также можно воспользоваться формулой плоского поля. В дальнейшем будем считать, что нормальное поле $E_x^{(n)}(M)$ как в области неоднородности, так и в области расчета поля на поверхности $z=0$ близко к плоскому полю, т. е. источником поля можно считать плоскую волну.

Интегральное уравнение (13) и интегральное соотношение (12) позволяют найти электрическое поле, возбуждаемое источником в горизонтально-неоднородной среде (1). Компоненты магнитного

поля H_y и H_z могут быть рассчитаны по следующим формулам, вытекающим из уравнений Максвелла:

$$H_y = -\frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z}; \quad H_z = \frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial y}. \quad (15)$$

Пронормируем компоненты электромагнитного поля. Для этого введем в рассмотрение безразмерные функции

$$u(y, z) = \frac{E_x(y, z)}{E_x^{(n)}(0)}; \quad f(z) = \frac{E_x^{(n)}(z)}{E_x^{(n)}(0)}. \quad (16)$$

При этом относительные компоненты магнитного поля будут выражены через производные от функции $u(y, z)$.

$$\frac{H_y(y, 0)}{E_x^{(n)}(0)} = \frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial u}{\partial z}(y, 0); \quad (17)$$

$$\frac{H_z(y, 0)}{E_x^{(n)}(0)} = -\frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial u}{\partial y}(y, 0). \quad (18)$$

В процессе исследования магнитотеллурических полей весьма полезными являются также геоэлектрические характеристики среды: импеданс

$$Z = \frac{E_x(y, 0)}{H_y(y, 0)} = i\omega\mu \frac{u(y, 0)}{\frac{\partial u}{\partial z}(y, 0)} \quad (19)$$

и кажущееся сопротивление

$$\rho_k = \frac{1}{\omega\mu} |Z|. \quad (20)$$

Перейдем далее к изложению метода решения двумерного интегрального уравнения (13) и вычислению выражений (12), (16)–(20).

Пусть область T расположена в n -м слое $z_{n-1} < z < z_n$ проводимости σ_n . Разобьем область T на P непересекающихся областей

$$T = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_P.$$

В каждой области T_m выберем некоторую точку $M_m(y_m, z_m)$. Заменяем функции $k_T(y, z)$ и $u(y, z)$ в области T кусочно-постоянными функциями $k_{Tc}(y, z)$ и $u_c(y, z)$, которые определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} k_{Tc}(y, z) &= k_T(y_m, z_m) = k_{Tm}, \text{ если } M(y, z) \in T_m; \\ u_c(y, z) &= u(y_m, z_m) = u_m, \text{ если } M(y, z) \in T_m. \end{aligned} \quad (21)$$

Из интегрального уравнения (13) с учетом (16) получим систему линейных алгебраических уравнений для функции $u_c(y, z)$ в области T , а именно:

$$u_l + \sum_{m=1}^P (k_n^2 - k_{Tm}^2) u_m A_{ml} = f_l; \quad (22)$$

$$l = 1, 2, \dots, P; \quad f_l = f(z_l);$$

$$A_{ml} = \iint_{T_m} G(M, M_0) \Big|_{y_0=y_l}^{z_0=z_l} d\tau_M. \quad (23)$$

Заменяв далее в выражении (12) функции $k_T(y, z)$ и $u(y, z)$ кусочно-постоянными функциями $k_{Tc}(y, z)$ и $u_c(y, z)$ соответственно, получим формулы, позволяющие приближенно вычислять значения функции $u(y, 0)$ и ее производных при $z=0$, если известна функция $u_c(y, z)$ в области T .

$$\tilde{u}(y_0, 0) = 1 - \sum_{m=1}^P (k_n^2 - k_{Tm}^2) u_m B_m; \quad (24)$$

$$B_m = \iint_{T_m} G(M, M_0) \Big|_{z_0=0} d\tau_M; \quad (25)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_0}(y_0, z_0) \Big|_{z_0=0} = - \sum_{m=1}^P (k_n^2 - k_{Tm}^2) u_m C_m; \quad (26)$$

$$C_m = \iint_{T_m} \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial y_0} \Big|_{z_0=0} d\tau_M; \quad (27)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z_0}(y_0, z_0) \Big|_{z_0=0} = \frac{\partial f(z_0)}{\partial z_0} \Big|_{z_0=0} - \sum_{m=1}^P (k_n^2 - k_{Tm}^2) u_m D_m; \quad (28)$$

$$D_m = \iint_{T_m} \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial z_0} \Big|_{z_0=0} d\tau_M. \quad (29)$$

В изложенном методе точность получаемого приближенного решения зависит от степени аппроксимации функций $k_T(y, z)$ и $u(y, z)$ в области T , что в свою очередь связано с разбиением области T .

Исследование точности получаемого приближенного решения следует проводить для каждого конкретно заданных функций σ и области T .

Применим описанный выше общий метод решения задачи для конкретного случая, когда

$$\sigma_n(z) = \sigma_3(z) = \begin{cases} \sigma_0 & \text{при } z < 0, \\ \sigma_1 & \text{при } 0 < z < h_1, \\ \sigma_2 & \text{при } h_1 < z < H, \\ \infty & \text{при } z > H, \end{cases} \quad (30)$$

а область T есть прямоугольник $T = \{-d \leq y \leq d; h_2 \leq z \leq h_3\}$ и $h_1 \leq h_2 \leq H; h_3 \leq H$ с постоянной проводимостью $\sigma_T(y, z) = \sigma_T = \text{const}$ (рис. 1).

В этом случае задача обладает свойством симметрии относительно $y=0$, поэтому будем решать интегральное уравнение (13)

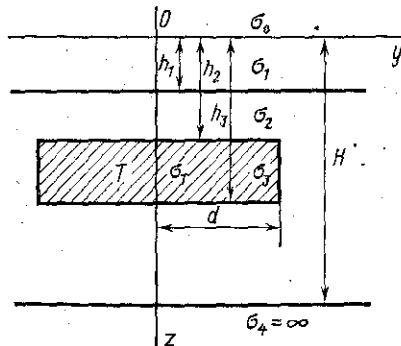


Рис. 1

на половине области T в прямоугольнике $T_1 \{0 \leq y \leq d; h_2 \leq z \leq h_3\}$, наложив на функцию $G(M, M_0)$ дополнительное условие симметрии относительно $y=0$.

Первый этап решения задачи — выбор разбиения прямоугольника T_1 на $P = p \cdot q$ равных прямоугольников T_m , причем q — количество прямоугольников вдоль направления y , p — количество прямоугольников вдоль направления z :

$$T_m = \{(i_q - 1)h_y \leq y \leq i_q \cdot h_y; (i_p - 1)h_z \leq z - h_2 \leq i_p \cdot h_z\}, \quad (31)$$

где индекс m пробегает значения от 1 до $P = p \cdot q$ и

$$m = i_q + (i_p - 1) \cdot q, \quad (32)$$

$$i_p = 1, 2, \dots, p; i_q = 1, 2, \dots, q.$$

В каждом прямоугольнике T_m выберем точку $M_m(y_m, z_m)$ пересечения его диагоналей, тогда

$$y_m = (i_q - 1)h_y + \frac{h_y}{2}, \quad (33)$$

$$z_m = h_2 + (i_p - 1)h_z + \frac{h_z}{2}. \quad (34)$$

Перепишем систему линейных алгебраических уравнений (22), а также формулы (24), (26), (28) для рассматриваемого случая задания функции $\sigma(y, z)$ в области T с учетом выбранного разбиения области неоднородности. Будем иметь

$$u_l + (k_2^2 - k_T^2) \sum_{m=1}^P u_m A_{ml} = f_l; \quad l = 1, 2, \dots, P; \quad (35)$$

аналогично (32)

$$l = j_q + (j_p - 1)q;$$

$$j_p = 1, 2, \dots, p; j_q = 1, 2, \dots, q.$$

Из (24), (26) и (28) получим

$$\tilde{u}(y_0, 0) = 1 - (k_2^2 - k_T^2) \sum_{m=1}^P u_m B_m; \quad (36)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_0}(y_0, z_0)_{z_0=0} = -(k_2^2 - k_T^2) \sum_{m=1}^P u_m C_m; \quad (37)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z_0}(y_0, z_0)_{z_0=0} = \frac{\partial f}{\partial z_0} \Big|_{z_0=0} - (k_2^2 - k_T^2) \sum_{m=1}^P u_m D_m. \quad (38)$$

Напишем асимптотические выражения для A_{ml} , f_l , B_m , C_m и D_m , используя формулы для функций $G(M, M_0)$ и $f(z)$.

Функция $f(z)$ представляет собой нормальное поле и в случае геоэлектрического разреза (30) имеет вид

$$f(z) = \frac{\sin k_1(z - h_1)}{\sin k_1 h_1} \frac{\text{ctg } k_1(z - h_1) + i\beta}{\text{ctg } k_1 h_1 + i\beta} \quad (39)$$

при $0 < z < h_1$;

$$f(z) = \frac{\sin k_2(H - z)}{\sin k_2(H - h_1) \sin k_1 h_1 \left[\text{ctg } k_1 h_1 + \frac{k_2}{k_1} \text{ctg } k_2(H - h_1) \right]} \quad (40)$$

при $h_1 < z < H$;

$$\alpha = \frac{k_0}{k_1}; \quad \beta = i \frac{k_2}{k_1} \text{ctg } k_2(H - h_1).$$

Функцию Грина $G(M, M_0)$ горизонтально-однородной среды (30), удовлетворяющую условиям (7)–(10) и условию симметрии относительно $y=0$, представим в виде интеграла

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty [\cos \lambda(y - y_0) + \cos \lambda(y + y_0)] g(z, z_0, \lambda) d\lambda; \quad (41)$$

где

$$g(z, z_0, \lambda) = \frac{2 \text{sh } \eta_2(z - H)}{y \text{sh } \eta_2(h_1 - H)} [(\eta_1 + \eta_0) e^{-\eta_1(h_1 - z_0)} + (\eta_1 - \eta_0) e^{-\eta_1(h_1 + z_0)}] \quad (42)$$

при $0 < z_0 < h_1$; $h_1 < z < H$;

$$g(z, z_0, \lambda) = \frac{2e^{\eta_2(h_1-H)} \operatorname{sh} \eta_2(z_0-H) \operatorname{sh} \eta_2(z-H)}{\eta_2 \gamma \operatorname{sh} \eta_2(h_1-H)} [(\eta_1 + \eta_0)(\eta_1 - \eta_2) - (\eta_1 - \eta_0)(\eta_1 + \eta_2) e^{-2\eta_1 h_1}] + \frac{1}{\eta_2} [e^{-\eta_2(z-z_0)} - e^{-\eta_2(2H-z-z_0)}] \quad (43)$$

при $h_1 < z_0 < H$; $h_1 < z < H$;

$$\begin{aligned} \gamma &= (\eta_1 + \eta_0)(\eta_1 - \beta) - (\eta_1 - \eta_0)(\eta_1 + \beta) e^{-2\eta_1 h_1}; \\ \eta_j &= \sqrt{\lambda^2 - k_j^2}; \operatorname{Re} \eta_j \geq 0 \quad (j = 0, 1, 2); \\ \beta &= \eta_2 \operatorname{ctg} \eta_2(h_1 - H). \end{aligned}$$

Используя формулы (23) и (43), вычислим элемент матрицы системы линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{aligned} A_{mi} &= \int_0^\infty \int_{y_m}^{y_{m+1}} \int_{z_m}^{z_{m+1}} \frac{G(M, M_0) dz dy d\lambda}{M_0 \in T_l} = \\ &= \int_0^\infty \frac{\sin \lambda(y_{m+1} - y_l) - \sin \lambda(y_m - y_l) + \sin \lambda(y_{m+1} + y_l) - \sin \lambda(y_m + y_l)}{\lambda} \times \\ &\times \frac{(\eta_1 + \eta_0)(\eta_1 - \eta_2) - (\eta_1 - \eta_0)(\eta_1 + \eta_2) e^{-2\eta_1 h_1}}{(\eta_1 + \eta_0)(\eta_1 - \eta_2 c) - (\eta_1 - \eta_0)(\eta_1 + \eta_2 c) e^{-2\eta_1 h_1}} \cdot \frac{2(e^{-2\eta_2(H-z_l)} - 1)}{e^{-2\eta_2(H-h_1)} - 1} \times \\ &\times [e^{-\eta_2(z_l+z_{m+1}-2h_1)} (e^{-2\eta_2(H-z_{m+1})} + 1) - e^{-\eta_2(z_l+z_m-2h_1)} (e^{-2\eta_2(H-z_m)} + 1)] - \\ &- e^{-\eta_2(H-z_l)} (e^{-\eta_2(H-z_{m+1})} - e^{-\eta_2(H-z_m)})] + \\ &+ \begin{cases} e^{-\eta_2(z_l-z_{m+1})} - e^{-\eta_2(z_l-z_m)} & \text{при } z_l > z_{m+1}, \\ 2 - e^{-\eta_2(z_l-z_m)} - e^{-\eta_2(z_{m+1}-z_l)} & \text{при } z_m < z_l < z_{m+1}, \\ e^{-\eta_2(z_m-z_l)} - e^{-\eta_2(z_{m+1}-z_l)} & \text{при } z_l < z_m, \end{cases} \quad (44) \end{aligned}$$

$$\text{где } c = \frac{e^{-2\eta_2(H-h_1)} + 1}{e^{-2\eta_2(H-h_1)} - 1};$$

$$y_m = (i_q - 1) h_y; \quad z_m = h_2 + (i_p - 1) h_z$$

$$y_{m+1} = j_q \cdot h_y; \quad z_{m+1} = h_2 + i_p \cdot h_z;$$

$$y_l = (j_q - 1) h_y + \frac{h_2}{2}; \quad z_l = h_2 + (j_p - 1) h_z + \frac{h_z}{2}.$$

Правая часть системы линейных алгебраических уравнений (35) вычисляется по формуле (40). Используя формулы (25), (27), (29), а также (42) и (39), напишем выражения

$$\begin{aligned} B_m &= \int_0^\infty \frac{\sin \lambda(y_{m+1} - y_0) - \sin \lambda(y_m - y_0) + \sin \lambda(y_{m+1} + y_0) - \sin \lambda(y_m + y_0)}{\lambda} \times \\ &\times \frac{4\eta_1 e^{-\eta_1 h_1}}{\gamma \eta_2 (e^{-2\eta_2(H-h_1)} - 1)} [e^{\eta_2(z_{m+1}+h_1-2H)} - e^{\eta_2(h_1-z_{m+1})} - \\ &- e^{\eta_2(z_m+h_1-2H)} - e^{\eta_2(h_1-z_m)}] d\lambda; \quad (45) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_m &= \int_0^\infty \frac{\sin \lambda(y_{m+1} - y_0) - \sin \lambda(y_m - y_0) + \sin \lambda(y_{m+1} + y_0) - \sin \lambda(y_m + y_0)}{\lambda} \times \\ &\times \frac{4\eta_1 \eta_0 e^{-\eta_1 h_1}}{\gamma \eta_2 (e^{-2\eta_2(H-h_1)} - 1)} [e^{\eta_2(z_{m+1}+h_1-2H)} + e^{\eta_2(h_1-z_{m+1})} - \\ &- e^{\eta_2(z_m+h_1-2H)} - e^{\eta_2(h_1-z_m)}] d\lambda; \quad (46) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_m &= \int_0^\infty [\cos \lambda(y_{m+1} - y_0) - \cos \lambda(y_m - y_0) + \cos \lambda(y_{m+1} + y_0) - \\ &- \cos \lambda(y_m + y_0)] \frac{4\eta_1 e^{-\eta_1 h_1}}{\gamma \eta_2 (e^{-2\eta_2(H-h_1)} - 1)} [e^{\eta_2(z_{m+1}+h_1-2H)} + \\ &+ e^{\eta_2(h_1-z_{m+1})} - e^{\eta_2(z_m+h_1-2H)} - e^{\eta_2(h_1-z_m)}] d\lambda; \quad (47) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_0} \Big|_{z_0=0} = \frac{k_1}{\sin k_1 h_1} \frac{i\beta \cos k_1 h_1 + \sin k_1 h_1}{\operatorname{ctg} k_1 h_1 + \frac{k_2}{k_1} \operatorname{ctg} k_2 (H - h_1)}; \quad (48)$$

$$y_m = (i_q - 1) h_y; \quad z_m = h_2 + (i_p - 1) h_z;$$

$$y_{m+1} = i_q \cdot h_y; \quad z_{m+1} = h_2 + (i_p - 1) h_z + \frac{h_z}{2}.$$

На основе изложенного выше метода решения был написан вычислительный алгоритм и составлена программа на ЭВМ, позволяющая рассчитывать электромагнитное поле и геоэлектрические характеристики среды в случае наличия в горизонтально-однородном разрезе (30) локального включения прямоугольного вида.

Остановимся подробнее на некоторых моментах вычислительного алгоритма. В процессе численного решения задачи определяется функция $\tilde{u}(y, 0)$ — приближенное значение точного решения на поверхности $z=0$. Исследование точности получаемого решения является, естественно, одним из важнейших моментов вычислительного этапа решения задачи. Поскольку точное решение в области неоднородности аппроксимируется кусочно-постоян-

ной функцией $u_c(y, z)$, связанной с разбиением области T_1 , то точность приближенного решения $\tilde{u}(y, 0)$ будет прежде всего зависеть от параметров p и q разбиения области неоднородности. Кроме того, точность получаемого решения будет зависеть от точности расчета несобственных интегралов (44)–(48), входящих в выражения матричных коэффициентов системы (35), а также в формулы (36)–(38) пересчета решения $u_c(y, z)$ на поверхности $z=0$.

Несобственные интегралы (44)–(48) вычисляются согласно следующей схеме:

$$\int_0^{\infty} F(\lambda) d\lambda = \int_0^A F(\lambda) d\lambda + \sum_{i=1}^k \int_{A+h(i-1)}^{A+hi} F(\lambda) d\lambda. \quad (49)$$

В формуле (49) определенный интеграл рассчитывается с относительной точностью ε_1 . Число k выбирается таким образом, чтобы выполнялось неравенство.

$$\text{abs} \left(\frac{\int_{A+h(k-1)}^{A+hk} F(\lambda) d\lambda}{\int_0^A F(\lambda) d\lambda + \sum_{i=1}^{k-1} \int_{A+h(i-1)}^{A+hi} F(\lambda) d\lambda} \right) < \varepsilon_2; \quad (50)$$

причем $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$.

Проведем исследования зависимости точности получаемого решения $\tilde{u}(y, 0)$ от параметров p, q, ε_1 и ε_2 . Прежде всего определим, что мы будем понимать под точностью приближенного решения. Пусть $\tilde{u}(y, 0)$ — решение при некотором наборе параметров $p, q, \varepsilon_1, \varepsilon_2$; $\tilde{u}^{(1)}(y, 0)$ — решение при другом наборе параметров, таком, что $p^{(1)} \geq p$; $q^{(1)} \geq q$; $\varepsilon_1^{(1)} \leq \varepsilon_1$; $\varepsilon_2^{(1)} \leq \varepsilon_2$. Будем говорить, что функция $\tilde{u}(y, 0)$ посчитана с точностью ε_3 , если справедливо неравенство

$$\text{abs} \left(\frac{\tilde{u}(y, 0) - \tilde{u}^{(1)}(y, 0)}{\tilde{u}^{(1)}(y, 0)} \right) \leq \varepsilon_3. \quad (51)$$

Исследование точности ε_3 получаемого решения в зависимости от разбиения области неоднородности T_1 и точности ε_1 и ε_2 расчета интегралов было проведено численным путем в предположении, что параметры задачи меняются в следующих пределах:

$$50 \leq v = \frac{H}{h_1} \leq 100; \quad 4 \leq v_2 = \frac{h_2}{h_1} \leq 20; \quad 0.5 \leq v_3 = \frac{h_3 - h_2}{h_1} \leq 30;$$

$$0.5 \leq l = \frac{d}{h_1} \leq 100; \quad 0 \leq r = \frac{y_0}{h_1} \leq 300; \quad 1 \leq \mu_3 = \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \leq 10; \quad (52)$$

$$\mu_2 = \frac{h_2}{h_1} = 10^{-3}; \quad 4 \leq \frac{\lambda_1}{h_1} = \sqrt{\frac{20\pi}{\omega\sigma_1}} \cdot \frac{1}{h_1} \leq 2048.$$

Остановимся сначала на выборе параметров p и q . С одной стороны, количество выбранных точек разбиения прямоугольника T_1 связано с точностью аппроксимации искомого функции $u(y, z)$ ступенчатой $u_c(y, z)$, и чем больше размеры прямоугольника T_1 , тем, естественно, точек разбиения потребуется больше. С другой стороны, размер $P=p \cdot q$ матрицы системы линейных алгебраических уравнений (35) не может расти неограниченно.

Численный анализ решения системы (35) показал, что по мере увеличения размера l неоднородности решение $u_c(y, z)$ на

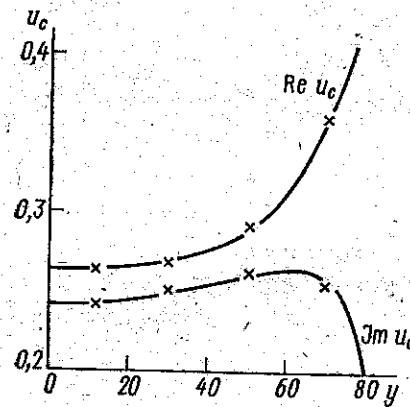


Рис. 2

большой части отрезка $[0, l]$ при каждом фиксированном z из T_1 становится медленно меняющейся функцией y , и поэтому достаточно небольшого количества точек q , чтобы хорошо описать поведение функции $u(y, z)$ в области T_1 . Так, на рис. 2 приведен для примера график функции $u_c(y, z)$ при $z/h_1 = 21.5$ при следующих значениях параметров задачи: $v=51$; $v_2=20$; $v_3=1$; $\mu_3=1$; $l=80$; $\lambda_1/h_1=32$. Непрерывная линия представляет собой кривую поведения $u_c(y, z)$ при $q=40$. На этом же графике точками нанесены результаты решения той же системы (35) при $q=4$.

Расчеты, проведенные по формулам (36)–(38), дают значения функции $\tilde{u}(y, 0)$ и ее производных для случаев $q=40$ и $q=4$ с разницей не более 5% ($\varepsilon_3=0.05$). Для исследования поведения характеристик магнитотеллурического поля обычно достаточно иметь результаты решения задачи, найденные с точностью $\varepsilon_3 \leq 5 \cdot 10^{-2}$. На основе численного анализа, проведенного в рамках изменения геоэлектрических параметров (52), можно сделать вывод, что для достижения точности решения задачи $\varepsilon_3 \leq 5 \cdot 10^{-2}$ количество точек q можно выбрать исходя из условия $h_y \leq 10$. Это дает возможность рассчитывать модели с достаточно протяженными вдоль y областями T_1 .

Перейдем далее к выбору числа p (разбиение области неоднородности вдоль направления z). Если требовать точность получаемого решения $\tilde{u}(y, 0)$, как и ранее, $\varepsilon_3 \leq 5 \cdot 10^{-2}$, то численный анализ полученных результатов позволяет выбирать $h_z \leq 1$. Проиллюстрируем это на двух примерах. Вначале рассмотрим неоднородность, размеры которой в направлении z относительно малы ($v_3 \ll l$), а именно $v_3=1$, $l=10$. Остальные параметры имеют следующие значения: $v=100$; $v_2=21$; $\mu_3=10$. В табл. 1 даны значения кажущегося сопротивления ρ_b/ρ_1 для этого набора параметров

Таблица 1

r	$\lambda_1/h_1=32$			$\lambda_1/h_1=64$			$\lambda_1/h_1=128$		
	p=1	p=2	p=3	p=1	p=2	p=3	p=1	p=2	p=3
0	9.39	9.37	9.37	11.72	11.69	11.55	17.99	18.00	18.52
10	9.82	9.80	9.79	13.36	13.32	13.15	19.57	19.57	20.17
20	10.76	10.75	10.75	17.60	17.56	17.30	23.24	23.25	24.02
30	11.62	11.62	11.62	22.52	22.52	22.39	26.95	26.94	27.93
50	12.55	12.55	12.55	30.12	30.09	30.08	31.82	31.81	31.83
70	12.89	12.89	12.89	34.84	34.39	34.39	34.31	34.35	34.36
100	12.99	13.04	13.03	38.27	38.28	37.94	36.34	36.37	36.23

при различных значениях λ_1/h_1 , y/h_1 и параметра p . Как видно, относительное расхождение ρ_h/ρ_1 при $p=1$ и $p=3$ не превосходит $3 \cdot 10^{-2}$.

Рассмотрим неоднородность, вытянутую вдоль оси z ($v_3=20$; $l=1$). Остальные параметры модели выберем следующим образом: $v=100$; $v_2=5$; $\mu_3=10$. На рис. 3 приводится график функции $\operatorname{Re} u_c(y, z)$ как функции z при $y/h_1=0$; $\lambda_1/h_1=32$, рассчитанной при $p=20$. На этом же графике точками нанесены значения функции $\operatorname{Re} u_c(y, z)$ при $p=40$. Как и в первом примере, выбор $h_z=1$ ($p=20$) позволяет получить решение в области неоднородности с высокой степенью точности, а кажущееся сопротивление ρ_h/ρ_1 вычислить с точностью $\epsilon \leq 10^{-3}$.

Исследование выбора точности ϵ_1 , ϵ_2 расчета интегралов (49) также было проведено численным путем. Естественно, значение ϵ_1 и ϵ_2 находятся в зависимости от

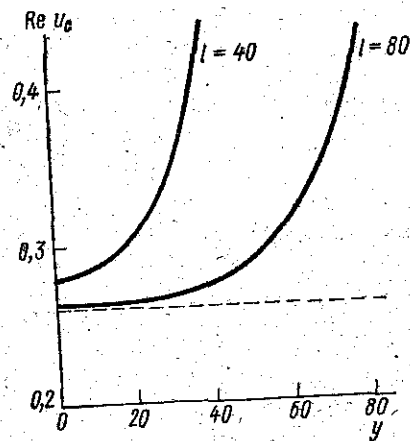


рис. 3

требуемой точности ϵ_3 решения $\bar{u}(y, 0)$. Обратимся к табл. 2, в которой приведены значения кажущегося сопротивления ρ_h/ρ_1 для $v=100$; $v_2=21$; $v_3=1$; $l=20$; $\mu_3=10$, вычисленные при различных значениях ϵ_1 и ϵ_2 . Опираясь на данные табл. 2, можно сделать следующий вывод о зависимости точности ϵ_3 решения $\bar{u}(y, 0)$ от точности расчета интегралов ϵ_1 , ϵ_2 :

ϵ_1, ϵ_2	ϵ_3
10^{-3}	0.04
$5 \cdot 10^{-4}$	0.012
10^{-4}	0.008

Рассмотренный пример дает общий характер зависимости точности получаемого решения от точности расчета интегралов, когда параметры задачи меняются в пределах (52).

В формуле (49) число k выбирается автоматически согласно условию (50) в зависимости от исходных данных задачи и требуемой точности расчета интегралов. Величины A и h следует выбрать до вычисления интегралов в зависимости от параметров модели. В виду сложности формул (44)–(47) оценку величин A и h можно провести численным путем. Проведенные оценки показали, что при расчете моделей в рамках изменения параметров (52) для оптимальности расчета интегралов рекомендуется выбирать $A=50$; $h=5$.

При вычислении протяженных вдоль оси неоднородностей можно заметить, что поле $\frac{E_x(y, z)}{E_x^{(3)}(0)} = u_c(y, z)$ в окрестности $y=0$

становится близким к нормальному электрическому полю $\frac{E_x^{(5)}(z)}{E_x^{(3)}(0)}$ горизонтально-однородной среды, получаемой при бес-

конечной протяженности неоднородности ($l=\infty$). На рис. 4 изображены графики функции $u_c(y, z)$ при $z/h_1=21.5$; $v=51$; $v_2=20$; $v_3=1$; $\mu_3=1$; $\lambda_1/h_1=32$; рассчитанные при $l=40$ и $l=80$. Пунктирная линия — значение нормального электрического поля с бесконечным неоднородным слоем при $z/h_1=21.5$. В центральной части неоднородности по мере ее удлинения функция $u_c(y, z)$ приближается к пунктирной линии. Для иллюстрации скорости стремления поля в центре неоднородности к полю в бесконечном слое в зависимости от частотного параметра λ_1/h_1 составлена табл. 3 значений $\operatorname{Re} u_c(y, z)$ и $\operatorname{Im} u_c(y, z)$ при $z/h_1=21.5$; $y_1/h_1=0$; $v=100$; $v_2=20$; $v_3=1$; $\mu_3=10$. В последнем столбце таблицы приводятся значения нормального поля $\frac{E_x^{(5)}(z)}{E_x^{(3)}(0)}$ при $z/h_1=21.5$.

Нетрудно видеть, что над центром неоднородности $u_c(y, z)$ как функция длины l неоднородности приближается к нормальному полю бесконечного слоя с разной скоростью в зависимости от значения параметра λ_1/h_1 . Так, при $\lambda_1/h_1=64$ отличие $\operatorname{Re} u_c(y, z)$

Таблица 2.

λ_1/h_1	r	$\varepsilon_1 = 10^{-3}$ $\varepsilon_2 = 10^{-3}$	$\varepsilon_1 = 5 \cdot 10^{-4}$ $\varepsilon_2 = 5 \cdot 10^{-4}$	$\varepsilon_1 = 10^{-4}$ $\varepsilon_2 = 10^{-4}$	$\varepsilon_1 = 10^{-5}$ $\varepsilon_2 = 10^{-5}$	λ_1/h_1	r	$\varepsilon_1 = 10^{-3}$ $\varepsilon_2 = 10^{-3}$
32	0	9.365	9.374	9.358	9.354	64	0	11.560
	5	9.476	9.486	9.469	9.466		5	11.968
	10	9.790	9.800	9.783	9.779		10	13.161
	30	11.617	11.618	11.601	11.594		30	22.146
	50	12.589	12.552	12.607	12.590		50	29.897
	70	12.802	12.895	12.897	12.875		70	33.962
80	12.801	12.972	12.973	12.943	80	36.058		

$\varepsilon_1 = 5 \cdot 10^{-4}$ $\varepsilon_2 = 5 \cdot 10^{-4}$	$\varepsilon_1 = 10^{-4}$ $\varepsilon_2 = 10^{-4}$	$\varepsilon_1 = 10^{-5}$ $\varepsilon_2 = 10^{-5}$	λ_1/h_1	r	$\varepsilon_1 = 10^{-3}$ $\varepsilon_2 = 10^{-3}$	$\varepsilon_1 = 5 \cdot 10^{-4}$ $\varepsilon_2 = 5 \cdot 10^{-4}$	$\varepsilon_1 = 10^{-4}$ $\varepsilon_2 = 10^{-4}$	$\varepsilon_1 = 10^{-5}$ $\varepsilon_2 = 10^{-5}$
11.687	11.685	11.760	128	0	18.523	18.003	17.961	17.976
12.102	12.100	12.179		5	18.550	18.413	18.369	18.385
13.318	13.329	13.406		10	20.166	19.575	19.526	19.544
22.518	22.520	22.697		30	27.929	26.937	26.869	26.896
30.092	30.649	30.934		50	33.488	31.808	32.047	32.084
34.390	34.820	34.812		70	36.376	34.354	34.311	34.344
35.823	36.287	36.281	80	38.153	35.228	35.168	35.199	

от нормального поля при $l=200$ составляет 13%, в то время как для $\lambda_1/h_1=128$ это расхождение увеличивается до 22%. Естественно ожидать, что частотная кривая кажущегося сопротивления над центром неоднородности также будет не везде одинаково близка к кривой кажущегося сопротивления для нормального разреза, получаемого при бесконечном удлинении неоднородного включения ($l=\infty$). На рис. 5 представлены графики функции $\rho_k/\rho_1(\lambda_1/h_1)$, рассчитанные при $v_1=51$; $v_2=4$; $v_3=1$; $l=10$; $\mu_3=10$.

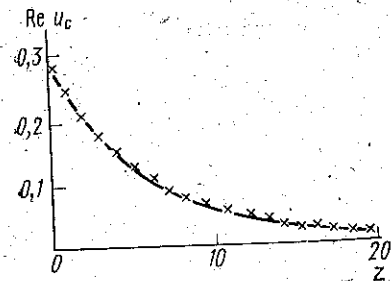


Рис. 4

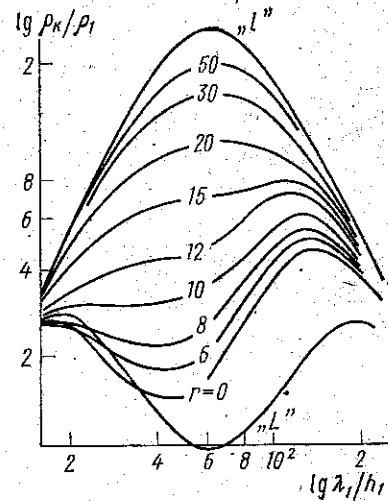


Рис. 5

Кривые оцифрованы по параметру $r=y/h_1$. На этом же графике приведены кривая $\rho_k/\rho_1(\lambda_1/h_1)$ горизонтально-слоистой среды (30) без неоднородного включения (l) и кривая $\rho_k/\rho_1(\lambda_1/h_1)$ горизонтально-слоистой среды, когда неоднородность вырождается в бесконечный слой мощности v_3 проводимости $\mu_3(L)$. Все горизонтально-неоднородные кривые располагаются в основном между кривыми l и L . Интересно, что существует некоторая область значений λ_1/h_1 , в которой при небольших значениях параметра y/h_1 кривые ρ_k/ρ_1 располагаются ниже кривой L .

В заключение подчеркнем, что предложенный метод решения задачи магнитотеллурического зондирования позволяет вычислять электромагнитное поле для моделей горизонтально-неоднородных сред в широком диапазоне изменения параметров, в том числе для сред с достаточно протяженными в горизонтальном направлении неоднородностями.

Таблица 3

L	40	80	90	100	110	120	130	200	∞
$\lambda_1/h_1 = 64$									
Re u_c	0,09	0,053	0,054	0,054	0,055	0,056	0,057	0,061	0,071
Im u_c	0,204	0,127	0,115	0,108	0,102	0,097	0,093	0,081	0,065
$\lambda_1/h_1 = 128$									
Re u_c	0,421	0,263	0,242	0,231	0,203	0,192	0,187	0,139	0,114
Im u_c	0,367	0,341	0,335	0,329	0,324	0,318	0,306	0,255	0,168

ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И., Захаров Е. В., Кокотушкин Г. А. Методы расчета магнитотеллурических полей в горизонтально-неоднородных средах. — В сб.: Магнитотеллурические поля в неоднородных средах. М., Изд-во Моск. ун-та, 1973, с. 5—51.
2. Дмитриев В. И., Мершикова Н. А. Численное исследование разрешающей способности магнитотеллурического зондирования. «Физика Земли», 1981, № 1, с. 54—64.