

В.И.Дмитриев, И.С.Барашков

РАЗНОСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫЙ МЕТОД РАСЧЁТА НИЗКОЧАСТОТНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ*

Введение

Расчёт электромагнитных полей в неоднородных средах необходим во многих прикладных задачах. Одной из наиболее значимых проблем является построение методов решения прямых и обратных задач электромагнитного зондирования неоднородной среды с целью определения её строения.

При решении прямых задач электродинамики неоднородных сред применяются различные численные методы. К ним относятся:

- метод интегральных уравнений;
- разностные методы;
- проекционные методы, включая метод конечных элементов.

Метод интегральных уравнений, разностные методы и метод конечных элементов в конечном итоге сводят задачу к решению алгебраической системы сеточных уравнений, то есть уравнений для значений поля на некоторой сетке. Однако получение сеточных уравнений в разных методах происходит по разному, чем и отличаются эти методы. В методе интегральных уравнений сеточное уравнение получается только по области неоднородности, в то время как в разностном методе область задания сеточных уравнений значительно больше. Она ограничивается только условием убывания поля, так как требуется выход на нулевые значения поля. В этом основное преимущество метода интегральных уравнений, где область задания сеточных уравнений существенно меньше. Определив поле в области неоднородности, затем по формулам пересчёта полей определяют их там, где это необходимо.

Однако разностные методы имеют преимущество в простоте получения сеточных уравнений, а также в особенности структуры сеточных уравнений, которые имеют сильно разреженную матрицу. Это позволяет эффективно применять итерационные методы решения сеточных уравне-

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проект 11-05-12014 офи-м-2011 “Разработка новых подходов и вычислительных методов решения обратных задач электромагнитного морского зондирования при измерениях на морском дне”.

ний. При решении трёхмерных задач для векторных уравнений сеточные уравнения имеют матрицы размером в несколько миллионов. Это приводит к необходимости выбирать относительно большой шаг сетки. В результате при дифференцировании полученных сеточных данных возникают большие погрешности. Преодолеть эти трудности можно сочетая разностные методы с интегральными соотношениями полей. В результате получаются комбинированные разностно-интегральные методы. Именно этому вопросу и посвящена настоящая работа.

1. Постановка задачи.

Низкочастотные электромагнитные поля в магнитооднородной проводящей среде удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \vec{j}_0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = i\omega\mu \vec{H}, \quad (1)$$

где \vec{H} и \vec{E} , соответственно, магнитное и электрическое поле, $\mu = \text{const}$ – магнитная проницаемость, $\sigma \neq 0$ электропроводность, ω – круговая частота поля, \vec{j}_0 – сторонний ток (источник поля). Математическая модель среды, обычно, локальная неоднородность электропроводности $\sigma_H(x, y, z)$, находящаяся в слоистой среде с электропроводностью $\sigma_C(z)$. Вводится понятие нормального (первичного) поля источника \vec{j}_0 в слоистой среде $\vec{E}^N(M)$, $\vec{H}^N(M)$, которое удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{H}^N = \sigma_C \vec{E}^N + \vec{j}_0, \quad \operatorname{rot} \vec{E}^N = i\omega\mu \vec{H}^N. \quad (2)$$

Для расчёта нормальных полей существует достаточно простой алгоритм [1], [2]. При наличии в среде неоднородности $\sigma_H(M)$ возникает аномальное (вторичное) поле

$$\vec{E}^a = \vec{E} - \vec{E}^N, \quad \vec{H}^a = \vec{H} - \vec{H}^N,$$

которое является решением уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{H}^a = (\sigma - \sigma_C) \vec{E}^N + \sigma \vec{E}^a, \quad \operatorname{rot} \vec{E}^a = i\omega\mu \vec{H}^a. \quad (3)$$

Исключив в (3) магнитное поле, получим уравнение для электрического поля:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E}^a - k^2 \vec{E}^a = (k^2 - k_C^2) \vec{E}^N, \quad k^2 = i\omega\mu\sigma, \quad k_C^2 = i\omega\mu\sigma_C(z) \quad (4)$$

с условием затухания на бесконечности и условиями непрерывности тангенциальных составляющих \vec{E}^a и $\operatorname{rot} \vec{E}^a$ на границах разрыва $\sigma(M)$. При решении этой задачи разностными методами можно эффективно использовать интегральные соотношения для полей, получаемые из леммы Лоренца.

2. Вывод интегральных соотношений.

Для вывода интегральной леммы Лоренца для нашей задачи перепишем уравнения (3) в виде:

$$\operatorname{rot} \vec{H}^a = \sigma_C(z) \vec{E}^a + \vec{j}_a; \quad \operatorname{rot} \vec{E}^a = i\omega\mu \vec{H}^a, \quad (5)$$

где $\vec{j}_a = (\sigma(M) - \sigma_C(z)) \vec{E}$ – аномальный ток в зоне неоднородности. Введём вспомогательные поля $\vec{e}(M)$, $\vec{h}(M)$ точечных электрических диполей

$$\vec{P} = (P_X, P_Y, P_Z) \cdot \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0) \cdot \delta(z - z_0),$$

находящихся в точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Эти поля удовлетворяют уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{h} = \sigma_C(z) \vec{e} + \vec{P}; \quad \operatorname{rot} \vec{e} = i\omega\mu \vec{h}. \quad (6)$$

Рассмотрим выражение

$$W = \operatorname{div} \left(\left[\vec{E}^a \times \vec{h} \right] - \left[\vec{e} \times \vec{H}^a \right] \right) = \vec{h} \operatorname{rot} \vec{E}^a - \vec{E}^a \operatorname{rot} \vec{h} - \vec{H}^a \operatorname{rot} \vec{e} + \vec{e} \operatorname{rot} \vec{H}^a.$$

Заменяя роторы полей из уравнений (5) и (6), получим

$$\begin{aligned} W &= \operatorname{div} \left(\left[\vec{E}^a \times \vec{h} \right] - \left[\vec{e} \times \vec{H}^a \right] \right) = \\ &= \vec{h} \cdot i\omega\mu \vec{H}^a - \vec{E}^a \cdot (\sigma_C(z) \vec{e} + \vec{P}) - \vec{H}^a \cdot i\omega\mu \vec{h} + \vec{e} \cdot (\sigma_C(z) \vec{E}^a + \vec{j}_a) = \\ &= \vec{e} \cdot \vec{j}_a - \vec{E}^a \cdot \vec{P}. \end{aligned} \quad (7)$$

Применив к полученному выражению (7) формулу Гаусса, найдём:

$$\begin{aligned} \int_V \left(\vec{e}(M, M_0) \vec{j}_a(M) - \vec{E}^a(M) \vec{P}(M, M_0) \right) dv_M = \\ = \int_S \left(\left[\vec{E}^a \times \vec{h} \right] - \left[\vec{e} \times \vec{H}^a \right] \right) \cdot \vec{n} dS_M, \end{aligned} \quad (8)$$

где S – поверхность, ограничивающая область V , в которой $\sigma(M)$ – непрерывно. Возьмём в качестве области V слой с постоянным σ , ограниченный плоскостями S_0 ($z = h_0$) и S_H ($z = H > h_0$). Тогда из (8), учитывая, что $\vec{j}^a = 0$, имеем при $M_0 \in V$:

$$\begin{aligned} P_X E_X^a(M_0) + P_Y E_Y^a(M_0) + P_Z E_Z^a(M_0) = \\ = \int_{S_H} \left(e_X(M, M_0) H_Y^a(M) - e_Y(M, M_0) H_X^a(M) - \right. \\ \left. - E_X^a(M) \cdot h_Y(M, M_0) + E_Y^a(M) h_X(M, M_0) \right) dS_M - \\ - \int_{S_0} \left(e_X(M, M_0) H_Y^a(M) - e_Y(M, M_0) H_X^a(M) - \right. \\ \left. - E_X^a(M) \cdot h_Y(M, M_0) + E_Y^a(M) h_X(M, M_0) \right) dS_M. \end{aligned} \quad (9)$$

3. Интегральные формулы пересчёта.

Полученные интегральные соотношения (9), естественно, обобщаются на слой с переменной электропроводностью, если она зависит только от координаты z .

Пусть при $z \geq 0$ имеем слоистую среду $\sigma^{(h)}(z)$ с кусочно-постоянным распределением $\sigma^{(h)}(z) = \text{const}$ при $z \in [z_1, z_2]$. Тогда применяя выражение (9) к каждому слою и складывая их, получим

$$\begin{aligned} P_x E_x^a(M_0) + P_y E_y^a(M_0) + P_z E_z^a(M_0) = \\ = \lim_{H \rightarrow \infty} \int_{S_H} \left(e_x(M, M_0) H_y^a(M) - e_y(M, M_0) H_x^a(M) - \right. \\ \left. - E_x^a(M) h_y(M, M_0) + E_y^a(M) h_x(M, M_0) \right) dS_M - \\ - \int_{S_h} \left(e_x(M, M_0) H_y^a(M) - e_y(M, M_0) H_x^a(M) - \right. \\ \left. - E_x^a(M) h_y(M, M_0) + E_y^a(M) h_x(M, M_0) \right) dS_M. \end{aligned}$$

Все интегралы по внутренним границам слоёв сократились в силу непрерывности тангенциальных составляющих полей. Интеграл по плоскости S_H при $H \rightarrow \infty$ стремится к нулю, так как аномальные поля и вспомогательные поля убывают на бесконечности. В результате получаем

$$\begin{aligned} P_X E_X^a(M_0) + P_Y E_Y^a(M_0) + P_Z E_Z^a(M_0) = \\ = \int_{S_h} \left(E_X^a(M) \cdot h_Y(M, M_0) - E_Y^a(M) h_X(M, M_0) - \right. \\ \left. - e_x(M, M_0) H_y^a(M) + e_y(M, M_0) H_x^a(M) \right) dS_M. \end{aligned} \quad (10)$$

Если вспомогательные поля определять для различных ориентаций электрического диполя:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= (P_x = 1, P_y = 0, P_z = 0); \quad \vec{e}^{(x)}, \quad \vec{h}^{(x)}, \\ \vec{P} &= (P_x = 0, P_y = 1, P_z = 0); \quad \vec{e}^{(y)}, \quad \vec{h}^{(y)}, \\ \vec{P} &= (P_x = 0, P_y = 0, P_z = 1); \quad \vec{e}^{(z)}, \quad \vec{h}^{(z)}, \end{aligned}$$

то получим из (10) формулы пересчёта:

$$\begin{aligned} E_v^a(M_0) = \int_{S_h} \left(E_X^a(M) \cdot h_y^{(v)}(M, M_0) - E_Y^a(M) h_x^{(v)}(M, M_0) - \right. \\ \left. - H_y^a(M) e_x^{(v)}(M, M_0) + H_x^a(M) e_y^{(v)}(M, M_0) \right) dS_M, \quad v = (x, y, z) \end{aligned} \quad (11)$$

Выражения (11) позволяют рассчитать электрическое поле в любой точке верхнего полупространства ($z > h$), зная H_x^a H_y^a E_x^a E_y^a

на плоскости $z = h$. Если известно только магнитное поле при $z = h$, то вспомогательное поле вычисляется для верхнего полупространства с граничными условиями $h_x^{(v)} = 0$ $h_y^{(v)} = 0$ при $z = h$. Тогда из (11) получаем:

$$E_V^a(M_0) = \int_{S_h} (H_X^a(M) \cdot e_y^{(v)}(M, M_0) - H_Y^a(M) e_x^{(v)}(M, M_0)) dS_M. \quad (12)$$

Если известно при $z = h$ только электрическое поле, то вспомогательное поле вычисляется в верхнем полупространстве при граничных условиях $e_x^{(v)} = 0$ $e_y^{(v)} = 0$ при $z = h$. В результате из (11) получаем

$$E_V^a(M_0) = \int_{S_h} (E_X^a(M) \cdot h_y^{(v)}(M, M_0) - E_Y^a(M) h_x^{(v)}(M, M_0)) dS_M. \quad (13)$$

Полученные формулы пересчёта (11 – 13) дают возможность, рассчитав поля при $z \leq h$, вычислить их при $z > h$. Аналогично из (9) с помощью вспомогательных полей для нижнего полупространства можно получить формулы пересчёта в нижнее полупространство $z < H$, зная поля при $z = H$.

4. Интегральные граничные условия.

Если в формулах пересчёта (12) точку M_0 опустить на плоскость S_h ($z_0 = h$), то получим интегральное выражение для электрического поля при $z_0 = h$ через интеграл от магнитного поля при $z = h$:

$$E_x^a(x_0, y_0) = \int_{S_h} (H_X^a(x, y, z = h) \cdot e_y^{(x)}(x - x_0, y - y_0) - H_Y^a(x, y, z = h) e_x^{(x)}(x - x_0, y - y_0)) dx dy, \quad (14)$$

$$E_y^a(x_0, y_0) = \int_{S_h} (H_X^a(x, y, z = h) \cdot e_y^{(y)}(x - x_0, y - y_0) - H_Y^a(x, y, z = h) e_x^{(y)}(x - x_0, y - y_0)) dx dy, \quad (15)$$

где

$$H_X^a(x, y, z = h) = \frac{1}{i\omega\mu} \left(\frac{\partial E_z^a}{\partial y} - \frac{\partial E_y^a}{\partial z} \right) \Big|_{z=h},$$

$$H_Y^a(x, y, z = h) = \frac{1}{i\omega\mu} \left(\frac{\partial E_x^a}{\partial z} - \frac{\partial E_z^a}{\partial x} \right) \Big|_{z=h}.$$

Полученные выражения (14–15) являются интегральными граничными условиями при $z = h$. Аналогичные условия можно получить при $z = H$. Уравнение (4) вместе с интегральными условиями (14–15) при $z = h$ и

аналогичными условиями при $z = H$ определяют краевую задачу в слое $z \in [h, H]$ с интегральными граничными условиями. При $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ имеем условие убывания к нулю E_x^a и E_y^a . Эта задача имеет единственное решение. Определив E_x^a и E_y^a внутри слоя, по формулам пересчёта мы можем определить поля в любой точке пространства. Если внутренняя задача для слоя, содержащего неоднородность решается разностным методом с интегральными граничными условиями, то мы получаем разностно-интегральный метод. Его эффективность связана с существенным уменьшением области, где определяются сеточные уравнения. Такой подход даёт возможность достаточно быстро решать трёхмерные векторные задачи. Рассмотрим применение этого метода к двумерным задачам электродинамики.

5. Двумерные задачи электродинамики.

Разностно-интегральный метод в двумерном случае реализуется значительно проще. В этом случае электромагнитное поле распадается на две независимых поляризации. Пусть среда и источники поля не зависят от координаты x . Тогда положив в уравнениях Максвелла (5) $\frac{\partial}{\partial x} \equiv 0$, получим:

1. E – поляризованное поле $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$, $\vec{H} = (0, H_y, H_z)$:

$$\frac{\partial H_z^a}{\partial y} - \frac{\partial H_y^a}{\partial z} = \sigma_C(z)E_x^a + j_x^a \quad j_x^a = (\sigma(y, z) - \sigma_C(z))E_x^a, \quad (16)$$

$$\frac{\partial E_x^a}{\partial z} = i\omega\mu H_y \quad \frac{\partial E_x^a}{\partial y} = -i\omega\mu H_z. \quad (17)$$

2. H – поляризованное поле $\vec{E} = (0, E_y, E_z)$, $\vec{H} = (H_x, 0, 0)$:

$$\frac{\partial H_x^a}{\partial z} = \sigma_C(z)E_y^a + j_y^a \quad j_y^a = (\sigma(y, z) - \sigma_C(z))E_y^a, \quad (18)$$

$$\frac{\partial H_x^a}{\partial y} = -\sigma_C(z)E_z^a - j_z^a \quad j_z^a = (\sigma(y, z) - \sigma_C(z))E_z^a, \quad (19)$$

$$\frac{\partial E_z^a}{\partial y} - \frac{\partial E_y^a}{\partial z} = i\omega\mu H_x^a. \quad (20)$$

Согласно (11) формулы пересчёта в этом случае выглядят следующим образом

Для E – поляризованного поля при $z_0 \geq h$

$$E_x^a(y_0, z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(E_X^a(y, z=h) \cdot \tilde{h}_y^{(x)}(y-y_0, z=h, z_0) - H_Y^a(y, z=h) \tilde{e}_x^{(x)}(y-y_0, z=h, z_0) \right) dy \quad (21)$$

где $\tilde{h}_y^{(x)}$ и $\tilde{e}_x^{(x)}$ – вспомогательные поля в двумерном случае в слоистой среде, которые являются решением задачи при $z \in (-\infty, \infty)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{h}_z^{(x)}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{h}_y^{(x)}}{\partial z} = \sigma_C(z) \tilde{e}_x^{(x)} + \delta(y-y_0) \delta(z-z_0); \\ \frac{\partial \tilde{e}_x^{(x)}}{\partial z} = i\omega\mu \tilde{h}_y^{(x)}; \quad \frac{\partial \tilde{e}_x^{(x)}}{\partial y} = -i\omega\mu \tilde{h}_z^{(x)}. \end{cases} \quad (22)$$

Для Н – поляризованного поля имеем при $z \geq h$

$$E_y^a(y_0, z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(H_X^a(y, z=h) \cdot \tilde{e}_y^{(x)}(y-y_0, z=h, z_0) - E_Y^a(y, z=h) \tilde{h}_x^{(x)}(y-y_0, z=h, z_0) \right) dy. \quad (23)$$

$$E_z^a(y_0, z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(H_X^a(y, z=h) \cdot \tilde{e}_y^{(z)}(y-y_0, z=h, z_0) - E_Y^a(y, z=h) \tilde{h}_x^{(z)}(y-y_0, z=h, z_0) \right) dy. \quad (24)$$

где $\tilde{e}_y^{(y)}$, $\tilde{h}_x^{(y)}$ и $\tilde{e}_y^{(z)}$, $\tilde{h}_x^{(z)}$ – вспомогательные поля, являющиеся решениями задач:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{h}_x^{(y)}}{\partial z} = \sigma_C(z) \tilde{e}_y^{(y)} + \delta(y-y_0) \delta(z-z_0); \\ \frac{\partial \tilde{h}_x^{(y)}}{\partial y} = -\sigma_C(z) \tilde{e}_z^{(y)}; \quad \frac{\partial \tilde{e}_z^{(y)}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{e}_y^{(y)}}{\partial z} = i\omega\mu \tilde{h}_x^{(y)}. \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{h}_x^{(z)}}{\partial z} = \sigma_C(z) \tilde{e}_y^{(z)}; \quad \frac{\partial \tilde{h}_x^{(z)}}{\partial y} = -\sigma_C(z) \tilde{e}_y^{(z)} - \delta(y-y_0) \delta(z-z_0); \\ \frac{\partial \tilde{e}_z^{(z)}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{e}_y^{(z)}}{\partial z} = i\omega\mu \tilde{h}_x^{(z)}. \end{cases} \quad (26)$$

Формулы пересчёта (21) и (23) позволяют получить интегральные граничные условия для задач (16 – 17) и (18 – 21) Для этого определим вспомогательные поля не для всего пространства, а для полупространства $z \geq h$ с граничными условиями $\tilde{h}_y^{(x)} = 0$ при $z = h$ для задачи (22) и $\tilde{h}_x^{(y)} = 0$ при $z = h$ для задачи (23). Тогда найдём из (21) при $z_0 = h$ интегральное граничное условие

$$E_x^a(y_0, z_0 = h) = - \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{e}_x^{(x)}(y - y_0, z = h, z_0 = h) H_Y^a(y, z = h) dy. \quad (27)$$

для Е – поляризованного поля и из (23) интегральное граничное условие для Н – поляризованного поля:

$$E_y^a(y_0, z_0 = h) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{e}_y^{(y)}(y - y_0, z = h, z_0 = h) H_x^a(y, z = h) dy. \quad (28)$$

6. Вычислительный эксперимент.

Для проверки эффективности разностно-интегрального метода рассмотрим двумерную задачу о расчёте двумерного поля в слоистой среде, когда в нижнем полупространстве имеется неоднородная зона (рис. 1). В качестве модели строения среды возьмём проводящую среду, в которой имеется неоднородная проводящая зона с переменной электропроводностью $\sigma(M)$, $M \in S$, погруженная в слоистую среду $\sigma_C(z)$. Слоистая среда задаётся в виде:

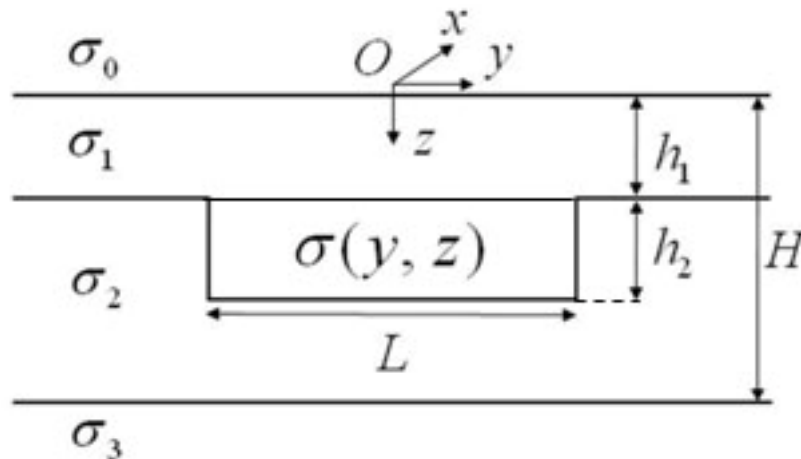


Рис. 1 Модель горизонтально однородной слоистой среды с двумерной неоднородностью

$$\sigma_C(z) = \begin{cases} \sigma_0 \approx 0 & \text{при } z \in (-\infty, 0), \\ \sigma_1 = \text{const} & \text{при } z \in (0, h_1), \\ \sigma_2(z) & \text{при } z \in (h_1, \infty). \end{cases} \quad (29)$$

Неоднородная зона S находится при $z \geq h_1$. Типичной моделью горизонтально однородной слоистой среды с двумерной неоднородностью является модель грабена, для которой $\sigma(y, z) = \sigma_1$. Для этой модели проведены численные расчёты по полученным в настоящей статье формулам.

Сначала рассмотрим случай Н-поляризации, когда

$$\frac{\partial}{\partial x} \equiv 0, \quad E_x = 0, \\ \vec{H} = (H_x, 0, 0), \quad \vec{E} = (0, E_y, E_z).$$

Уравнение для магнитного поля $H_x = H(y, z)$ имеет вид:

$$\text{div} \left(\frac{1}{\sigma} \text{grad } H \right) + i\omega\mu H = 0 \quad \text{при } z > 0 \quad (30)$$

с граничными условиями

$$H \Big|_{z=0} = 1, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} H(y, z) = 0, \quad \lim_{|y| \rightarrow \infty} H(y, z) = H^0(z), \quad (31)$$

где $H^0(z)$ – поле в горизонтально однородной слоистой среде. Среда содержит первый однородный слой с проводимостью σ_1 при $z \in [0, h_1]$ и $|y| < \infty$. Магнитное поле $H(y, z)$ при $z \geq 0$ вычислили на сетке конечно разностным методом. Рассмотрим задачу определения электрического поля

$$E_y = \frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial H}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (32)$$

на земной поверхности по таблично заданным на сетке значениям функции $H(y, z)$. Прямое дифференцирование таблично заданной на сетке функции может дать большую погрешность, так как дифференцирование таблично заданной функции является некорректной задачей. Выведем интегральное представление для электрического поля (32), позволяющее вычислить его через магнитное поле. Рассмотрим задачу для магнитного поля в слое

$$z \in [0, h], \quad \text{где } h < h_1.$$

Тогда

$$\begin{cases} \Delta H + k_1^2 H = 0, & \lim_{|y| \rightarrow \infty} H(y, z) = H^0(z), \\ H \Big|_{z=0} = 1, & H \Big|_{z=h} = H(y, z=h), \end{cases} \quad (33)$$

где $H(y, z=h)$ – известная уже вычисленная функция. Введём функцию

$$u(y, z) = H(y, z) - H^0(z). \quad (34)$$

Тогда

$$\begin{cases} \Delta u + k_1^2 u = 0, & \lim_{|y| \rightarrow \infty} u = 0, \\ u(y, z=0) = 0, & u(y, z=h) = f(y) = H(y, h) - H^0(h). \end{cases} \quad (35)$$

Рассмотрим функцию Грина (вспомогательное поле) $G(|y - y_1|, z, z_1)$ для верхнего слоя, удовлетворяющую задаче:

$$\begin{cases} \Delta G + k_1^2 G = -\delta(y - y_0)\delta(z - z_0), & \lim_{|y| \rightarrow \infty} G = 0, \\ G \Big|_{z=0} = 0, & G \Big|_{z=h} = 0. \end{cases} \quad (36)$$

Такая функция Грина представима в виде косинус преобразования Фурье от функции $V(z, z_1, \lambda)$:

$$G(|y - y_1|, z, z_1) = I_C[V] = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos \lambda(y - y_1) \cdot V(z, z_1, \lambda) d\lambda, \quad (37)$$

где функция V представима в виде:

$$V = -\frac{e^{-\eta|z-z_1|}}{2\eta} + a(\lambda)e^{-\eta z} + b(\lambda)e^{-\eta(h-z)}, \quad (38)$$

$$\eta = \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}, \quad \text{Re}(\eta) > 0. \quad (39)$$

Граничным условиям при $z=0$ и $z=h$ можно удовлетворить, за счёт соответствующего выбора коэффициентов $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$, откуда

$$V = -\frac{e^{-\eta|z-z_1|}}{2\eta} + \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{e^{\eta(z+z_1-2h)} + e^{-\eta(z+z_1)} - e^{\eta(z_1-z-2h)} - e^{\eta(z-z_1-2h)}}{1 - e^{-2\eta h}}. \quad (40)$$

С помощью функции Грина магнитное поле в первом слое представим в виде:

$$H(y, z) = H^0(z) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G(|y - y_1|, z, z_1)}{\partial z_1} \Big|_{z_1=h} \cdot f(y_1, h) dy_1. \quad (41)$$

Теперь электрическое поле на поверхности земли при $z=0$ легко получить в виде:

$$E_y(y, z=0) = \frac{1}{\sigma_1} \frac{dH^0(z)}{dz} \Big|_{z=0} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial^2 G(|y-y_1|, z, z_1)}{\partial z \partial z_1} \Big|_{z_1=h, z=0} \cdot f(y_1, h) dy_1. \quad (42)$$

Первое слагаемое в правой части формулы (42) является импедансом слоистой среды:

$$\frac{1}{\sigma_1} \frac{dH^0(z)}{dz} \Big|_{z=0} = E^0(z=0) = Z^0. \quad (43)$$

Первый сомножитель в выражении под интегралом в правой части формулы (42) является непрерывной функцией без особенностей:

$$\frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial^2 G(|y-y_1|, z, z_1)}{\partial z \partial z_1} \Big|_{z_1=h, z=0} = K(|y-y_1|) \in C. \quad (44)$$

Второй сомножитель в выражении под интегралом в правой части формулы (42)

$$f(y, h) = H(y, h) - H^0(h) \quad (45)$$

является известной функцией. Таким образом, формула для импеданса неоднородной среды принимает простой вид:

$$Z(y) = Z^0 + \int_{-\infty}^{\infty} K(|y-y_1|) \cdot f(y_1, h) dy_1, \quad (46)$$

где

$$K(|y-y_1|) = \frac{1}{\pi \sigma_1} \int_0^{\infty} \cos \lambda(y-y_1) \frac{\partial^2 V(z, z_1, \lambda)}{\partial z \partial z_1} \Big|_{z=0, z_1=h} d\lambda \quad (47)$$

и всё свелось к интегрированию ранее вычисленного магнитного поля.

Поскольку

$$\frac{\partial V}{\partial z_1} \Big|_{z_1=h} = \frac{1}{2} e^{\eta(z-h)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\eta(z-h)} + e^{\eta(z-3h)} - 2e^{-\eta(z+h)}}{1 - e^{-2\eta h}}, \quad (48)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial z_1} \Big|_{z_1=h} \right) \Big|_{z=0} = \frac{2\eta e^{-\eta h}}{1 - e^{-2\eta h}}, \quad (49)$$

то из формулы (47) получим:

$$K(|y-y_1|) = \frac{2}{\pi \sigma_1} \int_0^{\infty} \cos \lambda(y-y_1) \frac{\eta e^{-\eta h}}{1 - e^{-2\eta h}} d\lambda. \quad (50)$$

Рассмотрим теперь пересчёт поля в случае E -поляризации. Для E -поляризованного поля

$$\frac{\partial}{\partial x} \equiv 0, \quad H_x = 0, \quad (51)$$

$$\vec{H} = (0, H_y, H_z), \quad \vec{E} = (E_x, 0, 0). \quad (52)$$

Рассмотрим постановку задачи в этом случае.

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0, \quad (53)$$

где

$$(E_x - E_x^N) \text{ удовлетворяет условию излучения при } z \rightarrow -\infty, \quad (54)$$

$$k^2 = i\omega\mu\sigma(y, z),$$

при $z = 0$ непрерывны E_x и $\frac{\partial E_x}{\partial z}$.

Горизонтальная компонента магнитного поля равна

$$H_y = \frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (55)$$

Пусть мы знаем $E_x(y, z = h)$, $h < h_1$. Тогда задача при $z < h$ имеет для функции

$$u(y, z) = E_x(y, z) - E_x^N(z): \quad (56)$$

следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2(z)u = 0, \quad (57)$$

функция u удовлетворяет условию излучения при $z \rightarrow -\infty$,

$$k(z) = \begin{cases} k_0 & \text{при } z < 0, \\ k_1 & \text{при } z \in [0, h] \end{cases} \quad (58)$$

$$u \Big|_{z=h} = u_0(y) = E_x(y, z=h) - E_x^N(z) \quad (59)$$

$$[u] \Big|_{z=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial z} \right] \Big|_{z=0} = 0. \quad (60)$$

Рассмотрим задачу для функции Грина (для вспомогательного поля) $G(y - y_0, z, z_0)$:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + k^2(z)G = -\delta(y - y_0)\delta(z - z_0) \text{ при } z < h, \quad |y| < \infty, \quad (61)$$

$$G \Big|_{z=h} = 0, \quad [G] \Big|_{z=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial G}{\partial z} \right] \Big|_{z=0} = 0, \quad (62)$$

функция G удовлетворяет условию излучения при $z \rightarrow -\infty$.

Если применить формулу Грина к функциям u и G на полуплоскости $z < h$, то будем иметь:

$$u(y_0, z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y) \cdot \frac{\partial G(y - y_0, z, z_0)}{\partial z} \Big|_{z=h} dy. \quad (63)$$

Положив в этой формуле $z_0 = 0$ и $u_0 = E_x(y, z = h) - E_x^N(z = h)$, получим:

$$E_x(y_0, z_0 = 0) = E_x^N(z_0 = 0) + \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y) \frac{\partial G(y - y_0, z, z_0)}{\partial z} \Big|_{z = h, z_0 = 0} dy \quad (64)$$

Тогда магнитное поле при $z_0 = 0$ равно:

$$H_y(y_0, z_0 = 0) = H_y^N(z_0 = 0) + \frac{1}{i\omega\mu} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y) \frac{\partial^2 G(y - y_0, z, z_0)}{\partial z \partial z_0} \Big|_{z = h, z_0 = 0} dy \quad (65)$$

Функция Грина $G(y - y_0, z, z_0)$ представима в виде косинус преобразования Фурье. Формула для этой функции имеет вид:

$$G = \begin{cases} \frac{1}{\pi_0} \int_0^{\infty} \cos \lambda(y - y_0) \left\{ -\frac{1}{2} e^{-\eta_1 |z - z_0|} + a(\lambda) e^{-\eta_1 z} + b(\lambda) e^{-\eta_1 (h - z)} \right\} \frac{d\lambda}{\eta_1} & \text{при } z \in [0, h], \\ \frac{1}{\pi_0} \int_0^{\infty} \cos \lambda(y - y_0) e^{\eta_0 z} c(\lambda) \frac{d\lambda}{\eta_1} & \text{при } z < 0, \end{cases} \quad (66)$$

где $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ и $c(\lambda)$ - это коэффициенты, зависящие от λ .

Из условия

$$G \Big|_{z = h} = 0 \quad (67)$$

получим:

$$b(\lambda) = \frac{1}{2} e^{-\eta_1 (h - z_0)} - a(\lambda) e^{-\eta_1 h}. \quad (68)$$

Тогда при $z \in [0, h]$ имеем:

$$G = \frac{1}{\pi_0} \int_0^{\infty} \cos \lambda(y - y_0) \left\{ -\frac{1}{2} e^{-\eta_1 |z - z_0|} + \frac{1}{2} e^{-\eta_1 (2h - z - z_0)} + a(\lambda) (e^{-\eta_1 z} - e^{-\eta_1 (2h - z)}) \right\} \frac{d\lambda}{\eta_1} \quad (69)$$

Из условия непрерывности G и $\frac{\partial G}{\partial z}$ при $z = 0$ получим систему двух уравнений для определения коэффициентов $a(\lambda)$ и $c(\lambda)$:

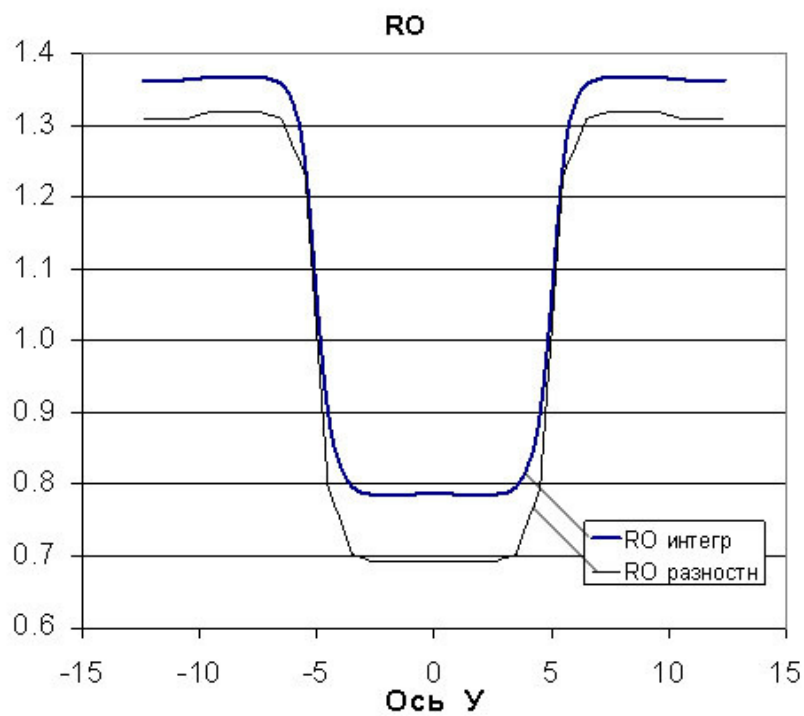


Рис. 2. Кривые кажущегося сопротивления для случая Н-поляризации при $\lambda = 10$

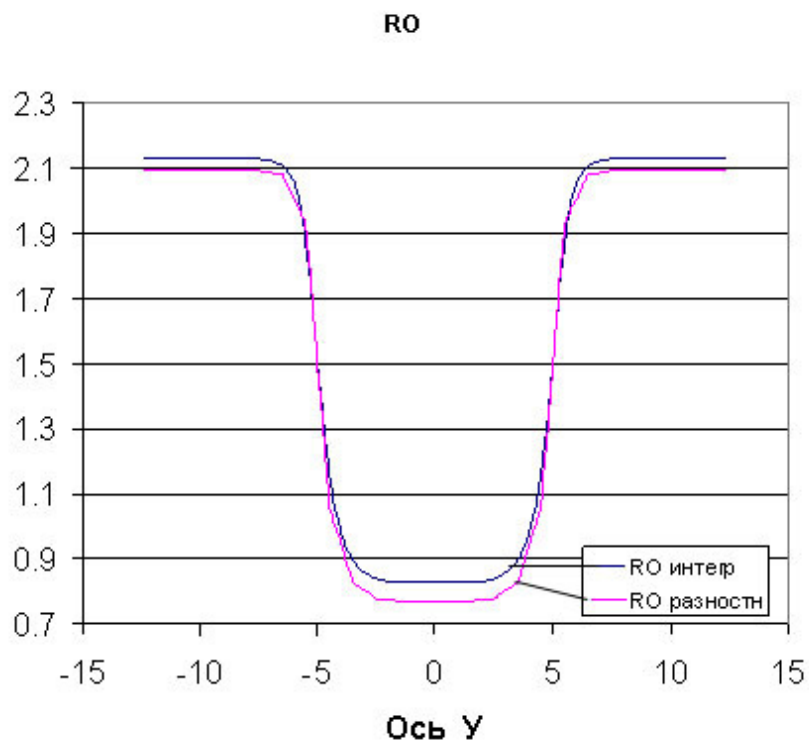


Рис. 3. Кривые кажущегося сопротивления для случая Н-поляризации при $\lambda = 13$

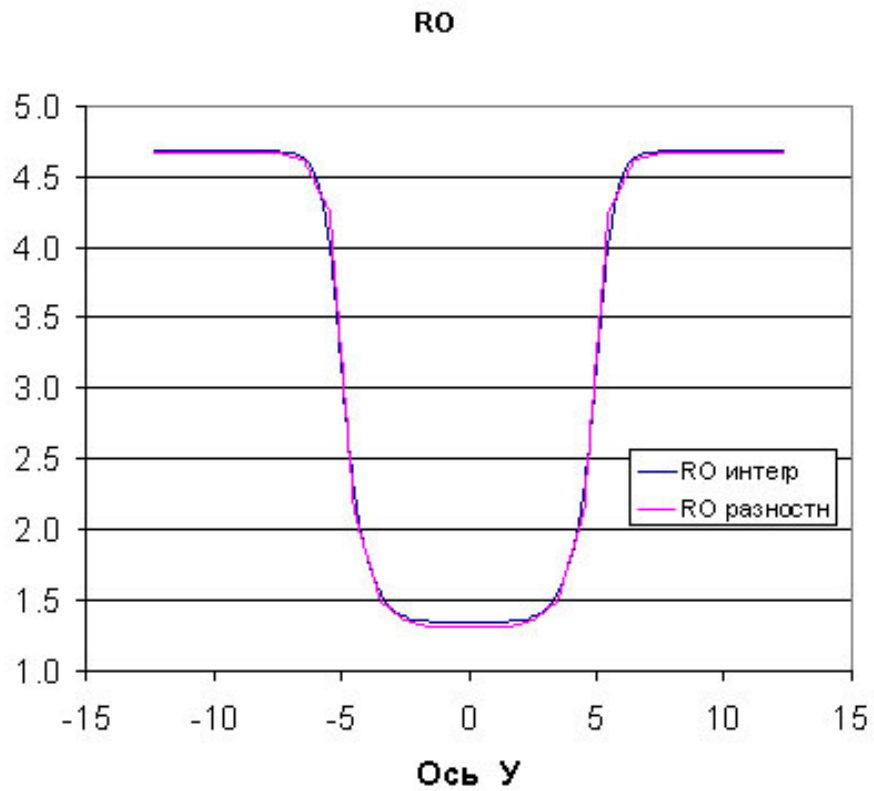


Рис. 4. Кривые кажущегося сопротивления для случая Н-поляризации при $\lambda = 20$

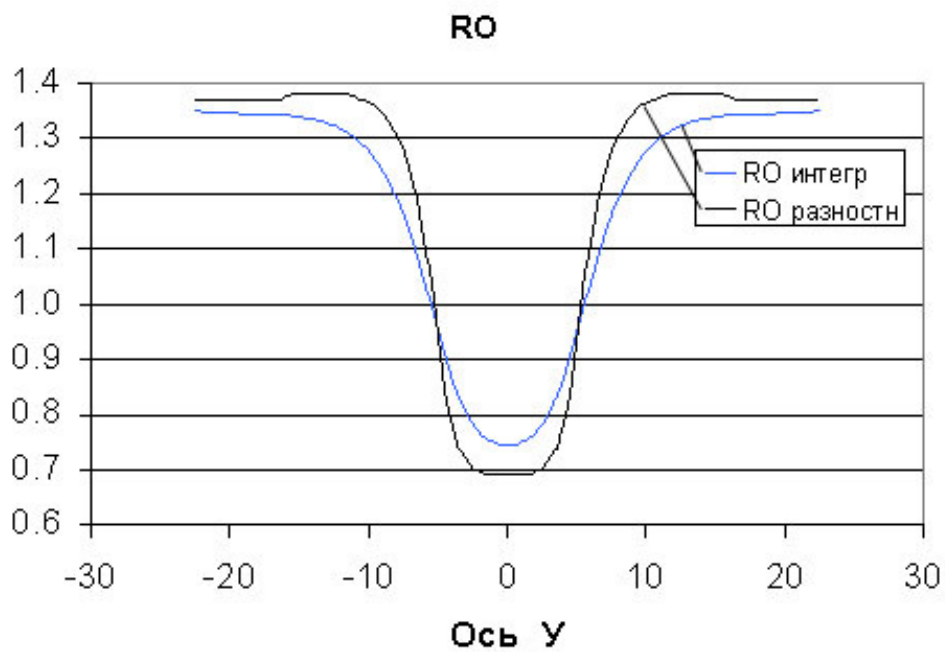


Рис. 5. Кривые кажущегося сопротивления для случая Е-поляризации при $\lambda = 10$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}e^{-\eta_1 z_0} + \frac{1}{2}e^{-\eta_1(2h-z_0)} + a(\lambda)(1 - e^{-2\eta_1 h}) = c(\lambda), \\ \eta_1 \left[-\frac{1}{2}e^{-\eta_1 z_0} + \frac{1}{2}e^{-\eta_1(2h-z_0)} - a(\lambda)(1 + e^{-2\eta_1 h}) \right] = \eta_0 c(\lambda), \end{cases} \quad (70)$$

где

$$\eta_0 = \lambda. \quad (71)$$

Следовательно,

$$a(\lambda) = -\frac{1}{2} \frac{(\eta_1 - \lambda)e^{-\eta_1 z_0} (1 - e^{-2\eta_1(h-z_0)})}{(\eta_1 + \lambda) + (\eta_1 - \lambda)e^{-2\eta_1 h}}. \quad (72)$$

Тогда при $z \in [0, h]$, $z_0 \in [0, h]$ имеем:

$$\left. \frac{\partial G(y - y_0, z, z_0)}{\partial z} \right|_{z=h} = \frac{1}{\pi_0} \int_0^\infty \cos \lambda(y - y_0) (e^{\eta_1 z_0} - 2a) e^{-\eta_1 h} d\lambda, \quad (73)$$

$$\left. \frac{\partial^2 G(y - y_0, z, z_0)}{\partial z \partial z_0} \right|_{z=h, z_0=0} = \frac{1}{\pi_0} \int_0^\infty \cos \lambda(y - y_0) \left(\eta_1 - 2 \left. \frac{\partial a}{\partial z_0} \right|_{z_0=0} \right) e^{-\eta_1 h} d\lambda. \quad (74)$$

Подставив в правую часть формулы (74) выражение

$$\left. \frac{\partial a}{\partial z_0} \right|_{z_0=0} = \frac{1}{2} \eta_1 (\eta_1 - \lambda) \frac{1 + e^{-2\eta_1 h}}{(\eta_1 + \lambda) + (\eta_1 - \lambda)e^{-2\eta_1 h}}, \quad (75)$$

получим интеграл

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial z_0} \right|_{z=h, z_0=0} &= \frac{1}{\pi_0} \int_0^\infty \cos \lambda(y - y_0) \left\{ 1 - \frac{(\eta_1 - \lambda)(1 + e^{-2\eta_1 h})}{(\eta_1 + \lambda) + (\eta_1 - \lambda)e^{-2\eta_1 h}} \right\} \eta_1 e^{-\eta_1 h} d\lambda = \\ &= \frac{2}{\pi_0} \int_0^\infty \cos \lambda(y - y_0) \frac{\eta_1 e^{-\eta_1 h} \lambda d\lambda}{(\eta_1 + \lambda) + (\eta_1 - \lambda)e^{-2\eta_1 h}}, \end{aligned} \quad (76)$$

нужный для вычисления магнитного поля по формуле (65). Из формулы (73) с учётом выражения (72) при $z_0 = 0$ получим интеграл

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G(y - y_0, z, z_0)}{\partial z} \right|_{z=h, z_0=0} &= \\ &= \frac{2}{\pi_0} \int_0^\infty \cos \lambda(y - y_0) \frac{\eta_1 e^{-\eta_1 h} d\lambda}{(\eta_1 + \lambda) + (\eta_1 - \lambda)e^{-2\eta_1 h}}, \end{aligned} \quad (77)$$

который нужен для вычисления электрического поля по формуле (64). Интегралы (76) и (77) легко вычисляются.

Расчёты проводились разностным методом, рассмотренным в работах [1] и [2] с использованием интегрального сглаживания при вычислении кривых кажущегося сопротивления для модели среды, изображённой на Рис.1, когда $\sigma(y, z) = const = \sigma_1$ (модель грабена) при

$$h_2 / h_1 = 1; \quad H / h_1 = 201; \quad L / h_1 = 10; \\ \sigma_0 = 0; \quad \sigma_2 / \sigma_1 = 0,001; \quad \sigma_3 / \sigma_1 = 1000$$

для различных значений параметра $\tilde{\lambda}_1$ – относительной длине волны в первом слое

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{2\pi}{h_1 \operatorname{Re}(k_1)}.$$

На Рис.2 – Рис.4 приводятся кривые кажущегося сопротивления для случая Н-поляризации, посчитанные по разностным формулам и по формулам с интегральным сглаживанием. Разностные графики являются ломанными линиями и при маленькой длине волны они лежат ниже сглаженных кривых, поскольку разностный метод расчёта производной как бы уменьшает влияние поверхностного скин-эффекта на кажущееся сопротивление. Однако с ростом длины волны поверхностный скин-эффект уменьшается и разностные кривые приближаются к интегральным.

На Рис.5 приводятся кривые кажущегося сопротивления для случая Е-поляризации, посчитанные по разностным формулам и по формулам с интегральным сглаживанием. Разностный график опять является ломаной линией.

Литература

1. Дмитриев В.И., Барашков И.С. О расчёте магнитотеллурического поля магнитной поляризации в двумерно-неоднородной среде. – В кн.: Численные методы в геофизических исследованиях. М.: Изд-во МГУ, 1979, с. 38-46.
2. Барашков И.С. О расчёте магнитотеллурического поля электрической поляризации в двумерно-неоднородной среде. – В кн.: Численные методы в геофизических исследованиях. М.: Изд-во МГУ, 1980, с. 29-36.
3. Барашков И.С., Мерщикова Н.А. Сравнительный анализ кривых кажущегося сопротивления в двумерно-неоднородной среде для случаев Е- и Н- поляризованного поля. . – В кн.: Численные методы в геофизических исследованиях. М.: Изд-во МГУ, 1980, с. 29-36.