А.П. Афанасьев, А.В. Остапенко

Максимизация суммы наддиагональных элементов матриц в локальных вариационных задачах с вырожденным интегрантом

1. Введение.

Локальные вариационные задачи с вырожденным нелинейным интегрантом возникают при применении процедуры продолжения оптимальных траекторий [1]. Наиболее подробно эти задачи были рассмотрены в [2]. В работах [3], [4] было показано, что решение задач этого класса (называемых также обобщенными изопериметрическими) основывается на специальной алгебраической задаче — максимизации суммы наддиагональных элементов кососимметрической матрицы путем перестановок ее строк и соответствующих этим строкам столбцов. В [3], [4] было получено необходимое условие локального экстремума для этой задачи.

В настоящей работе показывается, что экстремум действительно является локальным, и устанавливаются некоторые дополнительные условия, позволяющие облегчить поиск глобального экстремума.

2. Постановка локальной вариационной задачи.

Выпишем задачу оптимального управления со смешанными ограничениями и свободным правым концом в следующей форме:

$$J[u] = \int\limits_0^T f\big(x(t),\, u(t)\big)\, dt \to \min, \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = x_0, \quad x(T) \neq fixe, \tag{2}$$

$$F\big(x(t),\, u(t)\big) = 0, \tag{3}$$

$$G\big(x(t),\, u(t)\big) \geq 0, \tag{4}$$

$x(\cdot) : [0,T] \to R^n,\ f : R^n \times R^n \to R,\ F : R^n \times R^n \to R^m,\ m < n,\ G : R^n \times R^n \to R^k.$

Эта задача решается в [1] посредством процедуры продолжения оптимальной траектории по параметру T. В результате применения этой процедуры возникают локальные вариационные задачи (ЛВЗ), которые моделируют возникающие ситуации переключения. Базой для ЛВЗ является то, что при малых значениях T множество $U(x(t)) = \{u : F(x(t), u(t)) = 0, G(x(t), u(t)) \geq 0\}$ можно считать фиксированным и равным $U(x_0)$. Аналогично интегрант $f(x(t), u(t))$ заменяется на $f(x_0, u(t))$.

Рассмотрим целевую функцию задачи (1)–(4). Пусть интегрант $f(x(t), u(t))$ имеет вырождение в точке x_0, т. е. $f(x_0, u(t)) = 0$ при любых $u(t)$. Тогда, чтобы $u(t)$ вошло в целевую функцию явно, заменим $f(x(t), u(t))$ двумя первыми членами разложения в ряд Тейлора и получим

$$J[u] = \int_0^T \left\langle \frac{\partial}{\partial x} f(x, u(t))\Big|_{x_0}, x(t) - x_0 \right\rangle dt.$$

Введем обозначения: $F_0(u(t)) = (\partial/\partial x) f(x, u(t))\big|_{x_0}$ и $y(t) = x(t) - x_0$. Отбрасывая возмущения, получим задачу:

$$J[u] = \int_0^T \langle y(t), F_0(u(t)) \rangle \, dt \to \min, \tag{5}$$

$$\dot{y}(t) = u(t), \quad y(0) = 0, \quad y(t) \in Y, \tag{6}$$

$$F(u(t)) = 0, \tag{7}$$

$$G(u(t)) \geq 0. \tag{8}$$

Эта задача обладает свойством инвариантности по отношению к замене времени (основной признак локальных вариационных задач). Проверим это. Положим $\tau = t/T$, $x(\tau) = (1/T)y(t)$. Так как $\dot{x}(\tau) = \dot{y}(t) = u(t) = u(\tau)$, то

$$J[u] = T^2 \int_0^1 \langle x(\tau), F_0(u(\tau)) \rangle \, d\tau,$$

и ЛВЗ с вырожденным нелинейным интегрантом можно записать в виде:

$$J[u] = \int_0^1 \langle x(t), F_0(u(t)) \rangle \, dt \to \min, \tag{9}$$

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = 0, \quad x(1) \in X, \tag{10}$$

$$F(u(t)) = 0, \tag{11}$$

$$G(u(t)) \geq 0. \tag{12}$$

Подробно эта задача изучена в [2].

3. ЛВЗ с вырожденным нелинейным интегрантом и обобщенная изопериметрическая задача.

Проделаем следующую замену переменных:

$$w_1(t) = u(t),\ w_2(t) = F_0\big(u(t)\big),\ y_1(t) = x(t),\ y_2(t) = \int\limits_0^t w_2(\tau)\,d\tau.$$

Ясно, что $y_2(0) = 0$. Введем также

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix},\ w(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix},\ W = \left\{ w : w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},\ w_1 \in U,\ w_2 = F_0(w_1) \right\}.$$

Тем самым задача (9)–(12) редуцируется к виду

$$J[w] = \int\limits_0^1 \langle y(t),\, Aw(t)\rangle\, dt \to \min, \tag{13}$$

$$\dot y(t) = w(t), \quad y(0) = 0, \quad y(1) \in Y, \tag{14}$$

$$w(t) \in W, \tag{15}$$

где A — матрица $2n \times 2n$ вида $A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $x(\cdot) : [0, 1] \to R^{2n}$. Непустота множества W определяется свойствами множества U и отображением $F_0(\cdot)$.

Выделим в функционале (13) симметричную и кососимметричную части: $A = (1/2)S + (1/2)P$, где $S = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$. Тогда (13) примет вид

$$J[u] = \langle y(1),\, Sy(1)\rangle + \int\limits_0^1 \langle Py(t),\, w(t)\rangle\, dt. \tag{16}$$

Случай, если $P = 0$, тривиален, т. к. все сводится к задаче математического программирования

$$\langle y,\, Sy\rangle \to \min, \tag{17}$$

$$y \in conv(W), \tag{18}$$

т. к. $y(t) = \int\limits_0^t w(\tau)\,d\tau \in \int\limits_0^t W\,d\tau = conv(W)$. Ясно, что основная сложность задачи заключена в члене, содержащем кососимметрическую матрицу P. Поэтому можно исключить терминальный член $\langle y(1), Sy(1)\rangle$ в формуле (16), положив $y(1) = 0$, и обсуждаемая задача будет иметь вид:

$$J[u] = \int\limits_0^1 \langle Py(t),\, w(t)\rangle\, dt \to \min, \tag{19}$$

$$\dot{y}(t) = w(t), \quad y(0) = y(1) = 0, \tag{20}$$

$$w(t) \in W, \quad 0 \in \operatorname{int} W. \tag{21}$$

Такие задачи А.А. Милютин предложил называть обобщенными изопараметрическими.

4. Обобщенная изопериметрическая задача на многограннике.

Рассмотрим случай, когда множество W является многогранником M. Такие задачи возникают при исследовании задач оптимального управления, линейных по управляющим воздействиям. Подробно эти задачи изучены в [1] и [3]. Итак, задача (19)–(21) рассматривается в виде

$$J[w] = \int\limits_0^1 \langle Py(t),\, w(t)\rangle\, dt \to \min, \tag{22}$$

$$\dot{y}(t) = w(t), \quad y(0) = y(1) = 0, \tag{23}$$

$$w(t) \in M, \quad 0 \in \operatorname{int} M. \tag{24}$$

Редуцируем задачу (22)–(24) к следующей:

$$J[u] = \int\limits_0^1 \langle Ax(t),\, u(t)\rangle\, dt \to \min, \tag{25}$$

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = 0, \quad Rx(1) = 0, \tag{26}$$

$$u(t) \in S = \{u : \langle u,\, 1\rangle = 1,\, u \geq 0\}, \tag{27}$$

где $y(t) = Rx(t)$, $w(t) = Ru(t)$, $A = R^T PR$, R — матрица $N \times N$ (N — число вершин многогранника M), $R = (R_1, R_2, \ldots, R_N)$, R_i — вектор-столбец, задающий вершину многогранника M.

В работе [3] показано, что решение задачи (25)–(27) всегда можно представить в виде $u(t) = e(i)$, при $t \in (t_{i-1}, t_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$,

$$e(i) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ — } k\text{-я компонента}, \quad \langle e(i), e(j) \rangle = 0,$$

где $e(i)$ переменная следующей задачи целочисленного программирования: найти целочисленную функцию $e(i)$, доставляющую минимум функционалу

$$J[e] = \sum_{i=1}^{N-1} \left\langle \tau_i e(i), A \sum_{j=i+1}^{N} \tau_j e(j) \right\rangle \to \min, \tag{28}$$

при ограничениях

$$R \sum_{i=1}^{N} \tau_i e(i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{N} \tau_i = 1, \quad \tau_i \geq 0. \tag{29}$$

Если R — матрица $N \times N$ и имеет полный ранг, то набор $\{\tau_i\}$ определяется из системы уравнений (29). Введем матрицу $\overline{A} = \{\tau_i \tau_j a_{ij}\}_{N\times N}$. Тогда задача (28)–(29) переходит в следующую:

$$J[e] = \sum_{i=1}^{N-1} \left\langle e(i), \overline{A} \sum_{j=i+1}^{N} e(j) \right\rangle \to \min_{e}. \tag{30}$$

А задача (30) есть не что иное, как задача максимизации суммы наддиагональных элементов кососимметрической матрицы $N \times N$ путем перестановки ее строк и соответствующих этим строкам столбцов. Нетрудно убедиться, что при произвольной матрице R основным элементом алгоритма решения задачи (28)–(29) будет задача (30).

5. Задача максимизации суммы наддиагональных элементов кососимметрической матрицы.

Рассмотрим задачу максимизации суммы наддиагональных элементов вещественной кососимметрической матрицы A $n \times n$ при помощи перестановок ее строк и соответствующих этим строкам столбцов, т. е. если строки i и j меняются местами, то меняются местами также i-й и j-й столбцы. Такие перестановки, очевидно, оставляют преобразуемую матрицу кососимметричной, и конечная матрица зависит только от конечной перестановки строк (и столбцов) и не зависит от способа выполнения этой перестановки.

6. Обозначения.

α_{ij} — элемент i-й строки j-го столбца матрицы A, $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$;

$h_{ijk} := \sum\limits_{s=j}^{k} \alpha_{is}$, $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$, $k \geq j$ — сумма всех элементов от j до k в i-й строке;

$h_i := h_{iin}$ — сумма всех задиагональных элементов строки i, $i = 1, 2, \ldots, n$;

$\nu_{jlm} := \sum\limits_{s=l}^{m} \alpha_{sj}$, $j, l, m = 1, 2, \ldots, n$, $l \geq m$ — сумма всех элементов от l до m в j-м столбце;

$\nu_j := \nu_{jj1}$ — сумма всех наддиагональных элементов столбца j, $j = 1, 2, \ldots, n$;

$$\gamma_{ij} := \begin{cases} 0, & i < j \\ \alpha_{ij}, & i > j \end{cases};$$

$(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ — конечная перестановка строк (и столбцов) матрицы, т. е. строка i_1 переставлена на первое место, i_2 — на второе, и т. д.;

$m(i_1, i_2, \ldots, i_p)$, $p \leq n$ — последовательность перестановок строк (и столбцов) $i_1, i_2, \ldots, i_p$ на место первой строки (столбца) со сдвигом остальных строк вниз (! нумерация строк задается исходной матрицей). Очевидно, что $m(\ldots)$ задает некоторую перестановку, ниже будет показано, что любая перестановка может быть записана в виде $m(\ldots)$ при $p = n$.

Отметим также следующие очевидные свойства:

$$\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}, \quad \alpha_{ii} = 0, \quad h_{ijk} = -\nu_{ikj}, \quad h_n = 0, \quad \nu_1 = 0.$$

7. Условие локального экстремума.

Данное условие было получено в [1], в выше введенных обозначениях его можно сформулировать так:

Лемма 1. *Для того, чтобы перестановка $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ была оптимальной необходимо, чтобы*

$$a) \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n-1, \quad \forall j = i+1, i+2, \ldots, n : h_{ii+1j} \geq 0, \tag{31}$$

$$b) \quad \forall j = 2, 3, \ldots, n, \quad \forall i = j-1, j-2, \ldots, 1 : \nu_{jj-1i} \geq 0. \tag{32}$$

Доказательство. Докажем только пункт (31) ((32) доказывается совершенно аналогично). Пусть условие нарушено для некоторых $i = i_k$ и $j = j_m$, т. е. $h_{ii+1j} < 0$. Произведем следующую перестановку:

$$(i_1, i_2, \ldots, i_k, i_{k+1}, \ldots, i_{m-1}, i_m, i_{m+1}, \ldots, i_n) \to$$
$$\to (i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_{m-1}, i_m, i_k, i_{m+1}, \ldots, i_n).$$

При этом в силу антисимметричности матрицы A сумма наддиагональных элементов возрастает на $-2h_{ii+1j}$, что противоречит оптимальности исходной перестановки.

Чтобы показать, что данное условие не является достаточным, приведем следующий пример:

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 & -7 \\ -6 & 0 & 3 & -2 \\ -2 & -3 & 0 & 10 \\ 7 & 2 & -10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Данная матрица удовлетворяет условиям локального экстремума, однако перестановкой (*3*, *4*, *1*, *2*) она может быть приведена к матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & 10 & -2 & -3 \\ -10 & 0 & 7 & 2 \\ 2 & -7 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & -6 & 0 \end{pmatrix},$$

у которой сумма наддиагональных элементов на 8 больше.

8. Дополнительные необходимые условия глобального экстремума. Достаточные условия глобального экстремума.

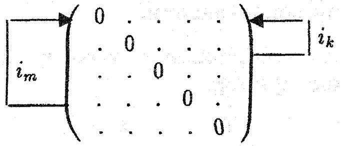
В этом пункте мы будем предполагать, что рассматриваемая перестановка является локально оптимальной, и будем считать, что это и есть исходное состояние матрицы. Это позволяет получить некоторые необходимые и достаточные условия оптимальности в более простом виде, чем в общем случае. Все дальнейшие рассуждения будут опираться на следующую лемму:

Лемма 2. *Любая перестановка может быть представлена как последовательность перестановок строк исходной матрицы на место первой строки со сдвигом остальных строк вниз, т. е. для любой перестановки* $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ *существует эквивалентная ей перестановка* $m(j_1, j_2, \ldots, j_n)$.

Доказательство. Проведем доказательство явным выписыванием $m(\ldots)$: $(i_1, i_2, \ldots\ldots, i_n) \Leftrightarrow m(i_n, i_{n-1}, \ldots, i_1)$. Действительно, при таком способе выполнения перестановок строка i_k будет переставлена на первое место на $n-k+1$-м шаге, соответственно после нее на первое место будет поставлена $n-(n-k+1) = k-1$ строка, т. е. она окажется на k-м месте.

Теперь рассмотрим изменение максимизируемой суммы при перестановке $m(i_1, i_2, \ldots, i_p)$. Рассмотрим пару строк i_k и i_m, $m > k$. Возможны два случая:

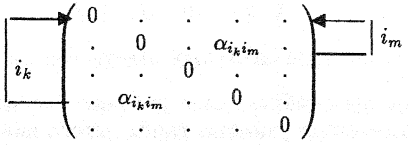
а) $i_k < i_m$, т. е. строка с меньшим номером i_k переставляется первой, и эта перестановка не оказывает никакого влияния на сумму задиагональных элементов строки i_m (см. рис.).



Соответственно, приращение максимизируемой суммы равно:

$$\Delta = -2\nu_{i_k} - 2\nu_{i_m}.$$

b) $i_k < i_m$, т. е. строка с большим номером i_k переставляется первой. В этом случае эта перестановка изменяет сумму задиагональных элементов строки i_m на $-\alpha_{i_m i_k}$ (соответственно для столбца i_m сумма наддиагональных элементов возрастает на $\alpha_{i_k i_m}$).



Поэтому, $\Delta = -2\nu_{i_k} - 2\nu_{i_m} - 2\alpha_{i_k i_m}$.

Эти оба варианта могут быть записаны так: $\Delta = -2\nu_{i_k} - 2\nu_{i_m} - 2\gamma_{i_k i_m}$.

При этом формула полного приращения может быть записана так:

$$\Delta(i_1, i_2, \ldots, i_p) = -2\sum_{k=1}^{p} \nu_{i_k} - 2\sum_{k=1}^{p-1} \sum_{m=k+1}^{p} \gamma_{i_k i_m}. \qquad (33)$$

Теперь можно сформулировать:

Лемма 3. *Для того, чтобы матрица была оптимальной, необходимо и достаточно, чтобы* $\forall m(i_1, i_2, \ldots, i_p), p \le n : \Delta(i_1, i_2, \ldots, i_p) \le 0$.

Доказательство. Необходимость очевидна, а достаточность следует из Леммы 2, так как данное условие охватывает все возможные перестановки.

К сожалению, задача проверки данного условия почти ничем не легче, чем исходная, однако из (33) можно получить несколько более простых необходимых условий, которые могут быть использованы при построении переборного алгоритма:

1) $\forall k$:

$$-\sum_{m=1}^{k-1} \gamma_{i_m i_k} - \sum_{m=k+1}^{p} \gamma_{i_k i_m} > \nu_{i_k}, \qquad (34)$$

в противном случае

$$\Delta(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_k, i_{k+1}, \ldots, i_p) < \Delta(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_{k+1}, \ldots, i_p),$$

т. е. данная перестановка может быть отброшена.

2) $\exists k$:

$$i_k > i_{k+1}, \quad \alpha_{i_k i_{k+1}} \geq 0, \tag{35}$$

иначе

$$\Delta(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1},\ i_k,\ i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_p) < \Delta(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1},\ i_{k+1},\ i_k, i_{k+2}, \ldots, i_p),$$

т. е. выгодно поменять порядок перестановки строк i_k и i_{k+1} на место первой строки.

3) $\exists k$:

$$i_1 > i_k, \tag{36}$$

что является простым следствием (34).

Замечание. *При осуществлении перебора вариантов достаточно рассматривать* $m(\ldots)$ *с* $p = n$. *Введение в рассмотрение* $p < n$ *целесообразно ввиду более легкого обоснования* (34), (36).

Работы выполнены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Проекты № 97-01-00962 и № 97-01-00123.

Литература.

1. Афанасьев А.П., Дикусар В.В., Милютин А.А., Чуканов С.В. Необходимые условия в оптимальном управлении. М.: Наука, 1990. 320 с.

2. Афанасьев А.П. Об одном классе локальных вариационных задач с вырожденным нелинейным интегрантом //Доклады РАН. 1995. Т. 341, № 3. С. 317–319.

3. Афанасьев А.П. Обобщенная изопериметрическая задача на многограннике // Дифференциальные уравнения. 1993. № 11. С. 1856–1867.

4. Afanasyev A.P. Bilinear antisymmetric form in optimal control problem //Applications of Matrix theory. Oxford: Claredon Press. 1989. P. 127–136.