

*А.В. Алаторцев, Р.Н. Кузьмин, О.Г. Проворова,
Н.П. Савенкова*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТНО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В АЛЮМИНИЕВОМ ЭЛЕКТРОЛИЗЁРЕ

Рассматривается модель алюминиевого электролизёра, используемого в промышленности для производства алюминия в результате разложения глинозема, растворенного в жидком криолите. В технологическом процессе получения алюминия большое значение имеет оптимизация работы электролизёра для повышения устойчивости процесса и максимизации выхода металла.

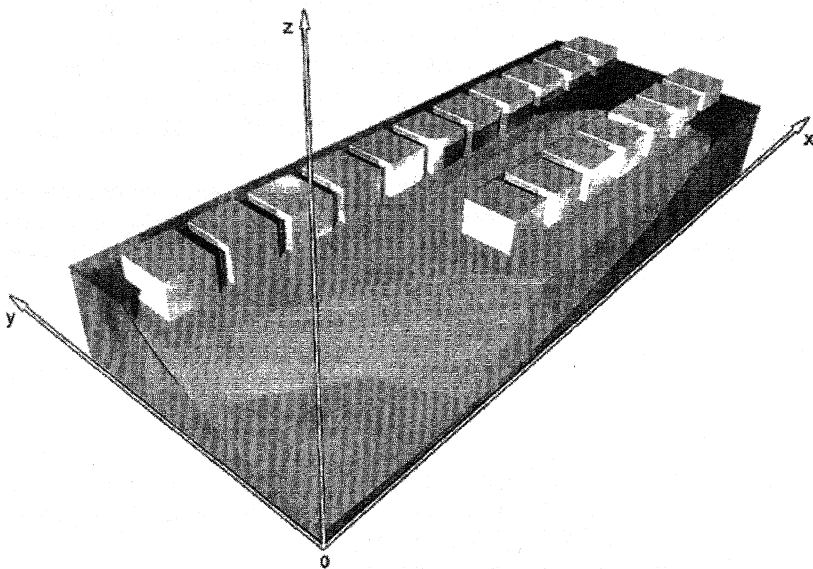


Рис. 1. Электролизная ванна

Рассматривается упрощенный вариант электролизной ванны (рисунок 1), представляющий собой прямоугольный параллелепипед с опущенными внутрь угольными анодами (всего 22 анода). Внутри электролизной ванны располагается вязкая несжимаемая жидкость, состоящая из двух вертикальных не смешиваемых слоев, разделенных подвижной границей: верхний слой – электролит и нижний – жидкий алюминий. Нижняя поверхность ванны – неровная, неровности

обусловлены образованием застывших отложений на дне ванны.

На рисунке 2а,б схематично изображена электролизная ванна и указаны некоторые обозначения.

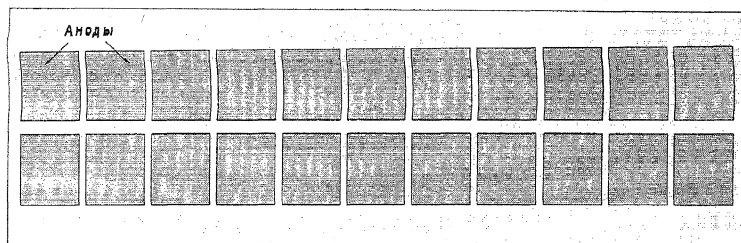


Рис.2а. Электролизная ванна, вид сверху



Рис.2б. Электролизная ванна, вид сбоку

Вертикальный ток течет от угольных анодных блоков (частично погруженных в электролит) через слой электролита (где в результате электролиза выделяется алюминий) и слой жидкого алюминия до катода, которым является дно ванны.

В силу того, что эксперименты по изменению конструкции электролизера и его параметров достаточно дороги, предпочтительным является путь математического моделирования с возможно более полным учетом в математической модели существенных физико-химических процессов, происходящих в электролизере.

Целью работы является получение динамики изменения границы раздела сред металл-электролит, скоростей в средних слоях сред металла и электролита и динамики изменения магнитного поля на основе входных данных, отвечающих конкретной электролизной ванне.

В качестве исходных уравнений, моделирующих процессы в электролизной ванне, рассматривается система уравнений магнитной гидродинамики в переменных Эйлера, записанная в средах жидкого металла и электролита [4].

Уравнения для среды жидкого металла:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1 \vec{V}_1) = Q$$

$$\frac{\partial \rho_1 u_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1 u_1 \vec{V}_1) = -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \operatorname{div}(\mu_{1T} \operatorname{grad} u_1) + f_{1x}$$

$$\frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1 v_1 \vec{V}_1) = -\frac{\partial p_1}{\partial y} + \operatorname{div}(\mu_{1T} \operatorname{grad} v_1) + f_{1y}$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} = -\rho_1 g + f_{1z}$$

$$\frac{\partial \rho_1 \varepsilon_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1 \varepsilon_1 \vec{V}_1) = -p_1 \operatorname{div}(\vec{V}_1) + \operatorname{div}(k_1 \operatorname{grad} T_1) + \operatorname{div}(k_{1T} \operatorname{grad} \varepsilon_1) + f_{T_1}$$

Уравнения для среды электролита:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 \vec{V}_2) = -Q$$

$$\frac{\partial \rho_2 u_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 u_2 \vec{V}_2) = -\frac{\partial p_2}{\partial x} + \operatorname{div}(\mu_{2T} \operatorname{grad} u_2) + f_{2x}$$

$$\frac{\partial \rho_2 v_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 v_2 \vec{V}_2) = -\frac{\partial p_2}{\partial y} + \operatorname{div}(\mu_{2T} \operatorname{grad} v_2) + f_{2y}$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial z} = -\rho_2 g + f_{2z}$$

$$\frac{\partial \rho_2 \varepsilon_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 \varepsilon_2 \vec{V}_2) = -p_2 \operatorname{div}(\vec{V}_2) + \operatorname{div}(k_2 \operatorname{grad} T_2) + \operatorname{div}(k_{2T} \operatorname{grad} \varepsilon_2) + f_{T_2}$$

Уравнение электромагнитной индукции:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\vec{V} * \vec{H}] - \operatorname{rot}(v_m \operatorname{rot} \vec{H})$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0$$

Процессы в электролизёре протекают медленно по вертикальной координате по сравнению с горизонтальными направлениями, кроме того, вертикальные линейные размеры электролизной ванны на порядок меньше горизонтальных (расстояние от верхней границы электролита до дна ванны порядка 40 сантиметров, в то время как длина ванны около 9

метров). На основании этих предположений производится осреднение системы по вертикальной компоненте, аналогично тому, как это сделано в работе [2]. В результате получается система, записанная в двух средах:

Слой жидкого металла:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}_1 h_1}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 h_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{v}_1 h_1}{\partial y} &= \bar{\rho}_2 Q, \\ \frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 h_1}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{u}_1^2 h_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 \bar{v}_1 h_1}{\partial y} &= \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} (h_1 - h_1(t_0)) * (\bar{\rho}_1 g - \bar{f}_{1z}) - \bar{p}_1(t_0) \right] + F_{D\bar{u}_1} + F_{xH_1} + F_{x\zeta_0} + \bar{f}_{1x} h_1, \\ \frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{v}_1 h_1}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 \bar{v}_1 h_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{v}_1^2 h_1}{\partial y} &= \\ = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} (h_1 - h_1(t_0)) * (\bar{\rho}_1 g - \bar{f}_{1z}) - \bar{p}_1(t_0) \right] + F_{D\bar{v}_1} + F_{yH_1} + F_{y\zeta_0} + \bar{f}_{1y} h_1, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{H}_1}{\rho} \right) + (\mathbf{V}_1, \nabla) \left(\frac{\mathbf{H}_1}{\rho} \right) &= \left(\frac{\mathbf{H}_1}{\rho}, \nabla \right) \mathbf{V}_1 - \frac{1}{\rho} \text{rot}(v_m \text{rot} \mathbf{H}_1) + \frac{c}{\varepsilon_1 \rho_1} \text{rot} \left(\frac{\mathbf{J}_{np}}{\sigma_1} \right), \end{aligned}$$

диффузионные члены определяются формулами:

$$\begin{aligned} F_{D\bar{u}_1} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_T \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_T \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} \right), \\ F_{D\bar{v}_1} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_T \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_T \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial y} \right), \\ F_{D\bar{T}_1} &= \frac{\partial}{\partial x} \left((k_{1T} + k_1) \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((k_{1T} + k_1) \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

компоненты силы трения на границе раздела жидкого металла и электролита:

$$\begin{aligned} F_{x\bar{H}_1} &= -\zeta_{H_1} \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} (\bar{u}_1 - \bar{u}_2) \sqrt{(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)^2 + (\bar{v}_1 - \bar{v}_2)^2}, \\ F_{y\bar{H}_1} &= -\zeta_{H_1} \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) \sqrt{(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)^2 + (\bar{v}_1 - \bar{v}_2)^2}, \end{aligned}$$

компоненты силы трения на нижней границе жидкого металла:

$$F_{x\zeta_0} = -\zeta_0 \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 \sqrt{\bar{u}_1^2 + \bar{v}_1^2}, \quad F_{y\zeta_0} = -\zeta_0 \bar{\rho}_1 \bar{v}_1 \sqrt{\bar{u}_1^2 + \bar{v}_1^2}.$$

$\bar{p}_1(t_0)$ находится из задачи Неймана для уравнения Пуассона:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \bar{p}_1 = \frac{\partial}{\partial x} \bar{f}_{1x} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{f}_{1y}, \text{ где } \Delta \bar{p}_1 = \frac{\partial^2 \bar{p}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}_1}{\partial y^2} \\ \left. \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial x} \right|_{x=0} = \bar{f}_{1x}, \left. \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial y} \right|_{y=0} = \bar{f}_{1y} \end{array} \right.,$$

Плотность электромагнитных сил: $\bar{f}_1 = \frac{c}{4\pi} \text{rot} \mathbf{H}_1 * \mathbf{H}_1$.

Слой электролита:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{\rho}_2 h_2}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}_2 \bar{u}_2 h_2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}_2 \bar{v}_2 h_2}{\partial y} = -\bar{\rho}_2 Q, \\ & \frac{\partial \bar{\rho}_2 \bar{u}_2 h_2}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}_2 \bar{u}_2^2 h_2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}_2 \bar{u}_2 \bar{v}_2 h_2}{\partial y} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} (h_2 - h_2(t_0)) * (\bar{\rho}_2 g - \bar{f}_{2z}) - \bar{p}_2(t_0) \right] + \\ & + F_{D\bar{u}_2} + F_{xH_2} - F_{xH_1} - g \bar{\rho}_2 h_2 \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \bar{f}_{2x} h_2 \\ & \frac{\partial \bar{\rho}_2 \bar{v}_2 h_2}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}_2 \bar{u}_2 \bar{v}_2 h_2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}_2 \bar{v}_2^2 h_2}{\partial y} = \\ & = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} (h_2 - h_2(t_0)) * (\bar{\rho}_2 g - \bar{f}_{2z}) - \bar{p}_2(t_0) \right] + \\ & + F_{D\bar{v}_2} + F_{yH_2} - F_{yH_1} - g \bar{\rho}_2 h_2 \frac{\partial \psi_0}{\partial y} + \bar{f}_{2y} h_2 \\ & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{H}_2}{\rho} \right) + (\mathbf{V}_2, \nabla) \left(\frac{\mathbf{H}_2}{\rho} \right) = \\ & = \left(\frac{\mathbf{H}_2}{\rho}, \nabla \right) \mathbf{V}_2 - \frac{1}{\rho} \text{rot}(v_m \text{rot} \mathbf{H}_2) + \frac{c}{\varepsilon_2 \rho_2} \text{rot} \left(\frac{\mathbf{J}_{np}}{\sigma_2} \right), \end{aligned}$$

диффузионные члены определяются формулами:

$$\begin{aligned} F_{D\bar{u}_2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_T \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_T \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial y} \right) \\ F_{D\bar{v}_2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_T \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_T \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial y} \right) \\ F_{D\bar{T}_2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left((k_{2T} + k_2) \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((k_{2T} + k_2) \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

компоненты силы трения на нижней границе жидкого металла:

$$F_{xH_2} = -\zeta_{H_2} \bar{\rho}_2 \bar{u}_2 \sqrt{\bar{u}_2^2 + \bar{v}_2^2}, \quad F_{yH_2} = -\zeta_{H_2} \bar{\rho}_2 \bar{v}_2 \sqrt{\bar{u}_2^2 + \bar{v}_2^2},$$

$\bar{p}_2(t_0)$ находится из задачи Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases} \Delta \bar{p}_2 = \frac{\partial}{\partial x} \bar{f}_{2x} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{f}_{2y} \\ \bar{p}_2 \Big|_{\substack{y=0 \\ y=l_y \\ x=0 \\ x=l_x}} = \rho_2 g (H_3 - \frac{H_1 + H_2}{2}), \end{cases}$$

Плотность электромагнитных сил: $\bar{f}_2 = \frac{c}{4\pi} \text{rot} \mathbf{H}_2 * \mathbf{H}_2$.

Граничные условия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \bar{\mathbf{V}}_1 \Big|_{\Gamma} &= 0, & \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \bar{\mathbf{V}}_2 \Big|_{\Gamma} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{H}}_1 \Big|_{\Gamma} &= 0, & \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{H}}_2 \Big|_{\Gamma} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \bar{\mathbf{f}}_1 \Big|_{\Gamma} &= 0, & \bar{\mathbf{f}}_2 \Big|_{\Gamma} &= 0 \end{aligned}$$

В начальный момент времени заданы значения скоростей и магнитного поля в металле и электролите: $\bar{\mathbf{V}}_1(x, y, t_0), \bar{\mathbf{H}}_1(x, y, t_0), \bar{\mathbf{V}}_2(x, y, t_0), \bar{\mathbf{H}}_2(x, y, t_0)$, толщина слоя металла $h_1(x, y, t_0) \approx 0,25\text{ м}$ и толщина слоя электролита $h_2(x, y, t_0) \approx 0,18\text{ м}$ и величины токов, исходящих из анодов. Эти начальные данные получены, как результаты вычислений, проведенные по стационарной модели [3] на основе данных реальной электролизной ванны.

Исходя из этих данных рассчитываются значения плотности возмущающих электромагнитных сил в начальный момент времени: $\bar{\mathbf{f}}_1(x, y, t_0), \bar{\mathbf{f}}_2(x, y, t_0)$, плотности токов проводимости: $\mathbf{J}_{np,z}(x, y)$ и давление в средних слоях сред металла и электролита в начальный момент времени: $\bar{p}_1(x, y, t_0), \bar{p}_2(x, y, t_0)$.

Не будем учитывать перенос тепла в металле и электролите и теплообмен между металлом и электролитом. Температура на дне металла на 3-4 градуса Цельсия меньше, чем на поверхности раздела при средней температуре электролиза порядка 940-960 °С [5].

Система численно решается с помощью расщепления на этапы по физическим процессам.

1 Этан

Изменение компонент скорости жидкого металла за счет перепадов высоты и электромагнитных сил.

$$\frac{\partial \bar{\rho}_1 h_1}{\partial t} = \bar{\rho}_1 Q$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 h_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} (h_1 - h_1(t_0)) * (\bar{\rho}_1 g - \bar{f}_{1z}) - \bar{p}_1(t_0) \right] + \bar{f}_{1x} h_1$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{v}_1 h_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} (h_1 - h_1(t_0)) * (\bar{\rho}_1 g - \bar{f}_{1z}) - \bar{p}_1(t_0) \right] + \bar{f}_{1y} h_1$$

Данная система аппроксимируется с порядком $O(\tau, h_x^2 + h_y^2)$ явной разностной схемой.

2 Этан

Система уравнений конвекции со скоростями, вычисленными на предыдущем этапе.

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = 0$$

где

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \bar{\rho}_1 h_1 \\ \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 h_1 \\ \bar{\rho}_1 \bar{v}_1^2 h_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 h_1 \\ \bar{\rho}_1 \bar{u}_1^2 h_1 - \mu_T \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} \\ \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 \bar{v}_1 h_1 - \mu_T \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \bar{\rho}_1 \bar{v}_1 h_1 \\ \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 \bar{v}_1 h_1 - \mu_T \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} \\ \bar{\rho}_1 \bar{v}_1^2 h_1 - \mu_T \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Аппроксимация разностной схемой «Кабаре» [1] с порядком $O(\tau^2, h_x^2 + h_y^2)$.

3 Этан

Учет изменения скоростей жидкого металла за счет трения.

$$\frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 h_1}{\partial t} = F_{xz_0} = -\zeta_0 \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 \sqrt{\bar{u}_1^2 + \bar{v}_1^2},$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{v}_1 h_1}{\partial t} = F_{yz_0} = -\zeta_0 \bar{\rho}_1 \bar{v}_1 \sqrt{\bar{u}_1^2 + \bar{v}_1^2}.$$

Используется аналитически полученное точное решение, записанное в разностном виде.

4 Эман

Изменение компонент скорости электролита за счет перепадов высоты и электромагнитных сил.

$$\frac{\partial \bar{\rho}_2 h_2}{\partial t} = -\bar{\rho}_2 Q$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_2 \bar{u}_2 h_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} (h_2 - h_2(t_0)) * (\bar{\rho}_2 g - \bar{f}_{2z}) - p_2(t_0) \right] - g \bar{\rho}_2 h_2 \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \bar{f}_{2x} h_2$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_2 \bar{v}_2 h_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} (h_2 - h_2(t_0)) * (\bar{\rho}_2 g - \bar{f}_{2z}) - p_2(t_0) \right] - g \bar{\rho}_2 h_2 \frac{\partial \psi_0}{\partial y} + \bar{f}_{2y} h_2$$

Аппроксимация с порядком $O(\tau, h_x^2 + h_y^2)$ явной разностной схемой.

5 Эман

Система уравнений конвекции со скоростями, вычисленными на предыдущем этапе.

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = 0$$

где

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \bar{\rho}_2 h_2 \\ \bar{\rho}_2 \bar{u}_2 h_2 \\ \bar{\rho}_2 \bar{v}_2 h_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \bar{\rho}_2 \bar{u}_2 h_2 \\ \bar{\rho}_2 \bar{u}_2^2 h_2 - \mu_T \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} \\ \bar{\rho}_2 \bar{u}_2 \bar{v}_2 h_2 - \mu_T \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \bar{\rho}_2 \bar{v}_2 h_2 \\ \bar{\rho}_2 \bar{u}_2 \bar{v}_2 h_2 - \mu_T \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial y} \\ \bar{\rho}_2 \bar{v}_2^2 h_2 - \mu_T \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Аппроксимация разностной схемой «Кабаре» [1] с порядком $O(\tau^2, h_x^2 + h_y^2)$.

6 Эман

Учет изменения скоростей электролита за счет трения.

$$\frac{\partial \bar{\rho}_2 \bar{u}_2 h_2}{\partial t} = F_{xH_2} = -\zeta_{H_2} \bar{\rho}_2 \bar{u}_2 \sqrt{\bar{u}_2^2 + \bar{v}_2^2}$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_2 \bar{v}_2 h_2}{\partial t} = F_{yH_2} = -\zeta_{H_2} \bar{\rho}_2 \bar{v}_2 \sqrt{\bar{u}_2^2 + \bar{v}_2^2}$$

Используется аналитически полученное точное решение, записанное в разностном виде.

7 Этан

Учет изменения скоростей жидкого металла и электролита за счет трения слоев между собой.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 h_1}{\partial t} &= F_{xH_1} = -\zeta_{H_1} \frac{\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2}{2} (\bar{u}_1 - \bar{u}_2) \sqrt{(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)^2 + (\bar{v}_1 - \bar{v}_2)^2} \\ \frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{v}_1 h_1}{\partial t} &= F_{yH_1} = -\zeta_{H_1} \frac{\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2}{2} (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) \sqrt{(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)^2 + (\bar{v}_1 - \bar{v}_2)^2} \\ \frac{\partial \bar{\rho}_2 \bar{u}_2 h_2}{\partial t} &= -F_{xH_1} = \zeta_{H_1} \frac{\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2}{2} (\bar{u}_1 - \bar{u}_2) \sqrt{(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)^2 + (\bar{v}_1 - \bar{v}_2)^2} \\ \frac{\partial \bar{\rho}_2 \bar{v}_2 h_2}{\partial t} &= -F_{yH_1} = \zeta_{H_1} \frac{\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2}{2} (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) \sqrt{(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)^2 + (\bar{v}_1 - \bar{v}_2)^2}\end{aligned}$$

Используется аналитически полученное точное решение, записанное в разностном виде.

8 Этан

Изменение электромагнитного поля с учетом изменения скоростей в слое жидкого металла.

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = \mathbf{D},$$

где

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} H_{1x} \\ H_{1y} \\ H_{1z} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_m \left(\frac{\partial H_{1x}}{\partial y} - \frac{\partial H_{1y}}{\partial x} \right) \\ -v_m \frac{\partial H_{1z}}{\partial x} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} v_m \left(\frac{\partial H_{1y}}{\partial x} - \frac{\partial H_{1x}}{\partial y} \right) \\ 0 \\ -v_m \frac{\partial H_{1z}}{\partial y} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} H_{1x} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + H_{1y} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} - \bar{u}_1 \frac{\partial H_{1x}}{\partial x} - \bar{v}_1 \frac{\partial H_{1x}}{\partial y} + \frac{c}{\varepsilon_1 \bar{\rho}_1 \sigma_1} \frac{\partial \mathbf{J}_{np,z}}{\partial y} \\ H_{1x} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x} + H_{1y} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial y} - \bar{u}_1 \frac{\partial H_{1y}}{\partial x} - \bar{v}_1 \frac{\partial H_{1y}}{\partial y} - \frac{c}{\varepsilon_1 \bar{\rho}_1 \sigma_1} \frac{\partial \mathbf{J}_{np,z}}{\partial x} \\ -\bar{u}_1 \frac{\partial H_{1z}}{\partial x} - \bar{v}_1 \frac{\partial H_{1z}}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Аппроксимация разностной схемой «Кабаре» [1] с порядком $O(\tau^2, h_x^2 + h_y^2)$.

9 Этап

Изменение электромагнитного поля с учетом изменения скоростей в слое электролита, аналогично этапу 8.

10 Этап

Пересчет нового распределения плотности электромагнитных сил. Аппроксимация центральными разностными производными.

$$\vec{f}_1 = \frac{c}{4\pi} \text{rot} \mathbf{H}_1 * \mathbf{H}_1$$

$$\vec{f}_2 = \frac{c}{4\pi} \text{rot} \mathbf{H}_2 * \mathbf{H}_2$$

Полуэмпирически подобрано условие устойчивости метода. Предположительно, условие на шаг по времени должно было походить на $\tau_n < \text{const} \cdot \min(h_x, h_y)$, но зависит также и от скачков величин: при резких изменениях должно происходить дробление шага. В результате получено условие:

$$\tau_{n+1} < C \frac{\min(h_x, h_y)}{\max\left(\max_{\mathbf{A} \in \{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2\}} \max_{i,j} \text{abs}\left(|\mathbf{A}|_{i,j}^n - |\mathbf{A}|_{i,j}^{n-1}\right), 1\right)},$$

где $C = \text{const} \approx 0.01$. Данное условие, конечно, является несколько жестким, однако позволяет избежать некорректного поведения разностного метода.

Создан комплекс программ, осуществляющих расчеты. Проведено большое количество тестовых расчетов на работу каждого из этапов и всей системы в целом на основе тестовых начальных данных. Расчеты показали удовлетворительное совпадение с ожидаемым из физических соображений результатом.

В качестве примера приведен тест, подтверждающий корректную работу системы на 7 этапе, учитывающем трение между слоями жидкого металла и электролита. При этом все остальные этапы отключены и заданы лишь начальные скорости в обеих средах, изображенные на рисунках 3,4.

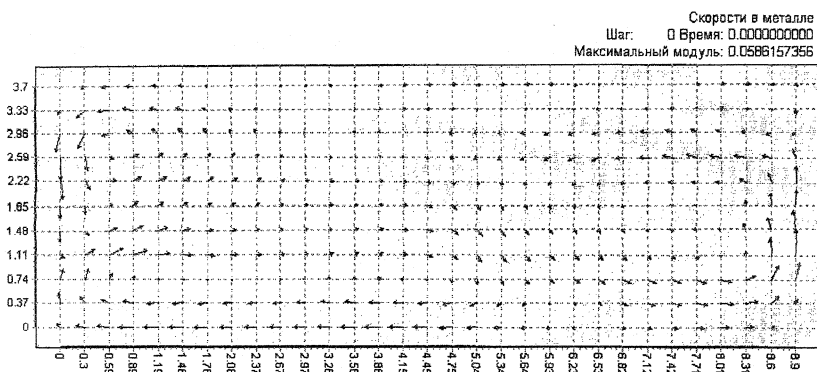


Рис. 3.

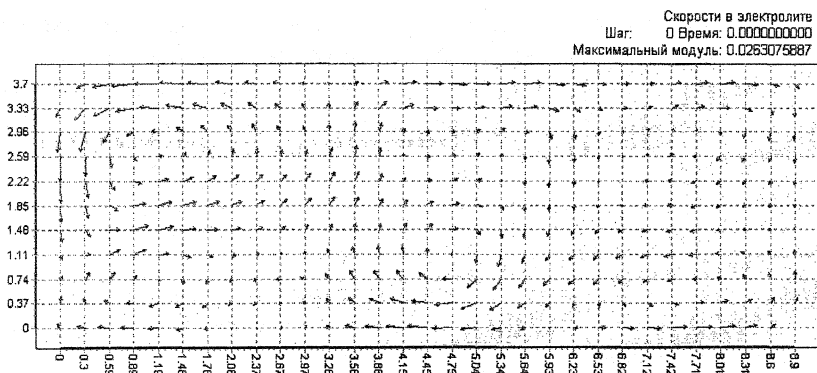


Рис. 4.

Происходит постепенное усреднение между скоростями в металле и электролите, при этом скорости в среде металла падают, а в среде электролита – растут, достигая промежуточного значения. На рис. 5,6 изображены поля скоростей в средних слоях сред жидкого металла и электролита на 500 временном слое. Видно, что скорости уже несколько выровнялись между собой по отношению к начальному моменту времени.

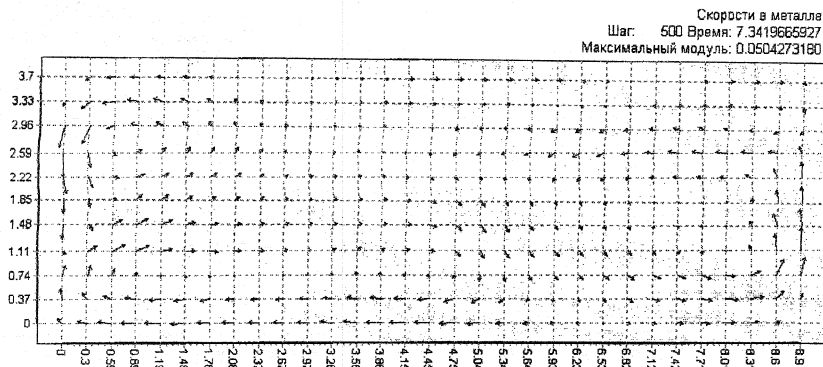


Рис. 5.

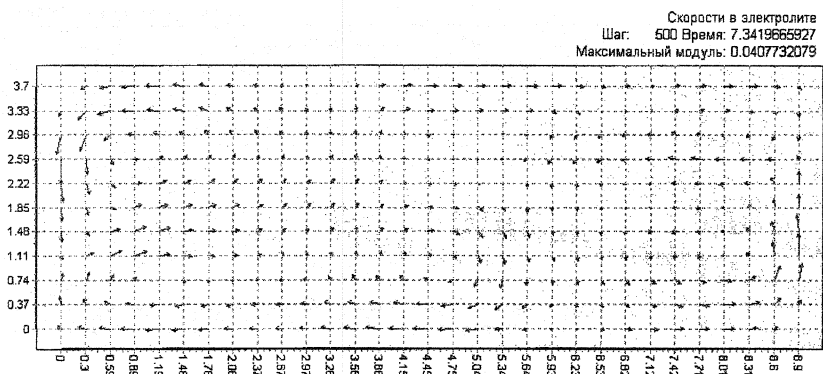


Рис. 6.

На рис. 7,8 изображены скорости на 100 000 шаге по времени. Видно, что они практически совпадают. Наблюдаемая тенденция продолжается и далее, медленно приводя к полному совпадению полей скоростей в средах жидкого металла и электролита.

Скорости в металле
Шаг: 100000 Время: 1483.2586332600
Максимальный модуль: 0.0477468284

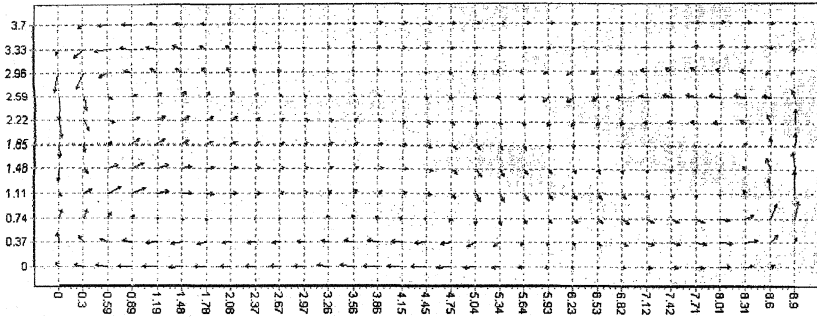


Рис. 7.

Скорости в электролите
Шаг: 100000 Время: 1483.2586332600
Максимальный модуль: 0.0477468284

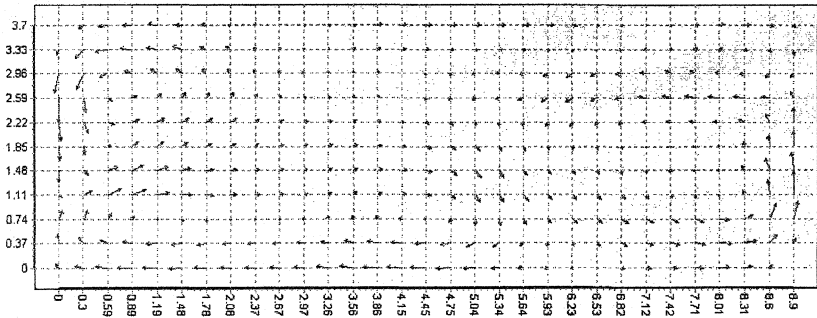


Рис. 8.

Отметим здесь, что подобный результат можно получить и за один шаг по времени, так как на 7 этапе используется аналитически полученное точное решение системы уравнений. То же самое можно сказать и об этапах 3 и 6. На рис. 9,10 изображены графики скоростей в средах жидкого металла и электролита, рассчитанные по 7 этапу за один шаг с $\tau_1 = 1500$. Они практически совпадают с графиками на рис. 7,8, разница в 7 знаке после запятой обусловлена небольшим несовпадением времени и накопившейся за 100 000 шагов погрешностью хранения чисел с плавающей точкой на ЭВМ.

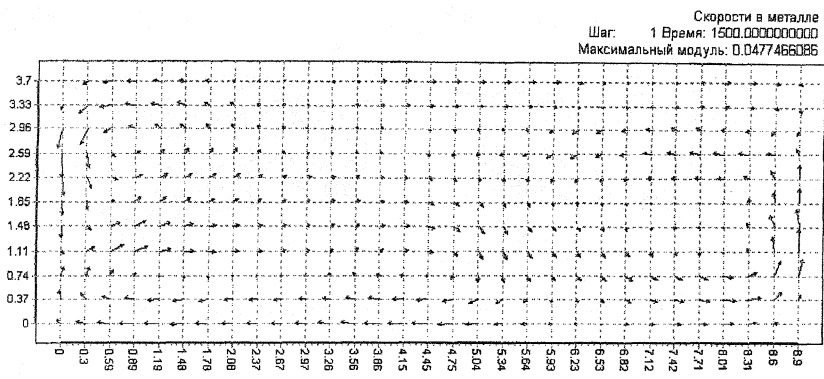


Рис. 9.

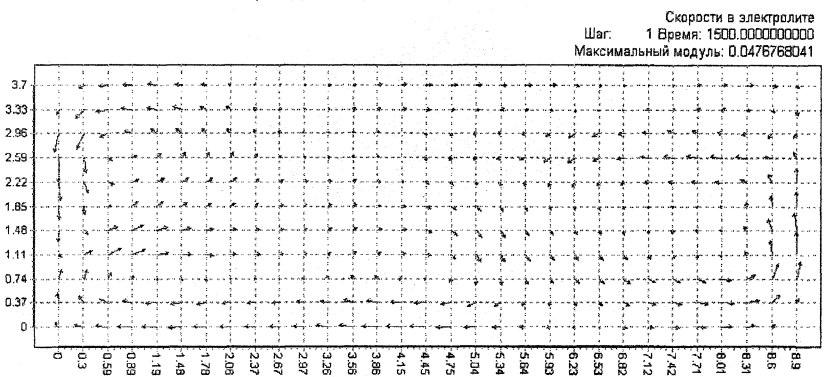


Рис. 10.

Были проведены расчеты по данным конкретной электролизной ванны. При этом в начальный момент времени задано распределение поверхности раздела, скоростей в средних слоях сред жидкого металла и электролита, напряженности магнитного поля, плотности тока и плотности возмущающих электромагнитных сил. На основе этих данных рассчитывается давление в начальный момент времени в средах жидкого металла и электролита и далее решается система, моделирующая процесс электролиза алюминия. На рисунках 11-17 изображены графики динамики поверхности раздела сред металл-электролит в этом случае.

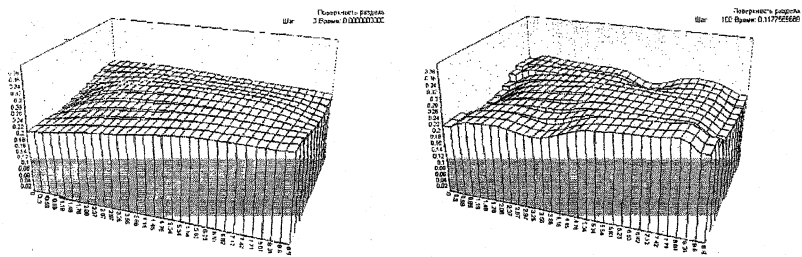


Рис. 11-12. Поверхность раздела сред металл-электролит: шаги 0 и 100.

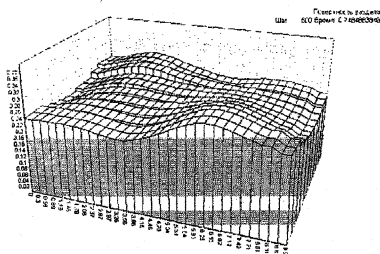


Рис. 13. Поверхность раздела сред металл-электролит: 500 шаг. В этот момент (на 500-м шаге) происходит отключение тока от анодов.

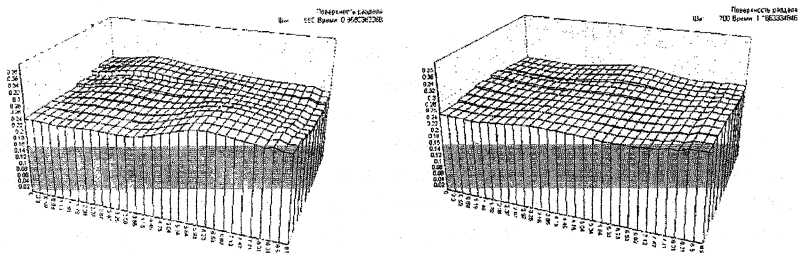


Рис. 14-15. Поверхность раздела сред металл-электролит: шаги 550 и 700.

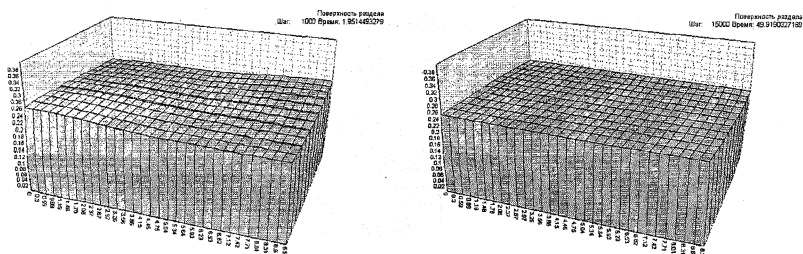


Рис. 16-17. Поверхность раздела сред металл-электролит:
шаги 1000, 15000

В процессе вычислений происходит деформация поверхности раздела под действием возмущающих электромагнитных сил. После «отключения тока», то есть снижения токов, исходящих из анодов, до нуля поверхность раздела постепенно успокаивается и распределяется равномерно, что отвечает физическому смыслу.

Следующей задачей является получение границ «области устойчивости» процесса электролиза алюминия по различным параметрам технологического процесса, что имеет определенный практический смысл и поможет повысить эффективность производства алюминия.

Литература

1. Головизнин В.М., Самарский А.А. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной переменной. Математическое моделирование, 1998, т.10, № 1, с. 86-100.
2. Кузьмин Р.Н., Кулешов А.А., Савенкова Н.П., Филиппова С.В. Моделирование аварий на промышленном объекте с истечением тяжелых газов и жидкостей. Математическое моделирование, 1998, т.10, № 8, с. 33-42.
3. Проворова О.Г., Пингин В.В., Овчинников В.В., Пискажева Т.В., Горин Д.А. Математические модели физических полей в электролизере Содерберга. Магнитная гидродинамика. 1998, т.34, с. 375-385.
4. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992.
5. Федотьев Н.П., Алабышев А.Ф. и другие Прикладная электрохимия. Госхимиздат, 1962. с. 275-330.