Н.В. Арделян, М.Н. Саблин

ОПЕРАТОРНАЯ СЕТОЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ЗАДАЧ ДВУМЕРНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ В ПОДВИЖНЫХ КООРДИНАТАХ НА НЕРЕГУЛЯРНОЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ СЕТКЕ*

1. Введение. В [1] на базе проекционного подхода построена полностью консервативная операторно-разностная схема двумерной газовой динамики в переменных Лагранжа на нерегулярной треугольной сетке, обладающая локальной аппроксимацией вблизи оси симметрии в аксиально-симметричном случае. При наличии краевых условий различных типов полученная сеточная задача записывается в виде системы операторных уравнений со взаимосопряженными сеточными аналогами инвариантных дифференциальных операторов *div*, *grad*, что обеспечивает ее корректность в линейном приближении и возможность применения эффективных методов решения неявной схемы. В данной работе ставится задача построения схемы, обладающей аналогичными свойствами, в случае подвижной системы координат (в СЭЛ-переменных), рассматривается дифференциальный по времени случай. Такая система координат является эйлеровой или лагранжевой, когда ее скорость равна нулю или скорости среды соответственно. Принципы построения полностью консервативных разностных схем газовой динамики в СЭЛ-переменных, в том числе на нерегулярных сетках, достаточно подробно разработаны, например, в работах [2-7], их результаты мы используем непосредственно в данной статье. Однако, с точки зрения эффективного численного моделирования сложных прикладных задач на нерегулярных треугольных сетках, остаются столь же актуальными, как и в случае переменных Лагранжа [1], проблема локальной аппроксимации вблизи оси симметрии в аксиально-симметричном случае и проблема выполнения определенных операторных свойств получаемой сеточной начально-краевой задачи. Эти проблемы рассматриваются в данной работе.

2. Дифференциальная задача и ее свойства. В односвязной области $V(t) \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial V(t)$, в опорной системе координат, движущейся с заданной скоростью $\vec{u}$, рассмотрим систему уравнений газо-

* Работа выполнена при поддержке Научной Программы МО РФ "Университеты России", проект 015.03.02.010.

вой динамики, включающую кинематическое соотношение, уравнения неразрывности, движения и энергии:

$$\frac{\mathcal{D}\vec{x}}{\mathcal{D}t} = \vec{u},$$
$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}(\rho D) = -D\nabla\cdot(\rho\vec{w}), \vec{w} = \vec{v} - \vec{u},$$
$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}(\rho\vec{v}D) = -D\left[\nabla\cdot(\rho\vec{w}\vec{v}) + \nabla g - \nabla\cdot(\mu U)\right], \tag{1}$$
$$g = p - \nu\nabla\cdot\vec{v}, U = \left[\nabla\vec{v} + (\nabla\vec{v})^*\right], \nu = \lambda - \frac{2}{3}\mu,$$
$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}(\rho\varepsilon D) = -D\left[g\nabla\cdot\vec{v} + \nabla\cdot(\rho\varepsilon\vec{w}) + \nabla\cdot\vec{W} - \frac{1}{2}\mu U\cdot\cdot U\right], \vec{W} = -\theta\nabla T.$$

Здесь $\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}$ – производная по времени t в опорной системе координат, ∇ – инвариантный дифференциальный оператор “набла”, $\vec{u}$ – скорость движения системы координат в физическом пространстве, ρ – плотность, $\vec{v}$ – скорость, T – температура, $\vec{x}$ – радиус-вектор частицы сплошной среды в декартовых координатах, p – давление, ε – внутренняя энергия, λ, μ – коэффициенты первой и второй вязкости, θ – коэффициент теплопроводности, D – якобиан преобразования опорной системы координат в эйлерову, U – тензор скоростей деформации.

Далее сформулируем некоторые свойства системы уравнений газовой динамики, на выполнение сеточных аналогов которых мы ориентируемся при построении операторной сеточной задачи.

О полной консервативности. В системе (1) уравнения неразрывности и движения записаны в дивергентной форме, их интегрирование по области $V(t)$ дает балансы массы и импульса. Уравнение энергии выражает баланс внутренней энергии. Следствием уравнений системы (1) является дивергентное уравнение энергии, выражающее баланс полной энергии:

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\left[\rho D\left(\varepsilon + \frac{\vec{v}^2}{2}\right)\right] = -D\left[\nabla\cdot\left\{\rho\vec{w}\left(\varepsilon + \frac{\vec{v}^2}{2}\right)\right\} + \nabla\cdot(g\vec{v}) - \nabla\cdot(\mu U\cdot\vec{v})\right] \tag{2}$$

При получении уравнения полной энергии (2) используются преобразования производных по времени:

$$\vec{v}\cdot\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\left(\rho D\vec{v}\right)=\frac{\vec{v}^2}{2}\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\left(\rho D\right)+\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\left(\rho D\frac{\vec{v}^2}{2}\right) \tag{3}$$

и преобразования конвективной части уравнения движения, с учетом уравнения неразрывности:

$$\begin{aligned} &D\vec{v}\cdot\nabla\cdot\left(\rho\vec{w}\vec{v}\right)=D\vec{v}\cdot\left[\vec{v}\nabla\cdot\left(\rho\vec{w}\right)+\left(\rho\vec{w}\right)\cdot\nabla\vec{v}\right]= \\ &=\frac{\vec{v}^2}{2}D\nabla\cdot\left(\rho\vec{w}\right)+D\left[\frac{\vec{v}^2}{2}\nabla\cdot\left(\rho\vec{w}\right)+\left(\rho\vec{w}\right)\cdot\nabla\frac{\vec{v}^2}{2}\right]= \\ &=-\frac{\vec{v}^2}{2}\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\left(\rho D\right)+D\nabla\cdot\left(\rho\vec{w}\frac{\vec{v}^2}{2}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Используется также преобразование вязких слагаемых, с учетом симметричности тензора $\boldsymbol{U}$:

$$\begin{aligned} &\vec{v}\cdot\nabla\cdot\left(\mu\boldsymbol{U}\right)+\frac{1}{2}\mu\boldsymbol{U}\cdot\cdot\boldsymbol{U}=\vec{v}\cdot\nabla\cdot\left(\mu\boldsymbol{U}\right)+\frac{1}{2}\mu\boldsymbol{U}\cdot\cdot\left(\nabla\vec{v}+\left(\nabla\vec{v}\right)^*\right)= \\ &=\vec{v}\cdot\nabla\cdot\left(\mu\boldsymbol{U}\right)+\mu\boldsymbol{U}\cdot\cdot\nabla\vec{v}=\nabla\cdot\left(\mu\boldsymbol{U}\cdot\vec{v}\right), \end{aligned} \tag{4а}$$

а так же, как и в случае лагранжевых переменных [1], формула для слагаемых, включающих полное давление:

$$\nabla\cdot\left(g\vec{v}\right)=g\nabla\cdot\left(\vec{v}\right)+\vec{v}\cdot\nabla g. \tag{4б}$$

Полный анализ способов получения дискретных аналогов формулы (3) выполнен, в частности, в цитированных выше работах. Результаты этих работ практически полностью переносятся на рассматриваемый случай, поэтому здесь не затрагиваются вопросы дискретизации по времени, а изучается лишь дифференциальная по времени сеточная задача с точки зрения выполнения интегральных сеточных аналогов преобразований (4) для сеточных операторов, получаемых аналогично [1] на основе проекционного подхода.

Проведенные выше рассуждения позволяют сформулировать достаточные требования к сеточной аппроксимации конвективных потоков, обеспечивающие полную консервативность:

1. Дивергентность сеточной аппроксимации конвективных потоков $\nabla\cdot\left(\rho\vec{w}\right), \nabla\cdot\left(\rho\vec{w}\vec{v}\right), \nabla\cdot\left(\rho\varepsilon\vec{w}\right)$ в уравнениях неразрывности, движения и энергии соответственно.
2. Выполнение интегральных сеточных аналогов соотношений (4а), (4б) и формул

$$
\begin{aligned}
&\vec{v}\cdot\nabla\cdot(\rho\vec{w}\vec{v})=\vec{v}\cdot\left[\vec{v}\nabla\cdot(\rho\vec{w})+\rho\vec{w}\cdot\nabla\vec{v}\right],\\
&\vec{v}\cdot(\rho\vec{w}\cdot\nabla\vec{v})=\rho\vec{w}\cdot\nabla\frac{\vec{v}^2}{2},\\
&\frac{\vec{v}^2}{2}\nabla\cdot(\rho\vec{w})+(\rho\vec{w})\cdot\nabla\frac{\vec{v}^2}{2}=\nabla\cdot\left(\rho\vec{w}\frac{\vec{v}^2}{2}\right),\\
&\frac{\vec{v}^2}{2}\nabla\cdot(\rho\vec{w})=-\frac{\vec{v}^2}{2}\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}(\rho D),
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

обеспечивающих на сеточном уровне преобразования (4).

Недивергентная форма системы уравнений газовой динамики. Систему (1) запишем в эквивалентном недивергентном виде, исключив из нее якобиан D и используя уравнение

$$
\frac{\mathcal{D}D}{\mathcal{D}t}=D\nabla\cdot\vec{u},
$$

получающееся при дифференцировании по времени якобиана D с учетом первого уравнения системы (1):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathcal{D}\vec{x}}{\mathcal{D}t}=\vec{u},\\
&\frac{\mathcal{D}\rho}{\mathcal{D}t}+\rho\nabla\cdot\vec{v}+\vec{w}\cdot\nabla\rho=0,\\
&\rho\frac{\mathcal{D}\vec{v}}{\mathcal{D}t}+\rho\vec{w}\cdot\nabla\vec{v}+\nabla g-\nabla\cdot(\mu U)=0,\\
&\rho\frac{\mathcal{D}\varepsilon}{\mathcal{D}t}+\rho\vec{w}\cdot\nabla\varepsilon+g\nabla\cdot\vec{v}-\frac{1}{2}\mu U\cdot\cdot U+\nabla\cdot\vec{W}=0.
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

Запись сеточных задач газовой динамики в виде, аналогичном (6), обеспечивает возможность их обоснования в линейном приближении и влечет выполнение операторных свойств, допускающих эффективную реализацию различных вариантов неявных алгоритмов. При записи системы уравнений газовой динамики в виде (6) возможно отдельное рассмотрение и анализ акустических и конвективных процессов, представленных в уравнениях системы (6), соответственно, выражениями $(\rho\nabla\cdot\vec{v}),\nabla g,(g\nabla\cdot\vec{v})$ и $(\vec{w}\cdot\nabla\rho),(\rho\vec{w}\cdot\nabla\vec{v}),(\rho\vec{w}\cdot\nabla\varepsilon)$.

В качестве поясняющих примеров приведем некоторые свойства системы уравнений (6), выполнение сеточных аналогов которых представляется важным с точки зрения корректности и эффективности сеточных алгоритмов.

Свойства акустического и вязкого операторов. В приближении $\vec{w}=0, T=const$ непосредственным следствием системы уравнений (6) является следующая система уравнений акустики с вязкостью:

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\mathcal{D}\rho}{\mathcal{D}t}+\nabla\cdot\vec{v}=0, \rho_0\frac{\mathcal{D}\vec{v}}{\mathcal{D}t}+\nabla g-\nabla\cdot(\mu U)=0,$$
$$g=P_\rho\rho+\nu\,\Omega, \Omega=-\nabla\cdot\vec{v}, P_\rho=\frac{\partial P}{\partial\rho}(\rho_0), U=\nabla\vec{v}+(\nabla\vec{v})^*. \tag{7}$$

Здесь ρ_0=const – фоновое значение плотности, акустические возмущения плотности и скорости обозначены теми же буквами, что и соответствующие функции в (1), (6). Имеет смысл рассмотрение системы (7) с переменными "фоновыми" коэффициентами, в этом случае она является частью (моделью) более общей системы уравнений акустики, получаемой при линеаризации системы уравнений газовой динамики (6) вблизи решения. Мы будем считать здесь коэффициенты переменными по пространству и не зависящими от времени. Для любых скаляров Ω, ρ, вектора $\vec{v}$, симметричного диадика U справедливы соотношения:

$$\int_V \rho(P_\rho\nabla\cdot\vec{v})dV+\int_V \vec{v}\cdot\nabla(P_\rho\rho)dV=\int_{\partial V} P_\rho\rho\vec{v}\cdot\overrightarrow{dS},$$
$$\int_V (\nabla\cdot\vec{v})\nu\,\Omega dV+\int_V \vec{v}\cdot\nabla(\nu\,\Omega)dV=\int_{\partial V}\nu\,\Omega\vec{v}\cdot\overrightarrow{dS}, \tag{8}$$
$$\int_V \vec{v}\cdot(\nabla\cdot\mu U)dV+\frac{1}{2}\int_V \mu U\cdot\cdot\left[\nabla\vec{v}+(\nabla\vec{v})^*\right]dV=\int_{\partial V}\mu(U\cdot\vec{v})\cdot\overrightarrow{dS},$$

являющиеся в рассматриваемом случае свойствами акустического и вязкого операторов. Последнее свойство является интегральным следствием соотношений (4а). Здесь и далее $\overrightarrow{dS}$ – векторный элемент поверхности ∂V. Из (7), используя свойства (8), нетрудно получить энергетическое тождество

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\|\rho\|_a^2+\rho_0\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\|\vec{v}\|_{\rho_0}^2+2\|\Omega\|_\nu^2+2\|U\|_\mu^2=$$
$$=-2\int_{\partial V} g\vec{v}\cdot\overrightarrow{dS}+2\int_{\partial V}\mu(U\cdot\vec{v})\cdot\overrightarrow{dS}, a=\frac{P_\rho}{\rho_0}, \tag{9}$$
$$\|\rho\|_a^2\equiv\int_V a\rho^2dV, \|\vec{v}\|_{\rho_0}^2\equiv\int_V\rho_0\vec{v}^2dV, \|\Omega\|_\nu^2\equiv\int_V\nu\,\Omega^2dV, \|U\|_\mu^2=\int_V\mu U\cdot\cdot UdV.$$

Заметим, что для тензора U, определенного в (1), (7), последний интеграл по поверхности в правой части (9) упрощается:

$$\int_{\partial V} \mu(U \cdot \vec{v}) \cdot \overrightarrow{dS} = \int_{\partial V} \mu\left(\overrightarrow{dS} \cdot \nabla \vec{v}^2\right).$$

Тождество (9) обеспечивает корректность (единственность решения и устойчивость) начально-краевой задачи для системы уравнений (7) с краевыми условиями, зануляющими интегралы по поверхности ∂V в (9), или обеспечивающими неположительность правой части (9). Простейшие априорные оценки устойчивости операторно-разностных схем для этой задачи являются аналогами тождества (9). Поэтому свойства операторов (8), обеспечивающие выполнение (9), является принципиально важным для сеточных задач [1]. При невыполнении сеточных аналогов свойств (8) и при ненадлежащей постановке краевых условий (не обеспечивающей взаимосопряженность соответствующих сеточных операторов) могут существенно ухудшаться теоретически ожидаемые критерии корректности сеточных алгоритмов. В ряде задач, характеризующихся сильным локальным нагревом, сжатием, разрежением, существенна возможность использования неявных (по акустическим операторам) схем, для которых выполнение операторных свойств, соответствующих (9), обеспечивает безусловную устойчивость в линейном приближении, эффективность алгоритмов решения (и саму разрешимость) сеточной задачи на шаге по времени. При использовании явных алгоритмов не возникает проблемы решения сеточной задачи на шаге по времени, однако остаются важными гарантированные, теоретически ожидаемые критерии устойчивости и корректность сеточной задачи в целом.

Свойства конвективных операторов. Простейшую линейную модель конвективного переноса получаем из уравнения неразрывности (второе уравнение в (6)), пренебрегая возмущением постоянной по времени скорости и величиной $(\rho\nabla \cdot \vec{v})$, входящей в линейном приближении в акустический оператор:

$$\frac{\mathcal{D}\rho}{\mathcal{D}t} + \vec{w}_0 \cdot \nabla\rho = 0\,. \tag{10}$$

Здесь ρ – возмущение плотности, $\vec{w}_0$ – фоновая (невозмущенная) скорость переноса. Представим конвективное слагаемое из (10) в виде

$$\begin{aligned}\vec{w}_0 \cdot \nabla\rho &= \frac{1}{2}\left(\vec{w}_0 \cdot \nabla\rho + \nabla \cdot [\rho\vec{w}_0]\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{w}_0 \cdot \nabla\rho - \nabla \cdot [\rho\vec{w}_0]\right) = \\ &= \frac{1}{2}(C\rho + A\rho), C\rho \equiv \left(\vec{w}_0 \cdot \nabla\rho + \nabla \cdot [\rho\vec{w}_0]\right), A\rho \equiv -\rho\nabla \cdot \vec{w}_0.\end{aligned} \tag{11}$$

Используя следующие свойства оператора C:

$$(C\rho,\eta)\equiv\int\limits_V\left(\vec{w}_0\cdot\nabla\rho+\nabla\cdot[\rho\vec{w}_0]\right)\eta dV=-(C\eta,\rho)+2\int\limits_{\partial V}\rho\eta\vec{w}_0\cdot\overrightarrow{dS},, \quad (12)$$

получим тождество для функций, удовлетворяющих уравнению (10):

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\|\rho\|^2=\int\limits_V\rho^2(\nabla\cdot\vec{w}_0)dV-\int\limits_{\partial V}\rho^2\vec{w}_0\cdot\overrightarrow{dS}, \quad (13)$$

лежащее в основе анализа корректности начально-краевых задач для уравнения (10) при условии

$$\int\limits_{\partial V}\rho^2\vec{w}_0\cdot\overrightarrow{dS}\geq 0. \quad (14)$$

Свойства (12) означают кососимметричность оператора C при краевых условиях, обеспечивающих зануление интеграла в правой части (12) и его неотрицательность при выполнении условия (14), оператор A в (11) самосопряжен и ограничен. Выполнение сеточных аналогов свойств (11)-(13) конвективного переноса гарантирует корректность соответствующих сеточных аппроксимаций и справедливость априорных оценок устойчивости, являющихся аналогом тождества (13).

Аналогично рассмотрим свойства конвективного переноса в векторном уравнении движения (третье уравнение из (6)). Простейшую линейную модель векторного переноса получаем из этого уравнения, пренебрегая величиной ∇g, входящей в линейном приближении в акустический оператор:

$$\frac{\mathcal{D}\vec{v}}{\mathcal{D}t}+\vec{w}_0\cdot\nabla\vec{v}=0. \quad (15)$$

Здесь $\vec{w}_0$ – фоновая скорость переноса, $\vec{v}$ – возмущение скорости среды. Преобразуем выражение для переноса из (15) аналогично (11):

$$\begin{gathered}\vec{w}_0\cdot\nabla\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\vec{w}_0\cdot\nabla\vec{v}+\nabla\cdot[\vec{w}_0\vec{v}]\right)+\frac{1}{2}\left(\vec{w}_0\cdot\nabla\vec{v}-\nabla\cdot[\vec{w}_0\vec{v}]\right)=\\=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{C}\vec{v}+\boldsymbol{A}\vec{v}\right),\boldsymbol{C}\vec{v}\equiv\left[\vec{w}_0\cdot\nabla\vec{v}+\nabla\cdot(\vec{w}_0\vec{v})\right],\boldsymbol{A}\vec{v}\equiv-\vec{v}\nabla\cdot\vec{w}_0.\end{gathered} \quad (16)$$

Для оператора $\boldsymbol{C}$ верны свойства, аналогичные (12):

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{C}\vec{v},\vec{u})\equiv\int\limits_V\left(\vec{w}_0\cdot\nabla\vec{v}+\nabla\cdot[\vec{w}_0\vec{v}]\right)\cdot\vec{u}dV=\\=-(\boldsymbol{C}\vec{u},\vec{v})+2\int\limits_{\partial V}(\vec{v}\cdot\vec{u})\left(\vec{w}_0\cdot\overrightarrow{dS}\right).\end{gathered} \quad (17)$$

Как следствие (16), (17) получаем тождество для решения уравнения (15), аналогичное (13):

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\|\vec{v}\|^2 = \int\limits_V \vec{v}^2\left(\nabla\cdot\vec{w}_0\right)dV - \int\limits_{\partial V}\vec{v}^2\vec{w}_0\cdot\overrightarrow{dS}, \tag{18}$$

отражающее свойства корректности начально-краевых задач для уравнения (15) и их сеточных аппроксимаций, если сеточные операторы удовлетворяют аналогам свойств (16), (17).

Постановка начально-краевой задачи. Как и в [1], в данной работе рассматривается аксиально-симметричный случай в цилиндрической системе координат $\{r,\varphi,z\}$, когда отсутствует зависимость от угла φ, а область $V(t)\subset\mathbb{R}^3$ в каждый момент времени $t\geq 0$ получается вращением вокруг оси симметрии $r = 0$ замкнутой односвязной области $\sum(t)$, лежащей в плоскости, задаваемой уравнением $\varphi\equiv const$. Система уравнений (1) рассматривается в области $\sum(t)$, при этом φ – эйлерова координата. Предполагаем, что скорость движения системы координат $\vec{u}$ известна в любой момент времени и задается достаточно гладкой функцией. В качестве опорных взяты начальные (при $t = 0$) эйлеровы координаты $\left(r_0,z_0\right)$ кольцевых частиц среды.

В начальный момент времени $t = 0$ заданы начальные значения функций $\rho,T,\vec{v}$. Ставим краевое условие первого рода по температуре, связанное с учетом теплопроводности в уравнении энергии:

$$T\big|_{\partial\Sigma} = y_T. \tag{19}$$

Постановка других краевых условий по температуре и соответствующая операторная интерпретация сеточных операторов, описывающих процесс теплопроводности, достаточно подробно рассмотрены в [1], поэтому здесь этот вопрос не затрагивается. Что касается "газодинамических" краевых условий, то по той же причине здесь не рассматривается случай "лагранжевой" границы, то есть границы, на которой скорость $\vec{w}$ системы координат относительно скорости среды равна нулю. Считаем границу "эйлеровой", то есть на границе скорость $\vec{u}$ системы координат равна нулю: $\vec{w}=\vec{v}$. Для постановки краевых условий разобьем границу $\partial\Sigma$ области Σ на четыре части:

$$\partial\sum=\gamma_{v0}+\gamma_{v1}+\gamma_{v2}+\gamma_{v3},$$

и рассмотрим четыре типа традиционных краевых условий.

На границе γ_{v0} ставим условие непротекания-прилипания:

$$\vec{v}\big|_{\gamma_{v0}} = 0. \tag{20}$$

На границе γ_{v1} – условие непротекания-скольжения:

$$\vec{n}\left(\vec{n}\cdot\vec{v}\right)\big|_{\gamma_{v1}} = 0,\ \mu\vec{n}\cdot\boldsymbol{U} = 0. \tag{21}$$

Здесь и далее $\vec{n}$ – вектор единичной внешней нормали к границе $\partial\Sigma$. На границе γ_{v2} задаем параметры потока, входящего в расчётную область:

$$\vec{v}\big|_{\gamma_{v2}} = \vec{y}_v, \rho\big|_{\gamma_{v2}} = y_\rho, \tag{22}$$

в предположении отсутствия существенных возмущений, распространяющихся из области Σ через границу γ_{v2}. При сверхзвуковой нормальной к границе скорости потока краевые условия (22) являются корректными с точки зрения характеристических свойств системы уравнений газовой динамики.

Границу γ_{v3} считаем границей "свободного выхода", на ней полагаем равными нулю потоки, связанные со второй вязкостью и задаем связь полного давления с нормальной скоростью:

$$\mu\vec{n}\cdot \boldsymbol{U}\big|_{\gamma_{v3}} = 0, \left(g - a_{v3}\vec{n}\cdot\vec{v}\right)\big|_{\gamma_{v3}} = b_{v3}. \tag{23}$$

Здесь $a_{v3} \geq 0, b_{v3}$ – заданные (переменные в общем случае) коэффициенты. Считаем, что нормальная скорость переноса на данной границе положительна, что обеспечивает корректность "конвективных" линейных задач (10), (15).

Краевые условия (23) и (22) (при дозвуковой скорости входящего потока) являются искусственными и могут применяться при численном моделировании задач, область определения решения которых, старого говоря, не ограничена. Существуют различные варианты постановки краевых условий на искусственных границах, учитывающие характеристические свойства системы уравнений газовой динамики, волновые свойства уравнений Эйлера и Навье-Стокса в акустическом приближении и свойства решения нелинейной задачи в неограниченной области. Их анализ и достаточно полную библиографию можно найти, например, в [8,9]. При использовании таких условий возникают сеточные задачи, для которых зачастую открыт вопрос теоретического обоснования корректности (устойчивости в линейном приближении и разрешимости) нелинейных схем. В этих случаях он решается эвристически, на основе тестовых расчетов. Это касается в первую очередь краевых условий, в которых используются производные газодинамических параметров по пространству. В настоящее время самостоятельной научной проблемой, не решенной в полной мере, является получение эффективных критериев устойчивости в линейном приближении и построение эффективных алгоритмов решения (в случае неявных схем) сеточных задач с "прозрачными", "неотражающими" краевыми условиями, условиями "сноса" решения. В данной работе мы рассматриваем краевые условия алгебраического типа [8,9] на искусственной границе, в случае которых указанные проблемы решаются путем обеспечения выполнения соответствующих свойств сеточных операторов. Заметим, что вместо второго условия (23) может быть задана нелинейная связь величин g, $\vec{n}\cdot\vec{v}$.

3. Сеточные операторы. В области $\Sigma(t)$ зададим треугольную сетку $\omega(t)$, обозначим через $\omega_x(t)$ множество ее узлов $\vec{x}(t)$, через $\omega_\Delta(t)$ – множество ее ячеек $\Delta(t)$, через $\Sigma_\omega(t)$ – сеточную область, являющуюся объединением ячеек $\Delta\in\omega_\Delta$, через $\partial\Sigma_\omega(t)$ – границу сеточной области, через $\omega_\gamma(t)$ – множество граничных узлов $\vec{x}_j\in\partial\Sigma_\omega$. Окрестностью $Ш_j$ любого узла $\vec{x}_j\in\omega_x$ будем называть множество смежных с ним узлов и треугольных ячеек. Элементы (узлы и ячейки) в окрестности $Ш_j$ любого узла $\vec{x}_j\in\omega_x$ будем нумеровать против часовой стрелки, при этом вершинами ячейки $\Delta_l \in Ш_j$ являются узлы $\vec{x}_j,\vec{x}_l,\vec{x}_{l+1}$. В окрестности любого узла $\vec{x}_j=\{r_j,z_j\}\in\omega_x$ определим стандартную базисную кусочно-линейную функцию φ_j [10]:

$$\forall\vec{x}=\{r,z\}\in\Delta_l\in Ш_j,\varphi_j\Big|_{\Delta_l}=\frac{\vec{N}_{l,l+1}\cdot\vec{L}_{x,l}}{2s_{\Delta_l}}$$

$$\vec{N}_{l,l+1}=\{z_{l+1}-z_l,r_l-r_{l+1}\},\vec{L}_{x,l}=\{r_l-r,z_l-z\},G_j=supp\,\varphi_j=\bigcup\left(\Delta_l\in Ш_j\right),$$

где $s_{\Delta l}$ – площадь ячейки Δ_l, $\vec{N}_{l,l+1}$ – правая нормаль к отрезку $[\vec{x}_l,\vec{x}_{l+1}]$, $\vec{L}_{x,l}$ – направленный вектор отрезка $[\vec{x},\vec{x}_l]$. В дальнейших рассуждениях используются следующие формулы:

$$\frac{D\varphi_j}{Dt}\equiv 0;\quad \forall\vec{x}\in\Delta_l\in Ш_j:\ \nabla\varphi_j\Big|_{\Delta_l}=-\frac{\vec{N}_{l,l+1}}{2s_{\Delta_l}}\equiv const,$$

$$\sum_{\vec{x}_j\in\omega_x}\int_{G_j}fq_j\varphi_j rdrdz\equiv\sum_{\Delta\in\omega_\Delta}\int_\Delta f\sum_{\vec{x}_j\in\Delta}\left(q_j\varphi_j\right)rdrdz\equiv\int_{\Sigma_\omega}fq_л rdrdz,q_л\equiv\sum_{\vec{x}_j\in\omega_x}q_j\varphi_j,\qquad(24)$$

$$\int_{\Sigma_\omega}\nabla*Ardrdz\equiv\int_{\partial\Sigma_\omega}d\vec{S}*A+\int_{\Sigma_\omega}\Gamma(\alpha)Adrdz,$$

$$\Gamma(1)A\equiv 0,\Gamma(0)A\equiv-\vec{i}_rA,\Gamma(2)A\equiv-A_{\varphi\varphi}\vec{i}_r+A_{\varphi r}\vec{i}_\varphi.$$

где A – тензор ранга $\alpha=0,1,2$, $(*)$– знак внешнего $(\alpha=0)$ или внутреннего $(\alpha=1,2)$ произведения, $d\vec{S}=\vec{n}rdl,dl$ – элемент длины линии $\partial\Sigma_\omega$, f – любая кусочно-непрерывная функция, определенная на Σ_ω, q – произвольная сеточная функция, определенная на ω_x. Определим объем узла по формуле [1]:

$$\forall \vec{x}_j \in \omega_x : V_{x,j} = \int\limits_{G_j} \varphi_j r dr dz = \frac{1}{12} \sum_{\Delta_l \in Ш_j} s_l (2r_j + r_l + r_{l+1}). \qquad (25)$$

Определим скалярное произведение сеточных функций в виде, допускающем использование двух эквивалентных способов его записи (в виде суммы по узлам сетки от произведения сеточных функций и в виде интеграла от кусочно-линейного восполнения этого произведения):

$$\forall a, b \in B_{x,\alpha}$$

$$(a,b)_x = \sum_{\vec{x}_j \in \omega_x} V_{x,j} a_j * b_j = \int\limits_{\Sigma_\omega} (a*b)_л r dr dz, (a*b)_л \equiv \sum_{j \in \omega_x} a_j * b_j \varphi_j. \qquad (26)$$

Здесь $B_{x,\alpha}$ $(\alpha = 0,1,2)$ – пространства сеточных функций ранга α, определенных на множестве ω_x, $(*) = (\circ), (\cdot), (\cdot\cdot)$ – знак произведения скаляров, внутреннего произведения векторов, двойного внутреннего произведения диадиков, соответственно. Определим линейные операторы

$$\nabla_x \cdot \in L(B_{x,1} \to B_{x,0}), \nabla_x \cdot \in L(B_{x,2} \to B_{x,1}),$$
$$\nabla_x \in L(B_{x,0} \to B_{x,1}), \nabla_x \in L(B_{x,1} \to B_{x,2})$$

– сеточные аналоги операторов дивергенции вектора и диадика, градиента скаляра и вектора [1] соответственно:

$$\forall : \vec{v} \in B_{x,1}, p \in B_{x,0}, \boldsymbol{U} \in B_{x,2}, \ \vec{x}_j \in \omega_x :$$

$$(\nabla_x \cdot \vec{v})_j = \frac{1}{V_{x,j}} \int\limits_{G_j} \nabla \cdot \vec{v}_л \varphi_j r dr dz, (\nabla_x \cdot \boldsymbol{U})_j = \frac{1}{V_{x,j}} \int\limits_{G_j} \nabla \cdot \boldsymbol{U}_л \varphi_j r dr dz, \qquad (27)$$

$$(\nabla_x p)_j = \frac{1}{V_{x,j}} \int\limits_{G_j} \nabla p_л \varphi_j r dr dz, (\nabla_x \vec{v})_j = \frac{1}{V_{x,j}} \int\limits_{G_j} \nabla \vec{v}_л \varphi_j r dr dz.$$

В [1] показано, что операторы ∇_x и $(\nabla_x \cdot)$ аппроксимируют свои дифференциальные аналоги с первым порядком точности. Полностью аналогично доказывается факт локальной аппроксимации для операторов $\nabla_x, (\nabla_x \cdot)$, а также для других вводимых ниже операций сеточного дифференцирования по пространству. Кроме того, имеют место базовые интегральные свойства этих операторов:

$$\forall p \in B_{x,0}, \vec{v} \in B_{x,1} : (\nabla_x \cdot \vec{v}, p)_x + (\nabla_x p, \vec{v})_x = \int\limits_{\partial\Sigma_\omega} p_л \vec{v}_л \cdot \overrightarrow{dS},$$
$$\forall \boldsymbol{U} \in B_{x,2}, \vec{v} \in B_{x,1} : (\nabla_x \cdot \boldsymbol{U}, \vec{v})_x + (\nabla_x \vec{v}, \boldsymbol{U})_x = \int\limits_{\partial\Sigma_\omega} \vec{v}_л \cdot \left(\overrightarrow{dS} \cdot \boldsymbol{U}_л\right). \qquad (28)$$

Как и в [1], введем граничные линейные операторы $\Phi_\gamma(\alpha,\ *)\in L(B_{x,\alpha}\to B_{x,\beta})$, позволяющие представить свойства (28) в операторной форме:

$$\forall\vec{x}_j\in\omega_x,\ u\in B_{x,\alpha}:\ \left[\Phi_\gamma(\alpha,\ *)u\right]_j=\begin{cases}\dfrac{1}{V_j}\displaystyle\int_{\partial\Sigma_\omega}\varphi_j d\vec{S}*u_л,\ x_j\in\omega_\gamma,\\ 0,x_j\in\omega_x\setminus\omega_\gamma.\end{cases}\tag{28а}$$

Здесь $\alpha,\beta=0,1,2$, $(*)$ – знак внешнего $((*)=(\circ))$или внутреннего $((*)=(\cdot))$ произведения тензоров. В связи с операторами (27) и их свойствами (28), нас интересуют четыре варианта граничных операторов (28а):

1) $\alpha=0,\ \beta=1,\ (*)=(\circ),\ \Phi_\gamma\equiv\Phi_\gamma(0,\ \circ)$;

2) $\alpha=1,\ \beta=0,\ (*)=(\cdot),\ (\Phi_\gamma\cdot)\equiv\Phi_\gamma(1,\ \cdot)$;

3) $\alpha=1,\ \beta=2,\ (*)=(\circ),\ \Phi_\gamma\equiv\Phi_\gamma(1,\ \circ)$;

4) $\alpha=2,\ \beta=1,\ (*)=(\cdot),\ \Phi_\gamma\equiv\Phi_\gamma(2,\ \cdot)$.

С учётом этого определения граничных операторов, свойства (28) могут быть записаны, как и в [1], в операторной форме:

$$\begin{gathered}(\nabla_x)^*=-(\nabla_x\cdot)+(\Phi_\gamma\cdot),\ (\nabla_x\cdot)^*=-\nabla_x+\Phi_\gamma,\\ (\nabla_x)^*=-(\nabla_x\cdot)+(\Phi_\gamma\cdot),\ (\nabla_x\cdot)^*=-\nabla_x+\Phi_\gamma.\end{gathered}\tag{28б}$$

Граничные операторы (28а) и свойства (28б) играют определяющую роль для постановки сеточных краевых условий и обеспечения корректности сеточной задачи.

4. Дифференциальная по времени система сеточных уравнений газовой динамики.

Полная консервативность. Аппроксимируем дивергентную форму (1) системы уравнений газовой динамики следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathcal{D}\vec{x}}{\mathcal{D}t}=\vec{u},\ \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}(\rho V_x)=-V_x\nabla_x^{\rho}\cdot(\rho\vec{w}),\ \vec{w}=\vec{v}-\vec{u},\\
&\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}(\rho\vec{v}V_x)=-V_x\left(\nabla_x g+\nabla_x^{\vec{v}}\cdot(\rho\vec{w}\vec{v})-\nabla_x\cdot(\mu U)\right)\\
&g=p-\nu\nabla_x\cdot\vec{v},\ p=P(\rho,T),\ U=\nabla_x\vec{v}+(\nabla_x\vec{v})^*,\\
&\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}(\rho\varepsilon V_x)=-V_x\left(g\nabla_x\cdot\vec{v}+\nabla_x^{\varepsilon}\cdot(\rho\varepsilon\vec{w})+\nabla_x\cdot\vec{W}-\frac{1}{2}(\mu U\cdot\cdot U)\right)\\
&\vec{W}=-\theta\nabla_x T,\ \varepsilon=E(\rho,T).
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Здесь $\rho,T,p,g,V,\nu,\mu,\theta\in B_{x,0};\ \vec{x},\vec{u},\vec{v},\vec{W}\in B_{x,1};\ U\in B_{x,2}$ – абстрактные функции времени t, объемы $V=V(\vec{x})$ вычисляются по формуле (25). Аппроксимация дивергенции от произведений функций, выражающих потоки массы $(\rho\vec{w})$, количества движения $(\rho\vec{w}\vec{v})$ и внутренней энергии $(\rho\varepsilon\vec{w})$, осуществляется следующим образом:

$$
\forall\vec{x}_j\in\omega_x:\ \left[\nabla_x^{\rho}\cdot(\rho\vec{w})\right]_j\equiv\frac{1}{V_{x,j}}\int_{G_j}\nabla\cdot(\rho_л\vec{w}_л)\varphi_j r\,dr\,dz,
\tag{30а}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left[\nabla_x^{\vec{v}}\cdot(\rho\vec{w}\vec{v})\right]_j\equiv\frac{1}{2}\vec{v}_j\left[\nabla_x^{\rho}\cdot(\rho\vec{w})\right]_j+\\
&+\frac{1}{V_{x,j}}\left(\int_{G_j}\rho_л\vec{w}_л\cdot\nabla\vec{v}_л\varphi_j r\,dr\,dz+\frac{1}{2}\int_{G_j}\vec{v}_л\nabla\cdot(\rho_л\vec{w}_л)\varphi_j r\,dr\,dz\right),
\end{aligned}
\tag{30б}
$$

$$
\left[\nabla_x^{\varepsilon}\cdot(\rho\varepsilon\vec{w})\right]_j\equiv\int_{G_j}\rho_л\vec{w}_л\cdot(\nabla\varepsilon_л)\varphi_j r\,dr\,dz+\varepsilon_j\left[\nabla_x^{\rho}\cdot(\rho\vec{w})\right]_j.
\tag{30в}
$$

При выборе (из различных возможных вариантов) способа аппроксимации дивергенции потоков мы руководствовались возможностью выполнения сеточных аналогов соотношений (4), обеспечивающих полную консервативность, возможностью записи сеточной системы уравнений в недивергентном виде, аналогичном (6) и возможностью обеспечения дивергентности введенных сеточных полилинейных операторов. Другие варианты аппроксимации дивергенции потоков получаются при использовании кусочно-линейных восполнений от любой комбинации функций, входящих в произведение, к которому применяется инвариантный дифференциальный оператор в (30). С точки зрения простоты и экономичности реализации, предпочтительнее вариант, когда берется кусочно-линейное восполнение от произведения всех функций, входящих в определение соответствующего потока. Однако необходимость выполнения указанных выше свойств приводит к наименее предпочтительному (с точки зрения простоты формул реализации сеточных полилинейных операторов) варианту, когда для получения расчетных формул приходится интегрировать полином наивысшего порядка – произведение кусочно-линейных восполнений всех функций, входящих в определение потока.

Дивергентность аппроксимации конвективных потоков. Докажем дивергентность сеточных полилинейных операторов (30), используя формулы (24). Для сеточной дивергенции потока массы имеем:

$$\sum_{\vec{x}_j\in\omega_x} V_{x,j}\nabla_x^{\rho}\cdot(\rho\vec{w}) = \sum_{\vec{x}_j\in\omega_x}\int_{G_j}\nabla\cdot(\rho_л\vec{w}_л)\varphi_j rdrdz = \int_{\Sigma_\omega}\nabla\cdot(\rho_л\vec{w}_л)\sum_{\vec{x}_j\in\omega_x}\varphi_j rdrdz =$$
$$= \int_{\Sigma_\omega}\nabla\cdot(\rho_л\vec{w}_л)rdrdz = \int_{\partial\Sigma_\omega}\rho_л\vec{w}_л\cdot\vec{dS}.$$

Для сеточной дивергенции потока количества движения, используя последнюю формулу из (24), имеем:

$$\sum_{\vec{x}_j\in\omega_x} V_{x,j}\left[\frac{1}{2}\vec{v}_j\left[\nabla_x^{\rho}\cdot(\rho\vec{w})\right]_j + \frac{1}{V_{x,j}}\left(\int_{G_j}\rho_л\vec{w}_л\cdot\nabla\vec{v}_л\varphi_j rdrdz + \frac{1}{2}\int_{G_j}\vec{v}_л\nabla\cdot(\rho_л\vec{w}_л)\varphi_j rdrdz\right)\right] =$$
$$= \int_{\partial\Sigma_\omega}\left\{\frac{1}{2}\sum_{\vec{x}_j\in\omega_x}\left[\vec{v}_j\varphi_j\right]\nabla\cdot(\rho_л\vec{w}_л) + \rho_л\vec{w}_л\cdot\nabla\vec{v}_л\varphi_j + \frac{1}{2}\sum_{\vec{x}_j\in\omega_x}\left[\varphi_j\right]\vec{v}_л\nabla\cdot(\rho_л\vec{w}_л)\right\}rdrdz =$$
$$= \int_{\partial\Sigma_\omega}\left\{\frac{1}{2}\vec{v}_л\nabla\cdot(\rho_л\vec{w}_л) + \rho_л\vec{w}_л\cdot\nabla\vec{v}_л\varphi_j + \frac{1}{2}\vec{v}_л\nabla\cdot(\rho_л\vec{w}_л)\right\}rdrdz = \int_{\Sigma_\omega}\nabla\cdot(\rho_л\vec{w}_л\vec{v}_л)rdrdz =$$
$$= \int_{\partial\Sigma_\omega}\rho_л\vec{v}_л\vec{w}_л\cdot\vec{dS} + \int_{\Sigma_\omega}\Gamma(2)(\rho_л\vec{v}_л\vec{w}_л)drdz.$$

Последнее слагаемое в этой формуле, как и в последней формуле из (24), обусловлено криволинейностью системы координат (зависимостью от угла φ направления координатных векторов $(\vec{i}_r,\vec{i}_\varphi)$. Аналогично, для дивергенции потока внутренней энергии получим:

$$\sum_{\vec{x}_j\in\omega_x} V_{x,j}\nabla_x^{\varepsilon}\cdot(\rho\varepsilon\vec{w}) = \sum_{\vec{x}_j\in\omega_x}\int_{G_j}\rho_л\vec{w}_л\cdot(\nabla\varepsilon_л)\varphi_j + (\nabla\cdot\rho_л\vec{w}_л)\varepsilon_j\varphi_j rdrdz =$$
$$= \int_{\Sigma_\omega}\rho_л\vec{w}_л\cdot(\nabla\varepsilon_л) + (\nabla\cdot\rho_л\vec{w}_л)\varepsilon_л rdrdz = \int_{\Sigma_\omega}\nabla\cdot(\rho_л\vec{w}_л\varepsilon_л)rdrdz = \int_{\partial\Sigma_\omega}\rho_л\varepsilon_л\vec{w}_л\cdot\vec{dS}.$$

Из дивергентности конвективных слагаемых так же, как и в лагранжевом случае [1], немедленно следует выполнение сеточных аналогов балансов массы, импульса и внутренней энергии. Выпишем здесь лишь сеточный баланс внутренней энергии, который понадобится далее для иллюстрации получения баланса полной энергии:

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}(\rho,\varepsilon)_x = -(g,\nabla_x\cdot\vec{v})_x + \frac{1}{2}(\mu U,U)_x - \int\limits_{\partial\Sigma_\omega} d\vec{S}\cdot\left(\rho_л\vec{w}_л\varepsilon_л + \vec{W}_л\right) \quad (31)$$

Сеточные балансы кинетической и полной энергии. Для получения сеточного баланса кинетической энергии умножим уравнение движения скалярно на $\vec{v}$ и преобразуем слагаемое с производной по времени по формуле (3):

$$\frac{\vec{v}^2}{2}\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}(\rho V_x) + \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\left(\rho V_x\frac{\vec{v}^2}{2}\right) = -V_x\left(\vec{v}\cdot\nabla_x g + \vec{v}\cdot\nabla_x^{\vec{v}}\cdot(\rho\vec{w}\vec{v}) - \vec{v}\cdot\nabla_x\cdot(\mu U)\right) \quad (32)$$

Получим интегральный сеточный аналог формулы (4), используя определения (30) конвективных сеточных операторов и сеточное уравнение неразрывности из (29):

$$\begin{aligned}
&\left(\vec{v},\nabla_x^{\vec{v}}\cdot(\rho\vec{w}\vec{v})\right)_x = \frac{1}{2}\left(\vec{v}^2,\nabla_x^{\rho}\cdot(\rho\vec{w})\right)_x + \\
&+\sum_{\vec{x}_j\in\omega_x}\vec{v}_j\cdot\left(\int\limits_{G_j}\rho_л\vec{w}_л\cdot\nabla\vec{v}_л\varphi_j rdrdz + \frac{1}{2}\int\limits_{G_j}\vec{v}_л\nabla\cdot(\rho_л\vec{w}_л)\varphi_j rdrdz\right) = \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{v}^2}{V_x},\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}(\rho V_x)\right)_x + \int\limits_{\Sigma_w}\rho_л(\vec{w}_л\vec{v}_л)\cdot\cdot\nabla\vec{v}_л rdrdz + \\
&+\frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_w}\vec{v}_л^2\nabla\cdot(\rho_л\vec{w}_л)rdrdz = -\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{v}^2}{V_x},\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}(\rho V_x)\right)_x + \\
&+\frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_w}\nabla\cdot\left(\vec{w}_л\rho_л\vec{v}_л^2\right)rdrdz = -\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{v}^2}{V_x},\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}(\rho V_x)\right)_x + \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Sigma_w}\overline{d\vec{S}}\cdot\left(\vec{w}_л\rho_л\vec{v}_л^2\right).
\end{aligned} \quad (33)$$

Суммируя (32) по всем узлам сетки и складывая результат с (33), получаем баланс кинетической энергии:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\left(\rho,\vec{v}^2\right)_x = -(\vec{v},\nabla_x g)_x + \left(\vec{v},\nabla_x\cdot(\mu U)\right)_x + \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Sigma_w}\overline{d\vec{S}}\cdot\left(\vec{w}_л\rho_л\vec{v}_л^2\right). \quad (34)$$

Используя определение (см. (29)) тензора U и интегральное свойство (28), имеем сеточный аналог формулы (4а):

$$
\begin{aligned}
&\left(\vec{v},\nabla_x\cdot(\mu U)\right)_x+\frac{1}{2}(\mu U,U)_x=\\
&=-\left(\nabla_x\vec{v},(\mu U)\right)_x+\int\limits_{\partial\Sigma_\omega}\vec{v}_л\cdot\left(\overrightarrow{dS}\cdot U_л\right)+\frac{1}{2}\left(\mu U,\left(\nabla_x\vec{v}+[\nabla_x\vec{v}]^*\right)\right)_x= \qquad (35)\\
&=\int\limits_{\partial\Sigma_\omega}\vec{v}_л\cdot\left(\overrightarrow{dS}\cdot U_л\right).
\end{aligned}
$$

Складывая балансы кинетической и внутренней энергии (34), (31) с учетом (35) и (28), получаем баланс полной энергии:

$$
\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\left(\rho,\varepsilon+\frac{\vec{v}^2}{2}\right)_x=-\int\limits_{\partial\Sigma_w}\overrightarrow{dS}\cdot\left[\vec{w}_л\rho_л\left(\varepsilon_л+\frac{\vec{v}_л^2}{2}\right)-U_л\cdot\vec{v}_л+\vec{v}_л g_л+\vec{W}_л\right].
$$

Таким образом, сеточная система уравнений газовой динамики (29) является полностью консервативной.

Сеточные краевые условия. Разобьем сеточную границу $\partial\Sigma_\omega$ на четыре части: $\partial\Sigma_\omega=\partial\Sigma_{\omega0}+\partial\Sigma_{\omega1}+\partial\Sigma_{\omega2}+\partial\Sigma_{\omega3}$ в соответствии с разбиением границы в исходной дифференциальной задаче (1), (19)-(23). Считаем, что пересечение смежных частей границы происходит в узле сетки, который является крайней точкой обеих частей границы. Каждый из граничных операторов из (28а), в соответствии с разбиением границы, представим в виде суммы четырех операторов:

$$
\Phi_\gamma(\alpha,\ *)=\Phi_{\gamma0}(\alpha,\ *)+\Phi_{\gamma1}(\alpha,\ *)+\Phi_{\gamma2}(\alpha,\ *)+\Phi_{\gamma3}(\alpha,\ *),
$$

$$
\forall\vec{x}_j\in\omega_x,\ u\in B_{x,\alpha}:\ \left(\Phi_{\gamma k}(\alpha,*)u\right)_j=\begin{cases}\dfrac{1}{V_j}\displaystyle\int\limits_{\partial\Sigma_{\omega k}}\varphi_j d\vec{S}*u_л\ ,\ \vec{x}_j\in\Sigma_{\omega k},\\ 0,\ \vec{x}_j\notin\Sigma_{\omega k}\ .\end{cases} \qquad (36)
$$

где k=0,1,2,3. Нетрудно видеть, что, как и в [1],

$$
\Phi_{\gamma k}=\left(\Phi_{\gamma k}\cdot\right)^*. \qquad (37)
$$

Введем операторы δ_k проектирования сеточных функций на соответствующую часть границы:

$$
\forall f\in B_{x,\alpha}:(\delta_k f)_j=\begin{cases}f_j,\vec{x}_j\in\Sigma_{\omega k}\\ 0,\vec{x}_j\notin\Sigma_{\omega k}\end{cases},\ \sum_{k=0}^{3}\delta_k\equiv\delta_\gamma\,.
$$

Очевидно что $\delta_k=\delta_k^*\geq 0$. Сеточные краевые условия, аппроксимирующие краевые условия (19) - (23), формулируем в следующем операторном виде (см. также [1]):

$$\delta_\gamma T = y_T,\ \delta_0\vec{v}=0;\quad \Phi_{\gamma 1}\cdot\vec{v}=0, \Phi_{\gamma 1}\cdot(\mu U)=0;$$
$$\delta_2\vec{v}=\vec{y}_v, \delta_2\rho=y_\rho;\quad \Phi_{\gamma 3}\cdot(\mu U)=0,\ \Phi_{\gamma 3}g-\Phi_{\gamma 3}a_v\Phi_{\gamma 3}\cdot\vec{v}=\Phi_{\gamma 3}y_v. \tag{38}$$

Здесь μ, $\mu_0, \vec{y}_2, z_2, a_v, y_v$ – известные "граничные" сеточные функции, равные нулю во внутренних узлах сетки ω_x. Сеточная система операторных уравнений (29) с краевыми условиями (38) является некорректной, в частности, переопределенной (в ней уравнений больше чем неизвестных). Поэтому в дальнейшем необходимо указать способ включения краевых условий (38) в систему сеточных операторных уравнений (28), при котором сеточная задача будет корректной.

5. Недивергентная форма сеточной системы уравнений. Преобразуем правую и левую части уравнения неразрывности из (29):

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}(\rho V_x)=V_x\frac{\mathcal{D}\rho}{\mathcal{D}t}+\rho\frac{\mathcal{D}V_x}{\mathcal{D}t}=V_x\frac{\mathcal{D}\rho}{\mathcal{D}t}+\rho V_x\nabla_x\cdot\vec{u},$$

$$V_{x,j}\left[\nabla_x^\rho\cdot(\rho\vec{w})\right]_j=\int_{G_j}\nabla\cdot(\rho_л\vec{w}_л)\varphi_j rdrdz=\int_{G_j}\rho_л(\nabla\cdot\vec{w}_л)\varphi_j rdrdz+$$

$$+\int_{G_j}\vec{w}_л\cdot(\nabla\rho_л)\varphi_j rdrdz=V_{x,j}\left[\rho\nabla_x\cdot\vec{w}+\vec{w}\cdot\nabla_x\rho+R_\rho(\rho,\vec{w})\right]_j,\ \vec{x}_j\in\omega_x,$$

$$V_{x,j}\left[R_\rho(\rho,\vec{w})\right]_j\equiv\int_{G_j}(\vec{w}_л-\vec{w}_j)\cdot(\nabla\rho_л)\varphi_j rdrdz+\int_{G_j}(\rho_л-\rho_j)(\nabla\cdot\vec{w}_л)\varphi_j rdrdz,$$

тогда сеточное уравнение неразрывности запишется в виде:

$$\frac{\mathcal{D}\rho}{\mathcal{D}t}+\rho\nabla_x\cdot\vec{v}+\vec{w}\cdot\nabla_x\rho+R_\rho(\rho,\vec{w})=0. \tag{39a}$$

Здесь билинейный оператор $R_\rho(\rho,\vec{w})$ представляет собой дисбаланс между дивергентной и недивергентной формой записи сеточного уравнения неразрывности. Этот оператор дивергентен:

$$\left(1,R_\rho(\rho,\vec{w})\right)_x=\int_{\Sigma_\omega}(\vec{w}_л-\vec{w}_л)\cdot(\nabla\rho_л)rdrdz+\int_{\Sigma_\omega}(\rho_л-\rho_л)(\nabla\cdot\vec{w}_л)rdrdz=0,$$

а из формулы

$$V_{x,j}\left[R_\rho(\rho,\vec{w})\right]_j=\int_{G_j}\vec{L}_{x,j}\cdot\nabla\vec{w}_л\cdot(\nabla\rho_л)\varphi_j rdrdz+\int_{G_j}\vec{L}_{x,j}\cdot(\nabla\rho_л)(\nabla\cdot\vec{w}_л)\varphi_j rdrdz$$

следует ограниченность порождаемых им линейных операторов $R_\rho(\circ,\vec{w})$, $R_\rho(\rho,\circ)$:

$$\left\|R_\rho\left(\circ,\vec{w}\right)\right\| \le c\max_{\vec{x}\in\Sigma_\omega}\left|\nabla\vec{w}_л\right|, \quad \left\|R_\rho\left(\rho,\circ\right)\right\| \le c\max_{\vec{x}\in\Sigma_\omega}\left|\nabla\cdot\rho_л\right|$$

(здесь и далее c – постоянная, не зависящая от шага сетки). С аппроксимационной точки зрения дисбалансный добавок $R_\rho\left(\rho,\vec{w}\right)$ в недивергентное уравнение неразрывности имеет первый порядок по h локально. Аналогично получим недивергентную запись сеточных уравнений движения и энергии:

$$\rho\frac{\mathcal{D}\vec{v}}{\mathcal{D}t}+\rho\vec{w}\cdot\nabla_x\vec{v}+\left(\nabla_x g-\nabla_x\cdot\left(\mu U\right)\right)+R_v\left(\rho,\vec{w},\vec{v}\right)=0, \tag{39б}$$

$$\rho\frac{\mathcal{D}\varepsilon}{\mathcal{D}t}+\rho\vec{w}\cdot\left(\nabla_x\varepsilon\right)+\left(g\nabla_x\cdot\vec{v}+\nabla_x\cdot\vec{W}-\frac{1}{2}\left(\mu U\cdot\cdot U\right)\right)+R_\varepsilon\left(\rho,\vec{w},\varepsilon\right)=0, \tag{39в}$$

где "трилинейные" операторы R_v, R_ε определяются следующим образом:

$$V_{x,j}\left[R_v\left(\rho,\vec{w},\vec{v}\right)\right]_j \equiv \int_{G_j}\left[\frac{1}{2}\left(\vec{v}_л-\vec{v}_j\right)\nabla\cdot\left(\rho_л\vec{w}_л\right)+\left(\rho_л\vec{w}_л-\rho_j\vec{w}_j\right)\cdot\left(\nabla\vec{v}_л\right)\right]\varphi_j r dr dz,$$

$$V_{x,j}\left[R_\varepsilon\left(\rho,\vec{w},\varepsilon\right)\right]_j \equiv \int_{G_j}\left(\rho_л\vec{w}_л-\rho_j\vec{w}_j\right)\cdot\left(\nabla\varepsilon_л\right)\varphi_j r dr dz, \vec{x}_j\in\omega_x.$$

Порождаемые ими линейные операторы являются ограниченными, как и в случае оператора R_ρ.

6. Линейное приближение. Рассмотрим систему сеточных операторных уравнений (39) в линейном приближении, считая функцию $E\left(\rho,T\right)$, определяющую внутреннюю энергию ε, не зависящей от плотности ρ:

$$\frac{\mathcal{D}\rho}{\mathcal{D}t}+\rho_0\nabla_x\cdot\vec{v}+\vec{w}_0\cdot\nabla_x\rho=0,\ \vec{w}_0=\vec{v}_0-\vec{u},$$

$$\rho_0\frac{\mathcal{D}\vec{v}}{\mathcal{D}t}+\rho_0\vec{w}_0\cdot\nabla_x\vec{v}+\nabla_x g-\nabla_x\cdot\left(\mu U\right)=0,\ g=p-\nu\nabla_x\cdot\vec{v}=p-\nu\Omega,$$

$$p=P_\rho\rho+P_T T,\ U=\nabla_x\vec{v}+\left(\nabla_x\vec{v}\right)^*,\ P_\rho\equiv\frac{\partial P}{\partial\rho}\left(\rho_0,T_0\right),\ P_T\equiv\frac{\partial P}{\partial T}\left(\rho_0,T_0\right), \tag{40}$$

$$\rho_0\frac{\mathcal{D}\varepsilon}{\mathcal{D}t}+\rho_0\vec{w}_0\cdot\left(\nabla_x\varepsilon\right)+p_0\nabla_x\cdot\vec{v}+\nabla_x\cdot\vec{W}=0,$$

$$\vec{W}=-\theta\nabla_x T,\ \varepsilon=E_T T,\ E_T=\frac{\partial E}{\partial T}\left(T_0\right).$$

Здесь $\rho_0, T_0, \vec{v}_0$ – "фоновые" сеточные функции, удовлетворяющие (с достаточной точностью) сеточным уравнениям (39) (или (29)), ρ, T, $\vec{v}$ – их малые возмущения. При написании системы (40) мы пренебрегли всеми слагаемыми, не содержащими производных от возмущений, вязкими членами в уравнении энергии, возмущениями полилинейных слагаемых R_ρ, R_v, R_ε. Считаем также в дальнейшем, что фоновые величины не зависят от времени. Принятые допущения не влияют принципиально на результаты последующего анализа, но значительно упрощают выкладки и формулировки. Система сеточно-дифференциальных уравнений (40) аппроксимирует локально соответствующую систему дифференциальных (по времени и пространству) уравнений газовой динамики в линейном приближении.

Сеточные краевые условия. В линейном приближении сеточные краевые условия (38) имеют вид:

$$\begin{aligned}&\delta_\gamma T = 0;\ \delta_0\vec{v} = 0;\quad \Phi_{\gamma 1}\cdot\vec{v} = 0\ ,\ \Phi_{\gamma 1}\cdot(\mu U) = 0;\\ &\delta_2\vec{v} = 0, \delta_2\rho = 0;\quad \Phi_{\gamma 3}\cdot(\mu U) = 0,\ \Phi_{\gamma 3}g - \Phi_{\gamma 3}\boldsymbol{a}_v\Phi_{\gamma 3}\cdot\vec{v} = 0,\end{aligned} \tag{41}$$

и отличаются от (38) лишь нулевыми правыми частями. Из (38) следуют также сеточные краевые условия на фоновые значения скорости переноса:

$$\delta_0\vec{w}_0 = 0;\quad \Phi_{\gamma 1}\cdot\vec{w}_0 = 0;\ \Phi_{\gamma 3}\cdot\vec{w}_0 \ge 0. \tag{41a}$$

Рассматривая систему уравнений (40), (41) как сеточную задачу, легко видеть, что она переопределена – в ней уравнений больше чем неизвестных. В этом смысле сеточные краевые условия (41) носят вспомогательный характер, необходимо построить корректную сеточную задачу, комбинируя уравнения (40), (41).

Нашей целью в данном пункте является построение сеточной начально-краевой задачи на основе сеточных уравнений (40) и сеточных краевых условий (41), получение простейшей оценки ее корректности, аналогичной оценкам (9), (14), (18).

Построение операторной сеточной краевой задачи. Применим к линеаризованному сеточному уравнению неразрывности (первое уравнение из (40)) оператор $(I - \delta_2)$(это означает, что на границе $\partial\Sigma_{\omega 2}$, где задано значение плотности $\rho = 0$, уравнение не пишется), сложим результат с уравнением $\delta_2 \dfrac{\mathcal{D}\rho}{\mathcal{D}t} = 0$ – следствием краевого условия на $\partial\Sigma_{\omega 2}$, результат запишем в виде:

$$\frac{\mathcal{D}\rho}{\mathcal{D}t} + \rho_0 A_{12}\vec{v} + \vec{w}_0\cdot A_\rho\rho = F_\rho, \tag{42}$$

где

$$A_{12} \equiv (I-\delta_2)\left[(\nabla_x \cdot) - (\Phi_{\gamma 1} \cdot)\right](I-\delta_2-\delta_0) \in L(B_{x,1} \to B_{x,0}),$$

$$A_\rho \equiv (I-\delta_2)\nabla_x (I-\delta_2) \in L(B_{x,0} \to B_{x,1}),$$

$$F_\rho \equiv -(I-\delta_2)\left[\rho_0 \left\{(\nabla_x \cdot) - (\Phi_{\gamma 1} \cdot)\right\}(\delta_2+\delta_0)\vec{v} + \Phi_{\gamma 1} \cdot \vec{v} + \vec{w}_0 \cdot \nabla_x \delta_2 \rho\right].$$

Подставим краевые условия (41) в правую часть уравнения (42), тогда, очевидно, $F_\rho(\rho, \vec{v}) = 0$. Уравнение (42) с нулевой правой частью есть искомая операторная запись сеточного уравнения неразрывности с учетом краевых условий. Умножая скалярно уравнение (42) на $\frac{P_\rho}{\rho_0}\rho$, получаем тождество:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\|\rho\|^2_{a_\rho} + \left(P_\rho \rho, A_{12}\vec{v}\right)_x + \left(a_\rho \rho, \vec{w}_0 \cdot A_\rho \rho\right)_x = 0, \; a_\rho = \frac{P_\rho}{\rho_0}.$$

Преобразуем конвективное слагаемое в этом тождестве:

$$\rho^* \equiv (I-\delta_2)\rho, \;\; \left(a_\rho \rho, \vec{w}_0 \cdot A_\rho \rho\right)_x = \sum_{\vec{x}_j \in \omega_x} \int_{G_j} \varphi_j \left(a_\rho \vec{w}_0 \rho^*\right)_j \cdot \left(\nabla \rho^*_л\right) rdrdz =$$

$$= \tilde{R}_\rho + \int_{\Sigma_\omega} \rho^*_л \left(a_\rho \vec{w}_0\right)_л \cdot \left(\nabla \rho^*_л\right) rdrdz = \tilde{R}_\rho + \int_{\Sigma_\omega} \left(a_\rho \vec{w}_0\right)_л \cdot \left(\nabla \frac{\left(\rho^*_л\right)^2}{2}\right) rdrdz =$$

$$= \tilde{R}_\rho - \int_{\Sigma_\omega} \nabla \cdot \left(a_\rho \vec{w}_0\right)_л \left(\frac{\left(\rho^*_л\right)^2}{2}\right) rdrdz + \int_{\partial\Sigma_\omega} \left(\frac{\left(\rho^*_л\right)^2}{2}\right) \left(a_\rho \vec{w}_0\right)_л \cdot \overrightarrow{dS},$$

$$\tilde{R}_\rho \equiv \sum_{\vec{x}_j \in \omega_x} \int_{G_j} \varphi_j \left[\left(a_\rho \vec{w}_0\right)_j - \left(a_\rho \vec{w}_0\right)_л\right] \rho^*_j \cdot \left(\nabla \rho^*_л\right) rdrdz, \;\; \left|\tilde{R}_\rho\right| \le c \max_{\vec{x} \in \Sigma_\omega} \left|\nabla \cdot \left(a_\rho \vec{w}_0\right)_л\right| \|\rho\|^2.$$

В итоге энергетическое тождество для линеаризованного сеточного уравнения неразрывности запишется в виде:

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\|\rho\|^2_{a_\rho} + \left(P_\rho \rho, A_{12}\vec{v}\right)_x - \frac{1}{2}\int_{\Sigma_\omega} \left(\rho^*_л\right)^2 \nabla \cdot \left(a_\rho \vec{w}_0\right)_л rdrdz = \\ = -\tilde{R}_\rho - \frac{1}{2}\int_{\partial\Sigma_\omega} \left(\rho^*_л\right)^2 \left(a_\rho \vec{w}_0\right)_л \cdot \overrightarrow{dS}\,. \end{gathered} \tag{43}$$

Вычтем из линеаризованного сеточного уравнения движения (второе уравнение из (40)) краевое условие из (41), связывающее g и $\vec{v}$ на границе

$\partial\Sigma_{\omega 3}$, применим к результату оператор $(I-\delta_2-\delta_0)$(это означает, что на границе $\partial\Sigma_{\omega 2}\cap\partial\Sigma_{\omega 0}$, где задано значение скорости $\vec{v}=0$, уравнение не пишется), сложим результат с уравнением $(\delta_2+\delta_0)\dfrac{\mathcal{D}\vec{v}}{\mathcal{D}t}=0$ – следствием краевого условия на $\partial\Sigma_{\omega 2}\cap\partial\Sigma_{\omega 0}$, в итоге получим:

$$\rho_0\frac{\mathcal{D}\vec{v}}{\mathcal{D}t}+\rho_0\vec{w}_0\cdot A_v\vec{v}+A_{21}p-\tilde{A}_{21}(\nu\,\Omega)+A_{\gamma 3}\vec{v}-A_{21}(\mu\boldsymbol{U})=\vec{F}_v\,, \qquad (44)$$

где

$$A_{21}\equiv(I-\delta_0-\delta_2)(\nabla_x-\Phi_{\gamma 3})(I-\delta_2)\in L(B_{x,0}\to B_{x,1}),$$
$$\tilde{A}_{21}\equiv(I-\delta_0-\delta_2)(\nabla_x-\Phi_{\gamma 3})\in L(B_{x,0}\to B_{x,1}),$$
$$A_{\gamma 3}\equiv(I-\delta_0-\delta_2)\Phi_{\gamma 3}\boldsymbol{a}_v(\Phi_{\gamma 3}\,\cdot)(I-\delta_0-\delta_2)\in L(B_{x,1}\to B_{x,1}),$$
$$A_v\equiv(I-\delta_0-\delta_2)\nabla_x(I-\delta_0-\delta_2)\in L(B_{x,1}\to B_{x,2}),$$
$$\boldsymbol{A}_{21}\equiv(I-\delta_0-\delta_2)\big[(\nabla_x\,\cdot)-(\Phi_{\gamma 1}\,\cdot)-(\Phi_{\gamma 3}\,\cdot)\big]\in L(\tilde{B}_{x,2}\to B_{x,1}),$$
$$\vec{F}_v\equiv-(I-\delta_0-\delta_2)\big\{(\Phi_{\gamma 1}\,\cdot)+(\Phi_{\gamma 3}\,\cdot)\big\}(\mu\boldsymbol{U})-(I-\delta_0-\delta_2)(\nabla_x-\Phi_{\gamma 3})\delta_2 p-$$
$$-(I-\delta_0-\delta_2)\big\{\rho_0\vec{w}_0\cdot\nabla_x+\Phi_{\gamma 3}\boldsymbol{a}_{v3}(\Phi_{\gamma 3}\,\cdot)\big\}(\delta_0+\delta_2)\vec{v}\,.$$

Здесь $\tilde{B}_{x,2}$ – линейное пространство сеточных симметричных тензоров. Подставим краевые условия (41) в правую часть уравнения (44), тогда, очевидно, $\vec{F}_v=0$. Аналогично преобразуем уравнения из (40), определяющие величину Ω и тензор $\boldsymbol{U}$:

$$\Omega-\tilde{A}_{12}\vec{v}=F_\Omega,\ \ \boldsymbol{U}-2\boldsymbol{A}_{12}\vec{v}=\boldsymbol{F}_U, \qquad (45)$$

где

$$F_\Omega\equiv\big[(\nabla_x\,\cdot)-(\Phi_{\gamma 1}\,\cdot)\big](\delta_0+\delta_2)\vec{v}+\Phi_{\gamma 1}\cdot\vec{v},$$
$$\boldsymbol{F}_U\equiv\nabla_x(\delta_0+\delta_2)\vec{v}+\big(\nabla_x(\delta_0+\delta_2)\vec{v}\big)^*,$$
$$\tilde{A}_{12}\equiv\big[(\nabla_x\,\cdot)-(\Phi_{\gamma 1}\,\cdot)\big](I-\delta_0-\delta_2)\in L(B_{x,1}\to B_{x,0}),$$
$$\boldsymbol{A}_{12}\in L(B_{x,1}\to\tilde{B}_{x,2}):$$
$$\forall\vec{v}\in B_{x,1}:\boldsymbol{A}_{12}\vec{v}\equiv\frac{1}{2}\Big(\nabla_x(I-\delta_0-\delta_2)\vec{v}+\big(\nabla_x(I-\delta_0-\delta_2)\vec{v}\big)^*\Big).$$

Как и ранее, подставляем краевые условия в правые части уравнений (45), тогда, очевидно, $F_\Omega = 0,\ F_U = 0$. Введенные выше сеточные линейные операторы обладают следующими свойствами:

$$A_{12}^* = -A_{21},\ A_{12}^* = -A_{21},\ \tilde{A}_{12}^* = -\tilde{A}_{21},\ A_{\gamma 3} = A_{\gamma 3}^* \geq 0. \qquad (46)$$

Эти свойства доказываются так же, как и в [1] при рассмотрении способа операторного представления модельной сеточной краевой задачи, с использованием базовых свойств (28б), (36), (37). Так, преобразования

$$\begin{aligned}
A_{12}^* &= \left\{(I-\delta_2)\left[(\nabla_x \cdot) - (\Phi_{\gamma 1} \cdot)\right](I-\delta_2-\delta_0)\right\}^* = \\
&= (I-\delta_2-\delta_0)\left[(-\nabla_x + \Phi_\gamma) - \Phi_{\gamma 1}\right](I-\delta_2) = \\
&= (I-\delta_2-\delta_0)\left[-\nabla_x + \Phi_{\gamma 0} + \Phi_{\gamma 2} + \Phi_{\gamma 3}\right](I-\delta_2) = \\
&= (I-\delta_2-\delta_0)\left[-\nabla_x + \Phi_{\gamma 3}\right](I-\delta_2) = -A_{21}\ ,
\end{aligned}$$

доказывают, что $A_{21} = -A_{12}^*$, а преобразования

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{21}^* &\equiv \left[(I-\delta_0-\delta_2)(\nabla_x - \Phi_{\gamma 3})\right]^* = \\
&= \left[-(\nabla_x \cdot) + (\Phi_\gamma \cdot) - (\Phi_{\gamma 3} \cdot)\right](I-\delta_0-\delta_2) = \\
&= \left[-(\nabla_x \cdot) + (\Phi_{\gamma 0} \cdot) + (\Phi_{\gamma 1} \cdot) + (\Phi_{\gamma 2} \cdot)\right](I-\delta_0-\delta_2) = \\
&= \left[-(\nabla_x \cdot) + (\Phi_{\gamma 1} \cdot)\right](I-\delta_0-\delta_2) = -\tilde{A}_{12}\ .
\end{aligned}$$

доказывают, что $\tilde{A}_{12} = -\tilde{A}_{21}^*$. В этих доказательствах используются свойства $(I-\delta_k)\Phi_{\gamma k} = 0,\ \Phi_{\gamma k}(I-\delta_k) = 0,\ k = 0,1,2,3$, являющиеся очевидным следствием определения (36) граничных операторов $\Phi_{\gamma k}$. То, что $A_{12}^* = -A_{21}$, следует из свойств операторов $\delta_k, (\nabla_x \cdot), \nabla_x, (\Phi_{\gamma k} \cdot), \Phi_{\gamma k}$ и преобразования

$$\forall \boldsymbol{U} \in \tilde{B}_{x,2}, \forall \vec{v} \in B_{x,1}$$

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{U}, A_{12}\vec{v})_x &= \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{U}, \nabla_x(I-\delta_0-\delta_2)\vec{v} + \left(\nabla_x(I-\delta_0-\delta_2)\vec{v}\right)^*\right)_x = \\
&= \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{U}, \nabla_x(I-\delta_0-\delta_2)\vec{v}\right)_x + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{U}, \left(\nabla_x(I-\delta_0-\delta_2)\vec{v}\right)^*\right)_x = \\
&= \left(\boldsymbol{U}, \nabla_x(I-\delta_0-\delta_2)\vec{v}\right)_x = \\
&= \left(\left(-(\nabla_x \cdot) + \Phi_\gamma\right)\boldsymbol{U}, (I-\delta_0-\delta_2)\vec{v}\right)_x = -\left(A_{21}\boldsymbol{U}, \vec{v}\right)_x.
\end{aligned}$$

Умножим скалярно уравнение (44) на $\vec{v}$, уравнения (45) на $\nu\,\Omega$, $\dfrac{\mu}{2}U$ соответственно, результаты сложим:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\left[\left\|\vec{v}\right\|_{\rho_0}^2\right]+\left\|\Omega\right\|_\nu^2+\left\|U\right\|_{\mu/2}^2+\left(A_{\gamma3}\vec{v},\vec{v}\right)_x+\left(\rho_0\vec{w}_0\vec{v},A_v\vec{v}\right)_x+\left(\vec{v},A_{21}p\right)_x=0.$$

Преобразуем конвективное слагаемое в этом тождестве:

$$\vec{v}^*\equiv\left(I-\delta_0-\delta_2\right)\vec{v},\ \left(\rho_0\vec{w}_0\vec{v},A_v\vec{v}\right)_x=\acute{R}_v+\sum_{\vec{x}_j\in\omega_x}\int_{G_j}\varphi_j\left(\rho_0\vec{w}_0\right)_л\cdot\left(\nabla\vec{v}_л^*\right)\cdot\vec{v}_j^*rdrdz=$$

$$=\tilde{R}_v+\int_{\Sigma_\omega}\left(\rho_0\vec{w}_0\right)_л\cdot\left(\nabla\vec{v}_л^*\right)\cdot\vec{v}_л^*rdrdz=\tilde{R}_v+\frac{1}{2}\int_{\Sigma_\omega}\left(\rho_0\vec{w}_0\right)_л\cdot\nabla\left(\vec{v}_л^*\right)^2rdrdz=$$

$$=\tilde{R}_v-\frac{1}{2}\int_{\Sigma_\omega}\left(\vec{v}_л^*\right)^2\nabla\cdot\left(\rho_0\vec{w}_0\right)_л rdrdz+\frac{1}{2}\int_{\partial\Sigma_\omega}\left(\vec{v}_л^*\right)^2\left(\rho_0\vec{w}_0\right)_л\cdot\overrightarrow{dS},$$

$$\breve{R}_v\equiv\sum_{\vec{x}_j\in\omega_x}\int_{G_j}\varphi_j\left[\left(\rho_0\vec{w}_0\right)_j-\left(\rho_0\vec{w}_0\right)_л\right]\cdot\left(\nabla\vec{v}_л^*\right)\cdot\vec{v}_j^*rdrdz,\ \left|\tilde{R}_v\right|\le c\max_{\vec{x}\in\Sigma_\omega}\left|\nabla\left(\rho_0\vec{w}_0\right)_л\right|\left\|\vec{v}\right\|^2.$$

В итоге энергетическое тождество для линеаризованного сеточного уравнения движения запишется в виде:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\left\|\vec{v}\right\|_{\rho_0}^2+\left\|\Omega\right\|_\nu^2+\left\|U\right\|_{\mu/2}^2+\left(A_{\gamma3}\vec{v},\vec{v}\right)_x+\left(\vec{v},A_{21}p\right)_x-\\&-\frac{1}{2}\int_{\Sigma_\omega}\left(\vec{v}_л^*\right)^2\nabla\cdot\left(\rho_0\vec{w}_0\right)_л rdrdz=-\tilde{R}_v-\frac{1}{2}\int_{\partial\Sigma_\omega}\left(\vec{v}_л^*\right)^2\left(\rho_0\vec{w}_0\right)_л\cdot\overrightarrow{dS}.\end{aligned}\tag{47}$$

Аналогично (42), (44), (45) преобразуем сеточное уравнение энергии из (40):

$$\rho_0\frac{\mathcal{D}\varepsilon}{\mathcal{D}t}+\rho_0\vec{w}_0\cdot A_\varepsilon\varepsilon+p_0A_{32}\vec{v}+A_{34}\vec{W}=F_\varepsilon,\tag{48}$$

$$A_{34}\equiv\left(I-\delta_2\right)\left(\nabla_x\cdot\right)\in L\left(B_{x,1}\to B_{x,0}\right),$$

$$A_\varepsilon\equiv\left(I-\delta_2\right)\nabla_x\left(I-\delta_2\right)\in L\left(B_{x,0}\to B_{x,1}\right),$$

$$A_{32}\equiv\left(I-\delta_2\right)\left[\left(\nabla_x\cdot\right)-\left(\Phi_{\gamma1}\cdot\right)\right]\left(I-\delta_0-\delta_2\right)=A_{12}\ ,$$

$$F_\varepsilon\equiv-\left(I-\delta_2\right)\left[\rho_0\vec{w}_0\cdot\nabla_x\delta_2\varepsilon+\left(I-\delta_\gamma\right)p_0\left\{\left(\nabla_x\cdot\right)-\left(\Phi_{\gamma1}\cdot\right)\right\}\left(\delta_0+\delta_2\right)\vec{v}\right]-$$
$$-\left(I-\delta_2\right)p_0\Phi_{\gamma1}\cdot\vec{v}\ ,$$

и уравнение, определяющее тепловой поток:

$$\dot{\vec{W}} + \theta A_{43} T = \vec{F}_W, \; \vec{F}_W \equiv -\theta\left(\nabla_x - \Phi_\gamma\right)\delta_2 T - \theta\, \Phi_\gamma T,$$
$$A_{43} \equiv \left(\nabla_x - \Phi_\gamma\right)\left(I - \delta_2\right) \in L\left(B_{x,0} \to B_{x,1}\right). \tag{49}$$

Как и ранее доказывается взаимосопряженность нововведенных операторов:

$$A_{43}^{*} = -A_{34} \tag{50}$$

Также, учитывая краевые условия (41), убеждаемся что, $F_\varepsilon = 0,\; \vec{F}_W = 0.$ Умножая скалярно уравнение (48) на $b_W T,\; b_W = \dfrac{P_T}{\rho_0}$, уравнение (49) на $a_W \vec{W},\; a_W = \dfrac{b_W}{\theta}$, получаем тождество для уравнения энергии:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\|T\|_{a_T}^2 + \|\vec{W}\|_{a_W}^2 + \left(P_T T, A_{12}\vec{v}\right)_x + \left(T, b_\varepsilon \vec{w}_0 \cdot A_\varepsilon \varepsilon\right)_x =$$
$$= -\left(b_W T, A_{34}\vec{W}\right)_x - \left(b_W A_{43} T, \vec{W}\right)_x, \quad b_\varepsilon = b_W \rho_0,\; a_T = E_T b_\varepsilon.$$

Конвективное слагаемое из этого тождества преобразуется способом, аналогичным соответствующему преобразованию для уравнения неразрывности (см. выше):

$$\varepsilon^* = E_T T^* = E_T\left(I - \delta_2\right)T, b_T = \frac{b_\varepsilon}{E_T}$$
$$\left(T, b_\varepsilon \vec{w}_0 \cdot A_\varepsilon \varepsilon\right)_x = \left(\varepsilon, b_T \vec{w}_0 \cdot A_\varepsilon \varepsilon\right)_x = \sum_{\vec{x}_j \in \omega_x} \int_{G_j} \varphi_j \left(b_T \vec{w}_0 \varepsilon^*\right)_j \cdot \left(\nabla \varepsilon_л^*\right) r dr dz =$$
$$= \breve{R}_T + \int_{\Sigma_\omega} \varepsilon_л^* \left(b_T \vec{w}_0\right)_л \cdot \left(\nabla \varepsilon_л^*\right) r dr dz = \tilde{R}_T + \frac{1}{2}\int_{\Sigma_\omega} \left(b_T \vec{w}_0\right)_л \cdot \nabla\left(\varepsilon_л^*\right)^2 r dr dz =$$
$$= \breve{R}_T - \frac{1}{2}\int_{\Sigma_\omega} \nabla \cdot \left(b_T \vec{w}_0\right)_л \left(\varepsilon_л^*\right)^2 r dr dz + \frac{1}{2}\int_{\partial\Sigma_\omega} \left(\varepsilon_л^*\right)^2 \left(b_T \vec{w}_0\right)_л \cdot \overrightarrow{dS},$$
$$\breve{R}_T \equiv \sum_{\vec{x}_j \in \omega_x} \int_{G_j} \varphi_j \left[\left(b_T \vec{w}_0\right)_j - \left(b_T \vec{w}_0\right)_л\right] \varepsilon_j^* \cdot \left(\nabla \varepsilon_л^*\right) r dr dz, \; \left|\tilde{R}_T\right| \le c \max_{\vec{x} \in \Sigma_\omega} \left|\nabla \cdot \left(b_T \vec{w}_0\right)_л\right| \|T\|^2.$$

Аналогично преобразуем слагаемые, содержащие тепловой поток:

$$\left(b_W T, A_{34}\vec{W}\right)_x + \left(b_W A_{43} T, \vec{W}\right)_x =$$

$$= \iint\limits_{\Sigma_\omega} \left[\left(b_W T^*\right)_л \nabla\cdot\vec{W}_л + \left(b_W \vec{W}\right)_л \nabla T_л^*\right] rdrdz - \int\limits_{\partial\Sigma_\omega} T_л^* \left(b_W \vec{W}\right)_л \cdot \overrightarrow{dS} =$$

$$= \iint\limits_{\Sigma_\omega} \left[\left\{\left(b_W T^*\right)_л - \left(b_W\right)_л T_л^*\right\} \nabla\cdot\vec{W}_л + \left\{\left(b_W \vec{W}\right)_л - \left(b_W\right)_л \vec{W}_л\right\}\cdot\nabla T_л^*\right] rdrdz +$$

$$+ \iint\limits_{\Sigma_\omega} \left[\left(b_W\right)_л T_л^* \nabla\cdot\vec{W}_л + \vec{W}_л\cdot\nabla\left\{\left(b_W\right)_л T_л^*\right\} - T_л^*\vec{W}_л\cdot\nabla\left(b_W\right)_л\right] rdrdz - \int\limits_{\partial\Sigma_\omega} T_л^* \left(b_W \vec{W}\right)_л \cdot \overrightarrow{dS} =$$

$$= \tilde{R}_{W1} + \tilde{R}_{W2} - \int\limits_{\Sigma_\omega} T_л^* \vec{W}_л \cdot \nabla\left(b_W\right)_л rdrdz,\ \tilde{R}_{W2} \equiv \int\limits_{\partial\Sigma_\omega} \left[\left(b_W\right)_л T_л^* \vec{W}_л - T_л^* \left(b_W \vec{W}\right)_л\right] \cdot \overrightarrow{dS},$$

$$\tilde{R}_{W1} \equiv \int\limits_{\Sigma_\omega} \left[\left\{\left(b_W T^*\right)_л - \left(b_W\right)_л T_л^*\right\} \nabla\cdot\vec{W}_л + \left\{\left(b_W \vec{W}\right)_л - \left(b_W\right)_л \vec{W}_л\right\}\cdot\nabla T_л^*\right] rdrdz,$$

$$\tilde{R}_W \equiv \tilde{R}_{W1} + \tilde{R}_{W2},\ \left|\tilde{R}_W\right| \le c \max_{\vec{x}\in\Sigma_\omega} \left|\nabla\left(b_W\right)_л\right| \, \|T\| \|\vec{W}\|.$$

Заметим, что рассмотренное выражение равно нулю в случае постоянного b_W. В итоге энергетическое тождество для линеаризованного сеточного уравнения энергии запишется в виде:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\|T\|_{a_T}^2 + \|\vec{W}\|_{a_W}^2 + \left(P_T T, A_{12}\vec{v}\right)_x - \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_\omega} \nabla\cdot\left(b_T \vec{w}_0\right)_л \left(E_T T^*\right)_л^2 rdrdz -$$

$$- \int\limits_{\Sigma_\omega} T_л^* \vec{W}_л \cdot \nabla\left(b_W\right)_л rdrdz = -\tilde{R}_T - \tilde{R}_W - \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Sigma_\omega} \left(E_T T^*\right)_л^2 \left(b_T \vec{w}_0\right)_л \cdot \overrightarrow{dS}\,. \tag{51}$$

Суммируя тождества (43), (47), (51) с учетом свойств (46), (50) сеточных операторов, получаем энергетическое тождество для дифференциальной по времени операторной сеточной задачи (42), (44), (45), (48), (49):

$$\frac{1}{2}\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\left[\|\rho\|_{a_\rho}^2 + \|\vec{v}\|_{\rho_0}^2 + \|T\|_{a_T}^2\right] + \|\Omega\|_\nu^2 + \|U\|_{\mu/2}^2 + \left(A_{\gamma 3}\vec{v}, \vec{v}\right)_x + \|\vec{W}\|_{a_W}^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_\omega} \left[\left(\rho_л^*\right)^2 \nabla\cdot\left(a_\rho \vec{w}_0\right)_л + \left(\vec{v}_л^*\right)^2 \nabla\cdot\left(\rho_0 \vec{w}_0\right)_л + \nabla\cdot\left(b_T \vec{w}_0\right)_л \left(E_T T^*\right)_л^2\right] rdrdz +$$

$$+ \int\limits_{\Sigma_\omega} T_л^* \vec{W}_л \cdot \nabla\left(b_W\right)_л rdrdz = -\tilde{R} - \tag{52}$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Sigma_\omega} \left[\left(\rho_л^*\right)^2 \left(a_\rho \vec{w}_0\right)_л + \left(\vec{v}_л^*\right)^2 \left(\rho_0 \vec{w}_0\right)_л + \left(E_T T^*\right)_л^2 \left(b_T \vec{w}_0\right)_л\right] \cdot \overrightarrow{dS}\,,$$

$$\tilde{R} \equiv \tilde{R}_\rho + \tilde{R}_\nu + \tilde{R}_T + \tilde{R}_W.$$

Заметим, что из краевых условий (41а) на фоновую скорость переноса следует неотрицательность интеграла по границе в правой части (52), с точностью до величины, оцениваемой так же, как и величины $\tilde{R}$. При этом из тождества (52), с учетом приведенных выше оценок величин $\tilde{R}$, следует существование и единственность решения операторно-дифференциальной сеточной начально-краевой задачи, определяемой уравнениями (42), (44), (45), (48), (49) с нулевыми правыми частями и ее устойчивость по начальным данным. Устойчивость по правой части и сходимость решения этой сеточной задачи к решению соответствующей линеаризованной дифференциальной задачи также следует из (52) и аппроксимационных свойств сеточной системы уравнений (40) и краевых условий (41), (41а). Мы не останавливаемся здесь на формулировке и строгом доказательстве указанных свойств на основе (52), так как это чисто технический вопрос, решаемый стандартными методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений и теории разностных схем. Нашей целью было построение корректной операторной по пространству и дифференциальной по времени линейной сеточной начально-краевой задачи, эта цель достигнута построением уравнений (42), (44), (45), (48), (49), для которых имеет место энергетическое тождество (52).

7. Нелинейная сеточная начально-краевая задача. Как уже отмечалось, совокупность нелинейных сеточных уравнений (39) и сеточных краевых условий (38) не является корректной сеточной задачей. Для того чтобы получилась корректная нелинейная сеточная начально-краевая задача, в уравнения (39) необходимо включить сеточные краевые условия. Тривиальный проверочный критерий при этом – равенство в дискретной задаче числа уравнений числу неизвестных. Здесь и выше мы фактически применяем нестандартный термин "сеточная задача" вместо термина "разностная схема". Термин "разностная схема" кажется не совсем удобным в случае нерегулярных треугольных сеток, когда сеточные аналоги дифференциальных операторов строятся без использования конечных разностей, на базе проекционно-сеточного (или другого) подхода. В рассматриваемом случае, наряду с термином "сеточная задача", удачным представляется термин "операторно-дифференциальная схема". Строгое исследование корректности нелинейных сеточных задач многомерной газовой динамики является сложной проблемой, не решенной в полной мере до настоящего времени. Такое исследование не является целью настоящей работы. Мы хотим построить корректную операторную сеточную задачу, применимую для численного моделирования прикладных задач. Поэтому мы опираемся на принципы, следующие из известного общего результата по разрешимости и сходимости на гладких решениях нелинейных разностных схем [11, 12].

Кратко этот результат можно сформулировать так: сходимость нелинейной сеточной задачи следует из аппроксимации и равномерной устойчивости линеаризованной сеточной задачи в окрестности решения дифференциальной задачи. Сеточные уравнения газовой динамики (29),

(39) и сеточные краевые условия (38) аппроксимируют с первым порядком по пространству дифференциальные уравнения газовой динамики и краевые условия, сформулированные во второй части работы. Минимально достаточное с прикладной точки зрения исследование линеаризованной сеточной задачи проведено в предыдущем разделе статьи. Остается построить нелинейную операторную по пространству сеточную задачу, которая при линеаризации совпадала бы с линейной задачей, сформулированной в предыдущем разделе. Таким образом, используемый нами принцип состоит в следующем: необходимо, чтобы нелинейная сеточная задача обладала аппроксимацией и чтобы любая линейная модель нелинейной сеточной задачи была разрешимой, устойчивой, аппроксимировала соответствующую дифференциальную линейную модель. В том случае, если полная линейная модель нелинейной сеточной задачи в окрестности произвольного решения сложна и громоздка для исследования, мы пользуемся любыми более простыми линейными моделями, отражающими основные свойства исходной задачи. Отметим, что, в виду сложности и нелинейности задач газовой динамики, анализ линейных моделей проводится, так или иначе, при построении и обосновании практически любых численных методов. Кроме того, как указано выше, полный линейный анализ строго обеспечивает корректность нелинейной сеточной задачи на гладких решениях. Тем самым нам остается включить надлежащим образом сеточные краевые условия (38) в систему сеточных уравнений (39). Способ такого включения подробно разобран в предыдущем разделе и переносится на случай нелинейной задачи с незначительными изменениями.

Комбинируя, как и ранее при написании линейного сеточного уравнения неразрывности (42), краевые условия (38) с нелинейным уравнением неразрывности из (39), получаем:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathcal{D}\rho}{\mathcal{D}t}+\rho A_{12}\vec{v}+\vec{w}\cdot A_{\rho}\rho+\mathrm{R}_{\rho}\left(\rho,\vec{w}\right)=\mathrm{F}_{\rho},\\
&\mathrm{R}_{\rho}\left(\rho,\vec{w}\right)\equiv\left(I-\delta_2\right)R_{\rho}\left(\rho,\vec{w}\right),\\
&\mathrm{F}_{\rho}\equiv-\left(I-\delta_2\right)\left[\rho\left\{\left(\nabla_x\cdot\right)-\left(\Phi_{\gamma 1}\cdot\right)\right\}\delta_2\vec{y}_v+\vec{w}\cdot\nabla_x\delta_2 y_{\rho}\right]+\delta_2\frac{\mathcal{D}y_{\rho}}{\mathcal{D}t}.
\end{aligned}
\tag{53}
$$

Как видно, правая часть F_{ρ} получается из правой части F_{ρ} (см. (42)), равной нулю при линеаризованных краевых условиях (41), путем подстановки ненулевых граничных значений функций, заданных краевыми условиями (38).

Аналогично получаются нелинейное сеточные операторные уравнение движения, учитывающее краевые условия (38):

$$\rho \frac{\mathcal{D}\vec{v}}{\mathcal{D}t} + \rho\vec{w}\cdot A_v\vec{v} + A_{21}p - \tilde{A}_{21}(\nu\Omega) + A_{\gamma 3}\vec{v} - A_{21}(\mu U) + \mathrm{R}_v(\rho,\vec{w},\vec{v}) = \vec{\mathrm{F}}_v \ , \tag{54}$$

где

$$\mathrm{R}_v(\rho,\vec{w},\vec{v}) \equiv (I-\delta_0-\delta_2)R_v(\rho,\vec{w},\vec{v}),$$

$$\vec{\mathrm{F}}_v \equiv -(I-\delta_0-\delta_2)(\nabla_x - \Phi_{\gamma 3})\delta_2 P(y_\rho, y_T) -$$

$$-(I-\delta_0-\delta_2)\left[\left\{\rho\vec{w}\cdot\nabla_x + \Phi_{\gamma 3}\boldsymbol{a}_v(\Phi_{\gamma 3}\cdot)\right\}\delta_2\vec{y}_v + \Phi_{\gamma 3}y_v\right] + \delta_2 y_\rho \frac{\mathcal{D}\vec{y}_v}{\mathcal{D}t},$$

$$\begin{gathered} p = P(\rho,T), \Omega - \tilde{A}_{12}\vec{v} = \mathrm{F}_\Omega,\ \mathrm{F}_\Omega \equiv \left[(\nabla_x\cdot) - (\Phi_{\gamma 1}\cdot)\right]\delta_2\vec{v}, \\ \boldsymbol{U} - 2A_{12}\vec{v} = \boldsymbol{F}_U,\ \boldsymbol{F}_U \equiv \nabla_x\delta_2\vec{v} + (\nabla_x\delta_2\vec{v})^*. \end{gathered} \tag{55}$$

и операторное сеточное уравнение энергии:

$$\begin{gathered} \rho\frac{\mathcal{D}\varepsilon}{\mathcal{D}t} + \rho\vec{w}\cdot A_\varepsilon\varepsilon + pA_{12}\vec{v} - (I-\delta_2)\left[\nu\,\Omega^2 + \frac{1}{2}(\mu\boldsymbol{U}\cdot\cdot\boldsymbol{U})\right] + A_{34}\vec{W} = \mathrm{F}_\varepsilon, \\ \mathrm{F}_\varepsilon \equiv -(I-\delta_2)\left[\rho\vec{w}\cdot\nabla_x\delta_2 E(y_\rho,y_T) + p\left\{(\nabla_x\cdot) - (\Phi_{\gamma 1}\cdot)\right\}\delta_2\vec{y}_v\right], \\ \varepsilon = E(\rho,T),\ \vec{W} + \theta A_{43}T = \vec{\mathrm{F}}_W,\ \vec{\mathrm{F}}_W \equiv -\theta(\nabla_x - \Phi_\gamma)\delta_2 y_T - \theta\,\Phi_\gamma y_T. \end{gathered} \tag{56}$$

Линейные пространственные операторы A_ρ, A_v, A_ε, A_{12}, A_{21}, $\tilde{A}_{12}$, $\tilde{A}_{21}$, $\boldsymbol{A}_{12}$, $\boldsymbol{A}_{21}$, A_{34}, A_{43}, A_γ в уравнениях (53)-(56) определены в разделе 6 статьи (см. (42), (44), (48)), для них выполнены свойства (46), (50), кроме того, линейные конвективные операторы A_ρ, A_v, A_ε обладают следующими свойствами, которые доказаны в разделе (6) при анализе конвективных слагаемых в энергетических тождествах:

$$\begin{gathered} \forall\ \rho,T \in B_{x,0},\ \vec{v},\vec{u}_0 \in B_{x,1}: \\ (\rho,\vec{u}_0\cdot A_\rho\rho)_x \geq -c\max_{\vec{x}\in\Sigma_\omega}\left|\nabla(\vec{u}_0)_л\right|\|\rho\|^2, \\ (\vec{v},\vec{u}_0\cdot A_v\vec{v})_x \geq -c\max_{\vec{x}\in\Sigma_\omega}\left|\nabla(\vec{u}_0)_л\right|\|\vec{v}\|^2, \\ (T,\vec{u}_0\cdot A_\varepsilon T)_x \geq -c\max_{\vec{x}\in\Sigma_\omega}\left|\nabla(\vec{u}_0)_л\right|\|T\|^2. \end{gathered} \tag{57}$$

Здесь c – константа, не зависящая от параметра h пространственной сетки.

7. Заключение. Итак, нами построена сеточная задача газовой динамики на нерегулярной треугольной сетке – система операторных по пространству и дифференциальных по времени сеточных уравнений (53)-(56) (операторно-дифференциальная схема). На ее основе нами построены различные варианты разностной по времени сеточной задачи (операторно-разностной схемы), лежащие в основе создания соответствующего комплекса алгоритмов и программ. Изложение этих результатов, как и некоторых других (по построению эффективных явных и неявных алгоритмов, по эффективным методам и алгоритмам решения неявных схем), выходит за рамки настоящей статьи. Тем не менее, здесь представлены все основные аспекты операторного подхода, на основе которого решаются остальные вопросы.

Сеточная задача (53)-(56) аппроксимирует с первым порядком (в том числе вблизи оси симметрии) по пространству начально-краевую задачу для системы дифференциальных уравнений газовой динамики, сформулированную во второй части данной статьи и является корректной в линейном приближении.

Последнее основное утверждение требует пояснений и комментариев в контексте данной статьи. Здесь же мы дадим краткие комментарии к некоторым теоретическим вопросам, имеющим практическое значение с точки зрения эффективного численного решения прикладных задач.

Погрешность аппроксимации является невязкой уравнений (53)-(56) на проекции на сетку гладкого решения исходной дифференциальной задачи. Эта сеточная функция для каждого уравнения включает как погрешности аппроксимации соответствующих дифференциальных уравнений, так и погрешности аппроксимации краевых условий (эти погрешности являются сеточными функциями первого порядка малости (локально) по параметру сетки h). Погрешность аппроксимации уравнений (53)-(56) так же является величиной первого порядка по h в норме, получающейся при исследовании сходимости операторно-разностных схем газовой динамики в линейном приближении (см. [13, 14] и литературные ссылки из [1]).

Линейные модели. При анализе различных аспектов корректности нелинейной сеточной задачи получаются, строго говоря, различные линейные модели. Так, в разделе шесть данной статьи фактически получена линейная операторно-дифференциальная схема, аппроксимирующая соответствующую начально-краевую задачу для линеаризованных уравнений газовой динамики. На основе тождества (52) легко решаются вопросы устойчивости этой схемы и сходимости ее решения к решению линейной начально-краевой задачи.

При линеаризации нелинейной операторно-дифференциальной схемы (53)-(56) получается, вообще говоря, другая линейная сеточная задача. Эта задача практически важна в плане анализа устойчивости в линейном приближении схемы (53)-(56). При таком анализе схема (53)-(56) линеаризуется в окрестности своего решения, относительно которого предполагается, что оно близко к гладкому решению исходной начально-краевой дифференциальной задачи газовой динамики, в частности, краевые условия выполнены точно или с достаточной точностью. Возникающая здесь проблема связана с тем, что часть краевых условий ставится в сильном смысле (в нашем случае это краевые условия на границе $\partial\Sigma_{\omega 2}$, где заданы параметры входящего потока и условия прилипания по скорости на границе $\partial\Sigma_{\omega 0}$) и выполнены точно для решения нелинейной схемы, а остальные условия формулируются в слабом смысле (это, в частности, типично для краевых условий второго и третьего рода при проекционно-сеточной или конечно-элементной формулировке сеточных задач), их выполнение для решения с некоторой точностью может следовать теоретически только из сходимости сеточной задачи. При достаточной точности выполнения слабых краевых условий для решения нелинейной сеточной задачи, линеаризованная задача отличается от задачи из раздела 6 величинами, которые не меняют принципиально основной результат (тождество (52)). При точном выполнении всех краевых условий линеаризация схемы (53)-(56) совпадает с линейной схемой из раздела 6, с учетом допущений, сформулированных в начале раздела 6. Такого рода анализ, как отмечалось, обеспечивает линейную устойчивость нелинейной схемы, что практически важно. Практически полезными и эффективными являются наличие априори гарантированной строго теоретической информации об устойчивости и теоретические эффективные критерии устойчивости в случае использования условно устойчивых явных или частично явных алгоритмов. В связи с этим отметим, что до настоящего времени в ряде случаев вообще отсутствует строгая теоретическая информация об устойчивости при использовании широкого класса явных алгоритмов для численного решения начально-краевых задач газовой динамики, критерии устойчивости определяются эвристически в процессе тестовых расчетов или в процессе численного решения задачи. Конечно, минимальную (в ряде случаев достаточную для практики) информацию об устойчивости может дать менее строгий модельный подход, когда нелинейная схема линеаризуется в предположении наличия постоянного решения, или постоянного по времени решения, для которого точно выполнены слабые краевые условия. Однако, строго говоря, ниоткуда не следует наличие такого простого решения, особенно с точным выполнением слабых краевых условий для неоднородного по пространству решения. Реальный численный расчет ведется всегда в условиях, когда слабые краевые условия выполнены приближенно.

В связи с этим, имеет смысл постановка проблемы, связанной с построением таких схем, в которых все краевые условия формулируются в сильном смысле. Возможность полного решения этой проблемы для схем газовой динамики на нерегулярных пространственных сетках, одновременно с обеспечением линейной корректности, в настоящее время для нас неясна. Отметим, что в случае ячеечно-узловой аппроксимации на нерегулярной треугольной сетке известен и применяется нами способ сильной постановки краевых условий второго рода и (или) условий непротекания-скольжения (см [13, 14] и литературные ссылки из [1]). При этом используется оператор $\boldsymbol{P}_\gamma \equiv \Phi_\gamma\left[\left(\Phi_\gamma\cdot\right)\Phi_\gamma\right]^{-1}\left(\Phi_\gamma\cdot\right)$ проектирования сеточных вектор-функций на подпространство значений граничного оператора Φ_γ, который удобно использовать, когда Φ_γ – локальный оператор (его шаблон содержит один граничный узел). В нашем случае шаблон оператора Φ_γ содержит три граничных узла, шаблон оператора $\boldsymbol{P}_\gamma$ – все граничные узлы. Детальная проработка затронутого здесь вопроса может иметь практический смысл в том случае, когда слабая формулировка краевых условий повлечет снижение эффективности и точности численного решения конкретных сложных прикладных задач.

Другая линейная модель возникает при исследовании сходимости на гладких решениях нелинейной сеточной задачи (53)-(56) методами работ [11, 12]. В этом случае нужно оценивать норму линейного оператора, обратного к производной оператора нелинейной схемы, что эквивалентно исследованию устойчивости линеаризованной схемы по правой части. В общем случае производная оператора нелинейной схемы берется в точке, принадлежащей малой окрестности проекции на сетку решения дифференциальной начально-краевой задачи, размер этой окрестности определяется нормой погрешности аппроксимации нелинейной схемы, требуется получение приемлемой оценки, равномерной по указанной окрестности. Такое исследование до настоящего времени для начально-краевых задач двумерной газовой динамики не проведено в полном объеме. Как модельный вариант такого анализа имеет смысл рассмотрение линейной схемы, получаемой при линеаризации нелинейной схемы в окрестности проекции на сетку решения дифференциальной задачи. В этом случае получится линейная схема, в которой "фоновая" функция удовлетворяет точно всем краевым условиям, а правая часть является погрешностью аппроксимации. Полный анализ устойчивости по правой части такой схемы может быть проведен на основе полученных выше результатов. При этом можно строить линейную модель в окрестности различных решений дифференциальной задачи – от постоянных по пространству и времени до произвольных, в том числе близких к негладким решениям бездиссипативной газодинамической задачи. С практической точки зрения, мы рассматриваем результаты, полученные на данном пути, как модельную характеристику (обоснование) сходимости нелинейной схемы. Например, если для линейной задачи, построенной в окрестности постоянного по времени решения дифференциальной задачи, выполнена приемлемая оценка устойчивости по правой части при приемлемых (естественных) условиях на шаги сетки, то можно с большой долей уверенности считать, что исходная нелинейная схема пригодна для эффективного численного моделирования. Такого рода результат фактически оценивает линейное отклонение решения сеточной задачи от решения дифференциальной задачи в терминах погрешности аппроксимации.

Оператор линейной задачи из раздела 6 данной работы возникает при анализе разрешимости неявных схем, при анализе сходимости любых итерационных алгоритмов решения неявных схем, при применении вариантов метода Ньютона для решения нелинейной сеточной задачи на шаге. Свойства этого оператора, влекущие выполнение тождества (52), обеспечивают разрешимость нелинейной сеточной задачи, получающейся при решении неявной схемы на фиксированном шаге по времени, а также используются при построении эффективных алгоритмов решения задачи на шаге. Важно отметить, что эффективность решения неявной схемы связана со свойствами оператора линеаризованной задачи, которые обеспечиваются правильной операторной формулировкой сеточной краевой задачи и выполнением свойств (46), (50), (57) сеточных аналогов основных дифференциальных операторов.

Литература

1. Саблин М.Н., Арделян Н.В.Двумерная операторно - разностная схема газовой динамики в лагранжевых координатах на нерегулярной треугольной сетке, обладающая свойством локальной аппроксимации вблизи оси симметрии // Прикладная математика и информатика, № 3 – М.: Диалог-МГУ, 2002, с.

2. Вабищевич П.Н., Головизнин В.М., Еленин Г.Г. и др. Вычислительные методы в математической физике. Под общ. ред.

А.А.Самарского. М.: Изд-во МГУ, 1986.- 150 с.

3. Головизнин В.М., Рязанов М.А., Самарский А.А., Сороковникова О.С. Полностью консервативная коррекция потоков в задачах газовой динамики // ДАН СССР. 1984. Т.274, № 3. С. 524-528.

4. Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Построение полностью консервативных разностных схем для уравнений газовой динамики в эйлеровых координатах на основе операторного подхода. – Препринт ИПМ АН СССР. М. 1981. № 63.

5. Колдоба А.В., Кузнецов О.А., Повещенко Ю.А. и др. Полностью консервативные разностные схемы для уравнений механики сплошной среды в квазилагранжевых переменных при наличии гравитационных и магнитогидродинамических процессов. – Препринт ИПМ АН СССР. М. 1985. № 55.

6. Колдоба А.В., Кузнецов О.А., Повещенко Ю.А. и др. К расчету самогравитирующих и магнитогидродинамических процессов в смешанных эйлеро-лагранжевых переменных. – Препринт ИПМ АН СССР. М. 1986. № 29.

7. Бойко А.Я. О построении полностью консервативных разностных схем с помощью алгоритмов проекционного метода. //ЖВМ и МФ. 1987. Т. 22, № 4. С. 544-556.

8. Дородницын Л.В. Акустика в моделях вязких дозвуковых течений и неотражающие краевые условия // Прикладная математика и информатика, № 3 – М.: Диалог-МГУ, 1999, с. 43-64.

9. Дородницын Л.В. Акустические свойства непрерывных и дискретных газодинамических моделей // Прикладная математика и информатика, № 6 – М.: Диалог-МГУ, 2000, с. 39-63.

10. Марчук Г.И., Агошков В.И. введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.

11. Арделян Н.В. Метод исследования сходимости нелинейных разностных схем.// ДУ. 1987. Т. 23, № 7. С. 1116-1127.

12. Арделян Н.В. Метод исследования сходимости нелинейных разностных схем.// ДУ. 1987. Т. 23, № 7. С. 1116-1127.

13. Арделян Н.В. Сходимость разностных схем для двумерных уравнений акустики и Максвелла. //ЖВМ и МФ.1983. Т. 23, № 5. С. 1168-1176.

14. Арделян Н.В., Космачевский К.В., Черниговский С.В. Вопросы построения и исследования полностью консервативных разностных схем магнитной газодинамики. М.: Изд-во МГУ. 1987. 111 с.