В.А. Бабин

ФОРМИРОВАНИЕ ПОРТФЕЛЯ ПРИ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ПОЛЕЗНОСТИ ПОТРЕБЛЕНИЯ И СТАВКЕ КОКСА-ИНГЕРСОЛЛА-РОССА

1. Введение

В [1] Мертон сформулировал и решил в явном виде задачу построения оптимального портфеля ценных бумаг с учетом потребления. В его базовой модели процентная (банковская) ставка предполагалась постоянной, а инвестор имел функцию полезности из семейства HARA (Hyperbolic Absolute Risk Aversion). Им также была решена задача с условно безрисковым активом, подверженным риску случайного банкротства.

В [2] Пан нашел аналитическую формулу для оптимальной стратегии управления портфелем при логарифмической функции полезности и переменной процентной ставке модели Васичека [3]. В обобщенной модели Васичека оптимальность построенной стратегии им была доказана с использованием верхнего и нижнего решений Чаплыгина для обыкновенного дифференциального уравнения [4]. В [5] Пан и Флеминг рассмотрели случай степенной функции полезности и также строили нижние и верхние решения. Однако в явном виде оптимальная стратегия не была найдена. Она была только выражена через функцию, удовлетворяющую некоторому дифференциальному уравнению.

В данной работе задача оптимизации потребления решена для логарифмической функции полезности и модели процентной ставки Кокса-Ингерсолла-Росса (КИР) [6, 7]. В частном случае модели КИР величина оптимального потребления найдена аналитически.

2. Постановка задачи

Как и в [1], рассмотрим рынок, состоящий из двух видов ценных бумаг: рисковой (акция) и безрисковой. При этом выполнены условия модели Блэка-Шоулса [8]. Пусть цена акции $S(t)$ удовлетворяет уравнению геометрического броуновского движения

$$dS(t) = S(t)\big(\alpha dt + \sigma_1 dZ_1(t)\big), S(0) = S_0,$$

а процентная ставка $r(t)$ – обобщенной модели КИР

$$dr(t) = f(r(t))dt + \sigma_2 \sqrt{r(t)}dZ_2(t), r(0) = r > 0, \qquad (1)$$

где σ_1, $\sigma_2 > 0$ и α – константы. Здесь $Z_1(t)$, $Z_2(t)$ – стандартные винеровские процессы с коэффициентом корреляции ρ, а функция $f(\cdot) \in C^2(\mathbb{R}_+)$ удовлетворяет ограничениям

$$f(0) > \sigma_2^2,\ c_2 \le f'(r) \le c_1,\ | f''(r) | \le K(1+| r |^{\beta}),\ \forall r > 0, \tag{2}$$

где $K,\ \beta \ge 0$ и $c_1,\ c_2$ – константы.

Инвестор в момент времени t обладает капиталом $W(t)$, из которого он вкладывает в рисковый актив долю $x(t)$ и потребляет с интенсивностью $c(t)$. Заметим, что отрицательные значения величины $x(t)$ допустимы и означают короткую позицию инвестора по рисковой бумаге. При этом должно выполняться условие

$$\mathrm{E}\int_0^T x^2(t)dt < \infty, \forall T > 0. \tag{3}$$

Далее предполагается, что процесс $(x(t), c(t)),\ t \ge 0,$ является прогрессивно измеримым относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t, t \ge 0)$, порожденной процессом $\left(Z_1(t), Z_2(t)\right),\ t \ge 0$ (см. [9]).

Будем рассматривать множество допустимых стратегий

$$\Pi = \left\{ \left(x(\cdot), c(\cdot)\right) \middle| \lim_{T\to\infty} e^{-\delta T}\mathrm{E}\int_0^T x^2(t)dt = 0; 0 \le c(t) \le \Lambda < \infty \right\},$$

где $\delta > 0$, Λ – константы, а $e^{-\delta T}$ – коэффициент дисконтирования.
Определим следующую задачу инвестора:

$$U(W,r) = \max_{(x(\cdot),c(\cdot))\in\Pi} \mathrm{E}\left[\int_0^\infty e^{-\delta t}\ln(c(W(t),r(t))W(t))dt\right],\ W(0) = W,\ r(0) = r. \tag{4}$$

Для ее решения используется метод динамического программирования.
Изменение капитала описывается уравнением

$$dW(t) = W(t)\left[(1-x(t))r(t)dt + x(t)(\alpha dt + \sigma_1 dZ_1(t)) - c(t)dt\right]$$
$$= W(t)\left[r(t) + (\alpha - r(t))x(t) - c(t)\right]dt + x(t)\sigma_1 W(t)dZ_1(t).$$

Согласно принципу динамического программирования

$$U(W,r) = \max_{(x,c):\, c\geqslant 0}\left(u(cW)dt + e^{-\delta dt}\mathrm{E}\left[U(W(dt), r(dt))\right]\right),$$

где $c = c(0)$, $x = x(0)$. Отсюда

$$(1-e^{-\delta dt})U(W,r) = \max_{(x,c):\, c\geqslant 0}\left(u(cW)dt + e^{-\delta dt}\mathrm{E}\left[dU(W,r)\right]\right).$$

Используя приближение $e^{-\delta dt} \approx 1-\delta dt$ и формулу Ито, получаем уравнение Беллмана

$$\delta U(W,r) = \max_x\left[(\alpha - r)xWU'_W + \frac{1}{2}x^2\sigma_1^2 W^2 U''_{WW} + \rho\sigma_1\sigma_2 x\sqrt{r}WU''_{Wr}\right] +$$
$$+\max_{c\ge 0}\left[\ln(cW) - cWU'_W\right] + rWU'_W + f(r)U'_r + \frac{1}{2}\sigma_2^2 rU''_{rr}. \tag{5}$$

Отсюда и из условий оптимальности первого порядка находим стратегию

$$x^*(W,r) = -\frac{(\alpha - r)U'_W + \rho\sigma_1\sigma_2\sqrt{r}U''_{Wr}}{\sigma_1^2 W U''_{WW}}, \quad c^*(W,r) = \frac{1}{WU'_W}.$$

Подставив ее в (5), получаем уравнение

$$\delta U(W,r) = -\ln U'_W - 1 + rWU'_W + f(r)U'_r +$$
$$+\frac{1}{2}\sigma_2^2 r U''_{rr} - \frac{1}{2}\frac{\left((\alpha - r)U'_W + \rho\sigma_1\sigma_2\sqrt{r}U''_{Wr}\right)^2}{\sigma_1^2 U''_{WW}}. \qquad (6)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде $U(W,r) = A\ln W + F(r)$. После подстановки в (6) находим, что $A = 1/\delta$, $x^*(r) = (\alpha - r)/\sigma_1^2$, $c^* = \delta$, а функция $F(\cdot)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\sigma_2^2}{2} rF''(r) + f(r)F'(r) - \delta F(r) + \bar{Q}(r) = 0, \qquad (7)$$

где

$$\bar{Q}(r) = \frac{1}{\delta}\left(\frac{(\alpha - r)^2}{2\sigma_1^2} + r\right) + \ln\delta - 1. \qquad (8)$$

3. Свойства процесса, задающего процентную ставку.

Лемма 1. *В предположении (2) уравнение (1) имеет единственное с вероятностью 1 положительное решение* $r(t)$. *Кроме того,*

1) Найдется такая константа $\Theta_0(T)$, *что при любом* $t \in [0,T]$

$$E(1/r(t)) \le \Theta_0(T).$$

2) Для любых $\epsilon > 0$ *и целого числа* $m > 0$ *найдутся такие константы* Θ_1, $\Theta_2 > 0$, *что при любом* $t \ge 0$

$$Er^{2m}(t) \le \Theta_1, \text{ если } c_1 < 0; \; Er^{2m}(t) \le \Theta_2 e^{(2mc_1+\epsilon)t}, \text{ если } c_1 \ge 0.$$

3) Если дополнительно выполнено условие $\delta - 2mc_1 > 0$, *то*

$$\lim_{T\to\infty} e^{-\delta T} Er^{2m}(T) = 0 \text{ и } \lim_{T\to\infty} e^{-\delta T} E\int_0^T r^{2m}(t)dt = 0.$$

Доказательство. Существование и единственность решения уравнения (1), а также утверждения 2 и 3 доказываются аналогично леммам 3.1 и 3.2 из [2], где вместо (1) используется обобщенная модель Васичека $dr(t) = f(r(t))dt + \sigma dZ(t)$.

Докажем строгую положительность процесса $r(t)$ и утверждение 1. В силу (2) и теоремы о среднем получаем

$$f(r) = f'(\xi)r + f(0) \ge -|c_2|r + f(0).$$

Пусть $r_{low}(t)$, $t \ge 0$, – процесс КИР, имеющий динамику

$$dr_{low}(t) = k(R - r_{low}(t))dt + \sigma_2 \sqrt{r_{low}(t)} dZ_2(t),\ r_{low}(0) = r,$$
где $k = |c_2|$, $R = f(0)/k$.

По теореме сравнения [10] $P\left(r(t) \ge r_{low}(t)\right) = 1, \forall t > 0$. В свою очередь, в силу (2) $f(0) > \sigma_2^2$, и процесс $r_{low}(t)$ с вероятностью 1 положителен для любого $t > 0$.[1] Следовательно, $P\left(r(t) > 0\right) = 1, \forall t > 0$. Отсюда $E\left(1/r(t)\right) \le E\left(1/r_{low}(t)\right)$.

Согласно [7] при заданном $t > 0$ плотность вероятности величины $r_{low}(t)$ имеет вид

$$p(x,t) = h(t)e^{-u(t)-h(t)x}\left(\frac{x}{re^{-kt}}\right)^{q/2} I_q\left(2\sqrt{u(t)h(t)x}\right),$$

где

$$h(t) = \frac{2k}{\sigma_2^2(1-e^{-kt})},\ u(t) = h(t)re^{-kt},\ q = \frac{2kR}{\sigma_2^2} - 1,$$

а $I_q(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка q. Тогда

$$E\left(\frac{1}{r_{low}(t)}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{x} p(x,t)dx = \int_0^\infty \left[\frac{h(t)e^{-u(t)-h(t)x}}{x}\left(\frac{x}{re^{-kt}}\right)^{q/2} \sum_{n=0}^\infty \frac{\left(h(t)\sqrt{re^{-kt}x}\right)^{2n+q}}{n!\Gamma(n+q+1)}\right]dx =$$

$$= \int_0^\infty \left[h(t)e^{-u(t)}e^{-h(t)x} \sum_{n=0}^\infty \frac{h^{2n+q}(t)\left(re^{-kt}\right)^{n+q/2} x^{n+q-1}}{n!\Gamma(n+q+1)}\right]dx =$$

$$= h(t)e^{-u(t)} \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{h^{2n+q}(t)\left(re^{-kt}\right)^n}{n!\Gamma(n+q+1)} \int_0^\infty e^{-h(t)x}x^{n+q-1}dx\right) =$$

$$= h(t)e^{-u(t)} \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{h^{2n+q}(t)\left(re^{-kt}\right)^n}{n!\Gamma(n+q+1)} \frac{\Gamma(n+q)}{h^{n+q}(t)}\right) = h(t)e^{-u(t)} \sum_{n=0}^\infty \frac{\left(h(t)re^{-kt}\right)^n}{n!(n+q)}.$$

При выполнении ограничений (2) $q > 1$. Тогда

$$E\left(\frac{1}{r_{low}(t)}\right) \le \frac{e^{kt}}{re^{u(t)}} \sum_{n=0}^\infty \frac{u^{n+1}(t)}{(n+1)!} = \frac{e^{kt}}{re^{u(t)}}\left(e^{u(t)} - 1\right) < \frac{e^{kT}}{r} = \Theta_0(T),\ \forall t \in (0,T].\ \blacksquare$$

---

[1] Для того чтобы процесс $r_{low}(t)$ был положительным с вероятностью 1, достаточно потребовать $2f(0) \ge \sigma_2^2$ [11].

4. Построение оптимальной стратегии

Определим функцию $h(r,F)=\bar{Q}(r)-\delta F$, где $\bar{Q}(r)$ задается (8), и дифференциальный оператор $LF(r)=\sigma_2^2 rF''(r)/2+f(r)F'(r)$. Тогда уравнение (7) относительно $F(\cdot)$ можно переписать в виде

$$-LF\big(r\big)=h\big(r,F\big(r\big)\big). \qquad (9)$$

Теперь определим нижнее и верхнее решение уравнения (9).

Определение. *Функцию* $\underline{F}(\cdot)$ *(* $\bar{F}(\cdot)$ *) называют нижним (верхним) решением уравнения (9), если она удовлетворяет неравенству* $-L\underline{F}(r)\le h(r,\underline{F}(r))$ *(* $-L\bar{F}(r)\ge h(r,\bar{F}(r))$ *),* $\forall r>0$. *Если функции* $\underline{F}(\cdot)$ *и* $\bar{F}(\cdot)$ *удовлетворяют условию* $\underline{F}(r)\le\bar{F}(r), \forall r>0$, *то* $\left(\underline{F}(\cdot),\bar{F}(\cdot)\right)$ *называется упорядоченной парой.*

Найдем оба вида решений для уравнения (9).

Лемма 2. *Пусть* $\delta-2c_1>0$, *тогда* $(K_1,\bar{F}(\cdot))$ *– упорядоченная пара нижнего и верхнего решений уравнения (9), где*

$$K_1=\frac{1}{\delta}\min_{r\ge 0}\bar{Q}(r)\equiv\begin{cases}\left(\alpha-\sigma_1^2/2+\delta\ln\delta-\delta\right)/\delta^2, \alpha\ge\sigma_1^2;\\ \alpha/(2\sigma_1^2)+\delta\ln\delta-\delta, \qquad \alpha<\sigma_1^2,\end{cases} \qquad (10)$$

$\bar{F}(r)=a_2r^2+a_0$, $a_2>0$ *и* $a_0\ge K_1$ *– некоторые константы.* (11)

Доказательство. Очевидно, что $-LK_1=0$. С другой стороны, $h(r,K_1)\ge 0$, т.е. K_1 – нижнее решение уравнения (9).

Для функции $\bar{F}(r)$ из (11) в силу (2) и теоремы о среднем имеем:

$$-L\bar{F}(r)=-\sigma_2^2a_2r-2a_2[f'(\xi)r+f(0)]r\ge-2a_2c_1r^2-(\sigma_2^2+2f(0))a_2r.$$

С другой стороны,

$$h(r,\bar{F}(r))=\frac{1}{\delta}\left(\frac{(\alpha-r)^2}{2\sigma_1^2}+r\right)+\ln\delta-1-\delta a_2r^2-\delta a_0=$$

$$=\left(\frac{1}{2\delta\sigma_1^2}-\delta a_2\right)r^2+\frac{1}{\delta}\left(1-\frac{\alpha}{\sigma_1^2}\right)r+\frac{\alpha^2}{2\delta\sigma_1^2}-\delta a_0+\ln\delta-1.$$

Тогда $-L\bar{F}(r)\ge h(r,\bar{F}(r))$ можно переписать в виде $Ar^2+Br+C\ge 0$, где

$$A=(\delta-2c_1)a_2-\frac{1}{2\delta\sigma_1^2}, B=-(\sigma_2^2+2f(0))a_2-\frac{\sigma_1^2-\alpha}{\delta\sigma_1^2}, C=\delta a_0-\frac{\alpha^2}{2\delta\sigma_1^2}-\ln\delta+1.$$

Потребуем, чтобы $A>0$ или $a_2>(2(\delta-2c_1)\delta\sigma_1^2)^{-1}$. При этом $a_2>0$ в силу $\delta-2c_1>0$. Поскольку $Ar^2+Br+C\ge C-B^2/(4A)$, для выполнения неравенства $Ar^2+Br+C\ge 0$ достаточно потребовать $C\ge B^2/(4A)$ или

$$a_0>\max\left\{\frac{\alpha^2}{2\delta^2\sigma_1^2}+\frac{1}{\delta}\ln\delta-\frac{1}{\delta}+\frac{B^2}{4\delta A}, K_1\right\}. \quad \blacksquare$$

Теорема 1. *Уравнение (9) имеет решение* $\tilde{F}(\cdot)$, *такое, что*

$$K_1 \le \tilde{F}(r) \le \overline{F}(r), \forall r \ge 0, \tag{12}$$

где K_1 *и* $\overline{F}(\cdot)$ *определены в (10) и (11) соответственно.*

Доказательство вытекает из рассуждений раздела 3 работы [5].[2]

Лемма 3. *Пусть* $\tilde{F}(\cdot)$ – *решение уравнения (9), удовлетворяющее ограничению (12), тогда*

$$E\left[r(t)\left(\tilde{F}'(r(t))\right)^2 \right] < \Theta(T),\ \ \forall t \in [0,T], \tag{13}$$

где $\Theta(T)$ – *константа, не зависящая от* t.

Доказательство.[3] По условию

$$\frac{\sigma_2^2}{2} r\tilde{F}''(r) + f(r)\tilde{F}'(r) - \delta\tilde{F}(r) + \overline{Q}(r) = 0,\ \ r > 0.$$

Для любого фиксированного R проинтегрируем уравнение по r на интервале от 0 до R.

$$R\tilde{F}'(R) = \tilde{F}(R) - \tilde{F}(0) - \frac{2}{\sigma_2^2}\left(\int_0^R f(r)\tilde{F}'(r)dr - \delta\int_0^R \tilde{F}(r)dr + \int_0^R \overline{Q}(r)dr \right).$$

Пусть $p_i(r)$ обозначает полином степени i. Тогда в силу (2) и (12) можно сделать следующие оценки:

$$\tilde{F}(R) \le p_2(R),\ \int_0^R \tilde{F}(r)dr \le p_3(R),\ \int_0^R \overline{Q}(r)dr = p_3(R),$$

$$\left|\int_0^R f(r)\tilde{F}'(r)dr\right| \le \left| f(R)\tilde{F}(R) - f(0)\tilde{F}(0)\right| + \left|\int_0^R f'(r)\tilde{F}(r)dr\right| \le$$

$$\le \left|f(r)\right|\left|\tilde{F}(r)\right| + \left|f(0)\tilde{F}(0)\right| + \int_0^R \max\left\{|c_1|,|c_2|\right\}\left|\tilde{F}(r)\right|dr \le$$

$$\le \left|f'(\xi)R + f(0)\right| p_2(R) + p_0(R) + \int_0^R p_2(r)dr \le p_3(R).$$

Таким образом, $\left|R\tilde{F}'(R)\right| \le p_3(R)$, откуда $\left(R\tilde{F}'(R)\right)^2 \le p_6(R)$ или $R\left(\tilde{F}'(R)\right)^2 \le p_5(R) + L/R$, где L – некоторая положительная константа.

---

[2] Пан и Флеминг проводили доказательство для всей числовой прямой, перебирая отрезки $I_m \equiv [-m,m]$. В нашем же случае достаточно ограничиться положительной полупрямой, перебирая отрезки $\tilde{I}_m \equiv [1/m,m]$.

[3] Аналогичная лемма 4.3 в [2] доказана для уравнения вида

$$\sigma_2^2 F''(r)/2 + f(r)F'(r) - \delta F(r) + \overline{Q}(r) = 0.$$

Итак, величина $E\left[\left(r(t)\tilde{F}'(r(t))\right)^2\right]$ ограничена сверху суммой $\mathrm{E}[L/r(t)]+\mathrm{E}[p_5(r(t))]$. В силу леммы 1 эта сумма ограничена сверху константой $\Theta(T)$. ■

Теорема 2. *Пусть* $\delta-2c_1>0$ *и* $\tilde{F}(\cdot)$ *– решение уравнения (9), такое, что выполнено (12). Обозначим* $\tilde{U}(W,r)=\ln W/\delta+\tilde{F}(r)$, *где* $W(0)=W$,. $r(0)=r$. *Тогда стратегия* $x^*(r)=(\alpha-r)/\sigma_1^2$, $c^*=\delta$ *является оптимальной.*

Доказательство. Данное утверждение доказывается в основном аналогично теореме 4.2 из [2]. Однако имеется ряд отличий. В частности, отличается выражение $d\tilde{U}(W(t),r(t))$:

$$d\tilde{U}(W(t),r(t))=[(r(t)+(\alpha-r(t))x-c(t))W(t)\tilde{U}'_W+f(r,t)\tilde{U}'_r+\frac{\sigma_1^2}{2}x^2W^2(t)\tilde{U}''_{WW}+$$
$$+\rho\sigma_1\sigma_2 x\sqrt{r(t)}W(t)\tilde{U}''_{Wr}+\frac{1}{2}\sigma_2^2 r(t)\tilde{U}''_{rr}]dt+\sigma_1 x(t)W(t)\tilde{U}'_W dZ_1(t)+\sigma_2\sqrt{r(t)}\tilde{U}'_r dZ_2(t).$$

Отсюда в силу (5) имеем:

$$d\tilde{U}(W(t),r(t))\le\delta\tilde{U}(W(t),r(t))-\ln(c(t)W(t))+$$
$$+\sigma_1 x(t)W(t)\tilde{U}'_W dZ_1(t)+\sigma_2\sqrt{r(t)}\tilde{U}'_r\, dZ_2(t).$$

Для любой стратегии $(x(\cdot),c(\cdot))\in\Pi$ процесс

$$\int_0^t\sigma_1 e^{-\delta s}x(s)W(s)\tilde{U}'_W dZ_1(s)=\frac{\sigma_1}{\delta}\int_0^t e^{-\delta s}x(s)dZ_1(s),\, t\ge 0,$$

является мартингалом, поскольку выполнено условие (3) (см. [12]). Из леммы 3 вытекает, что процесс $\int_0^t\sigma_2 e^{-\delta s}\sqrt{r(s)}\tilde{U}'_r(W(s),r(s))dZ_2(s),\ t\ge 0,$ также является мартингалом. Далее, как и в [2], можно показать, что для любой стратегии $(x(\cdot),c(\cdot))\in\Pi$ выполнено неравенство

$$E_0\int_0^\infty e^{-\delta t}\ln(c^*W^*(t))dt\ge E_0\int_0^\infty e^{-\delta t}\ln(c(W(t),r(t))W(t))dt,$$

где процесс $W^*(t), t\ge 0,$ порождается стратегией $(x^*(\cdot),c^*)$. ■

5. Пример.

Пусть в формуле (1) $f(r)=b(\tilde{r}-r)$, где $b>0$ и $\tilde{r}>0$ – константы, такие, что $b\tilde{r}>\sigma_2^2$. Для функция $f(\cdot)$ выполнено условие (2) и справедливы все рассмотренные выше утверждения. Уравнение (7) относительно $F(\cdot)$ перепишется в виде

$$\delta F(r)=\frac{\sigma_2^2}{2}rF''(r)-b(\tilde{r}-r)F'(r)+\frac{1}{\delta}\left(\frac{(\alpha-r)^2}{2\sigma_1^2}+r\right)+\ln\delta-1.$$

Данное уравнение имеет решение $F(r)=a_2r^2+a_1r+a_0$, где

$$a_0=\frac{1}{\delta}\left(\frac{\alpha^2}{2\delta\sigma_1^2}+\ln\delta-1+\frac{b\tilde{r}}{\delta(\delta+b)}\left(1-\frac{\alpha}{\sigma_1^2}+\frac{2b\tilde{r}+\sigma_2^2}{2(\delta+2b)\sigma_1^2}\right)\right),$$

$$a_1=\frac{1}{\delta(\delta+b)}\left(1-\frac{\alpha}{\sigma_1^2}+\frac{2b\tilde{r}+\sigma_2^2}{2(\delta+2b)\sigma_1^2}\right),\quad a_2=\frac{1}{2\delta(\delta+2b)\sigma_1^2}.$$

Итак, нами найдена функция $F(\cdot)$, а, следовательно, и величина $U(W,r)$. Оптимальная стратегия $(x^*(\cdot),c^*)$ определена в теореме 2.

Литература

1. Merton R.C. Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model // Journal of Economic Theory. 1971. N. 3. P. 373–413.
2. Pang T. Stochastic Portfolio Optimization with Log Utility // International Journal of Theoretical and Applied Finance. 2006. V. 9. P. 869–887.
3. Vasicek O. An Equilibrium Characterisation of the Term Structure // Journal of Financial Economics. 1977. V. 5. N. 2. P. 177–188.
4. Чаплыгин С.А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. Классики естествознания. Математика, механика, физика, астрономия. М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
5. Fleming W.H., Pang T. An Application of Stochastic Control Theory to Financial Economics // SIAM Journal of Control and Optimization. 2004. V. 43. N. 2. P. 502–531.
6. Cox J.C., Ingersoll J.E.Jr., and Ross S.A. An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices // Econometrica. 1985. V. 53. N. 2. P. 363–384.
7. Cox J.C., Ingersoll J.E. Jr., and Ross S.A. A Theory of the Term Structure of Interest Rates // Econometrica. 1985. V. 53. N. 2. P. 385–407.
8. Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities // Journal of Political Economy. 1973. V. 81. N. 3. P. 637–659.
9. Ширяев А.Н. Статистический последовательный анализ. М.: Физматлит, 1976.
10. Клепцына М.Л. Теоремы сравнения, существования и единственности для стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероятностей и ее применения. 1985. Т. 30. Вып. 1. С. 147–152.
11. Feller W. Two Singular Diffusion Problems // Annals of Mathematics. 1951. V. 54. N. 1. P. 173–182.
12. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: АСТ, Мир, 2003.