

*А.В. Баяв, А.О. Облоухов*

## **ДИССИПАТИВНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗНОСТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

### **1. Постановка задачи**

#### **1.1. Введение**

Метод разностных схем в настоящее время является основным способом численного решения многомерных задач, возникающих при математическом моделировании широкого круга физических явлений. Наибольшее развитие этот метод получил при решении нестационарных задач теплопроводности, механики жидкости и газов, переноса, а также стационарных задач электромагнетизма и упругости. Относительно меньшее развитие разностные схемы получили при решении нестационарных задач распространения волн. Этому, на взгляд авторов, есть две основные причины. Во-первых, при решении таких задач у метода сеток имеется сильный конкурент, метод характеристик. Во-вторых, задачи распространения волн требуют таких значений параметров разностных схем, которые обеспечивают распространение возмущения в широком диапазоне пространственно-временных частот. Последнее обстоятельство приводит к требованию малости шагов сетки, что нередко влечет недопустимый объем необходимых вычислительных ресурсов.

Одной из наиболее актуальных областей математического моделирования процессов распространения волн является сейсмика. Распространение сейсмических волн достаточно точно описывается в рамках теории упругости. Основными моментами этой теории являются два обстоятельства. Во-первых, существует два типа упругих волн, продольные и поперечные, распространяющиеся с различными скоростями и поляризациями. Во-вторых, волновой процесс в теории упругости является принципиально векторным и многомерным. Эти два обстоятельства явились причиной того, что в течение последних ста лет подавляющее большинство задач сейсмики решалось в рамках лучевого подхода, т. е. фактически метода характеристик. Однако к настоящему времени сложилась ситуация, когда возник достаточно широкий парк персональных ЭВМ, позволяющих решать практически значимые задачи разведочной сейсмической геофизики методом сеток. При этом обнаружилось, что, несмотря на высокий уровень развития общей теории разностных схем, имеется ощутимый дефицит качественных схем для решения практических задач сейсморазведки. Кроме того, учитывая важную роль дополнительных условий при постановке таких задач, следует отметить явный недостаток эффективных раз-

ностных аналогов естественных начальных и граничных условия для задач распространения сейсмических волн.

Настоящая работа ставит целью решить следующую важную вспомогательную задачу при использовании метода сеток: поставить на границе счетной области разностное краевое условие таким образом, чтобы отражение от границы упругих волн было достаточно малым для практического использования. Как отмечено выше, есть два обстоятельства, затрудняющие решение такой задачи: существование двух типов волн и векторность многомерного волнового процесса. Большинство известных в этом направлении работ [1] посвящено построению “мягких” краевых условий для случая падения упругих волн близком к нормальному на границе счетной области. Однако при решении практических задач такая ситуация не является общей. В результате отраженные волны оказываются сопоставимыми по амплитуде с волнами, возникающими в самой неоднородной моделируемой среде. С другой стороны, погружение счетной области в однородное упругое пространство могло бы решить эту проблему, но при этом существенно возрастает объем используемой счетной области, что приводит к недопустимому увеличению требуемых вычислительных ресурсов.

## 1.2. Формулировка задачи

В качестве математической модели процесса распространения упругих волн рассмотрим двумерные уравнения линейной теории упругости:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} \\
 \rho \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} \\
 \sigma_{11} &= \rho a^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \rho (a^2 - 2b^2) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \\
 \sigma_{22} &= \rho (a^2 - 2b^2) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \\
 \sigma_{12} &= \rho b^2 \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right).
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\tilde{u}, \tilde{v}$  – компоненты вектора смещений,  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$  – компоненты тензора напряжений,  $\rho$  – плотность среды,  $a, b$  – скорости распространения продольных и поперечных волн в среде соответственно.

Как правило, на границе счетной области упругие волны с высокой степенью точности можно считать плоскими, а саму границу локально плоской. Поэтому исходную задачу переформулируем следующим образом: на плоской границе поставить краевое условие, обеспечивающее отсутствие плоских отраженных упругих волн при падении на эту границу плоской волны неизвестного типа (продольной, т. е.  $P$ -волны, или поперечной, т. е.  $S$ -волны) с неизвестной амплитудой и под неизвестным углом. В качестве разумных требований к граничным условиям естественно предъявить следующие: порядок производных в условиях не должен превышать первого, условия должны быть корректно поставленными в смысле теории краевых задач для гиперболических уравнений, в частных случаях эти условия должны соответствовать известным граничным условиям для задач теории упругости или акустики. Кроме того, эти условия должны быть корректно представимы в разностной форме и эффективно реализуемы в разностных алгоритмах.

В силу сделанных предположений о локальном характере отражения плоских упругих волн проведем построение искомых граничных условий на прямой  $y = 0$ , в декартовой системе координат, ось  $OX$ , которой совмещена с плоской границей счетной области, направление оси  $OY$  совпадает с направлением внешней нормали к границе. В указанной геометрии модели решение системы (1), эквивалентной уравнению Ламе, в виде падающих и отраженных плоских  $P$  и  $S$  волн при  $y > 0$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= A \sin(\alpha) f[t - px \sin(\alpha) - py \cos(\alpha)] + \\ &+ B \cos(\beta) f[t - qx \sin(\beta) - qy \cos(\beta)] + \\ &+ C \sin(\alpha) f[t - px \sin(\alpha) + py \cos(\alpha)] + \\ &+ D \cos(\beta) f[t - qx \sin(\beta) + qy \cos(\beta)] \\ \tilde{v} &= A \cos(\alpha) f[t - px \sin(\alpha) - py \cos(\alpha)] - \\ &- B \sin(\beta) f[t - qx \sin(\beta) - qy \cos(\beta)] - \\ &- C \cos(\alpha) f[t - px \sin(\alpha) + py \cos(\alpha)] + \\ &+ D \sin(\beta) f[t - qx \sin(\beta) + qy \cos(\beta)]. \end{aligned} \quad (2)$$

где  $ap = bq = 1$ . Поскольку случай одновременного прихода в точку отражения волн различного типа с практической точки зрения является исключительным, то в (2) использовано, что углы  $\alpha$  и  $\beta$  связаны законом Снеллиуса, т. е.

$$p \sin \alpha = q \sin \beta, \quad A^2 + B^2 > 0, AB = 0, \quad (3)$$

кроме того, для определенности полагаем  $C = 0$  при  $|\alpha| = \pi/2$ .

Формализуя исходную задачу, для решения вида (2) приходим к следующей её постановке: для любых  $A, B, a > b > 0, \alpha$  и  $\beta$ , связанных

условием (3), поставить граничные условия при  $y=0$  такие, что  $C, D=0$  при  $\alpha=0$ ;  $|C|, |D| \ll |A|, |B|$  при  $0 < \alpha < \pi/2$ .

## 2. Разностная схема

### 2.1. Построение инвариантов

Построим разностную схему типа распад разрыва [2]. Продифференцировав три последних уравнения (1) по  $t$ , получим систему уравнений упругости в терминах скоростей:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} &= \rho a^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \rho(a^2 - 2b^2) \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial t} &= \rho(a^2 - 2b^2) \frac{\partial u}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} &= \rho b^2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

где  $u, v$  — компоненты вектора скоростей.

Приведем систему (4) к симметричному виду введя вспомогательные переменные:

$$\alpha = \frac{a^2}{4\rho b^2(a^2 - b^2)}, \quad \beta = -\frac{a^2 - 2b^2}{4\rho b^2(a^2 - b^2)}. \quad (5)$$

В итоге получаем:

$$\hat{A} \frac{\partial w}{\partial t} + \hat{B} \frac{\partial w}{\partial x} + \hat{C} \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad (6)$$

где

$$w = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{vmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho b^2} \end{vmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Найдем инварианты полученной системы. Следуя [2], получим преобразование базиса, которое переводит матрицу  $\hat{A}$  в единичную, а  $\hat{B}$  диагональную (матрицу  $\hat{C}$  пока не рассматриваем),

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{a^2}{\sqrt{2ab}\sqrt{\rho}\sqrt{a^2-b^2}} & \frac{a}{\sqrt{2b}\sqrt{\rho}\sqrt{a^2-b^2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\rho} & 0 & 0 & -\frac{1}{b\sqrt{\rho}} \\ \sqrt{\rho} & 0 & -\frac{1}{a\sqrt{\rho}} & 0 & 0 \\ \sqrt{\rho} & 0 & \frac{1}{a\sqrt{\rho}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\rho} & 0 & 0 & \frac{1}{b\sqrt{\rho}} \end{pmatrix}.$$

При этом

$$T^* \hat{A} T = E, \quad T^* \hat{B} T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Тогда, рассматривая главную часть (6), получаем:

$$T^* \hat{A} T \frac{\partial(w)}{\partial t} + T^* \hat{B} T \frac{\partial(w)}{\partial x} = E \frac{\partial(w)}{\partial t} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Отсюда, получаем инварианты на прямой  $y = \text{const}$ :

$$\begin{aligned}
 x = bt; \sqrt{\rho v} - \frac{\sigma_{12}}{b\sqrt{\rho}} = S_x^+ = \text{const}, \quad x = at; \sqrt{\rho u} - \frac{\sigma_{11}}{a\sqrt{\rho}} = P_x^+ \\
 x = -at; \sqrt{\rho u} + \frac{\sigma_{11}}{a\sqrt{\rho}} = P_x^-, \quad x = -bt; \sqrt{\rho v} + \frac{\sigma_{12}}{b\sqrt{\rho}} = S_x^-.
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Аналогично, найдя преобразование базиса, переводящее матрицу  $\hat{A}$  в единичную, а  $\hat{C}$  в диагональную, получаем вид инвариантов в плоскости  $x = \text{const}$ :

$$\begin{aligned}
 y = bt; \sqrt{\rho u} - \frac{\sigma_{12}}{b\sqrt{\rho}} = S_y^+, \quad y = at; \sqrt{\rho v} - \frac{\sigma_{22}}{a\sqrt{\rho}} = P_y^+ \\
 y = -at; \sqrt{\rho v} + \frac{\sigma_{22}}{a\sqrt{\rho}} = P_y^-, \quad y = -bt; \sqrt{\rho u} + \frac{\sigma_{12}}{b\sqrt{\rho}} = S_y^-.
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

## 2.2. Разностные уравнения

Перейдем непосредственно к построению разностной схемы для решения системы (4). Рассмотрим область  $\Omega$  в пространстве  $(x, y, t)$ :  $[0, X] \times [0, Y] \times [0, T]$ . Введем в  $\Omega$  сетку  $h_x, h_y, h_t$  и сеточную вектор-функцию  $\hat{w}_n$ , соответствующую вектору неизвестных  $w$  на временном слое  $t = nh_t$ . Пусть нам известен вектор  $\hat{w}_n$ . Рассмотрим в  $\Psi$  прямоугольный параллелепипед  $G$  с основаниями в плоскостях  $t = nh_t$  и  $t = (n+1)h_t$ , с центром основания в точке  $x = jh_x, y = kh_y$  и ребрами  $h_x, h_y, h_t$ . Наша задача найти вектор  $\hat{w}_{n+1}$ , то есть  $\hat{w}$  на верхней грани параллелепипеда  $G$ . Введем следующую совокупность векторов размерности 3:

$$\mathbf{R}_i = \left( (\hat{B}w)_i, (\hat{C}w)_i, (\hat{A}w)_i \right), \quad i = \overline{1, \dots, 5}.$$

Тогда исходная система (6) принимает вид:

$$\text{div } \mathbf{R}_i = 0, \quad i = \overline{1, \dots, 5}.$$

Интегрируя по области  $G$ , получаем:

$$\iiint_G \text{div } \mathbf{R}_i d\mathbf{r} = 0, \quad i = \overline{1, \dots, 5}.$$

С учетом теоремы Остроградского-Гаусса:

$$\iiint_G \text{div } \mathbf{R}_i d\mathbf{r} = \iint_{\partial G} \mathbf{R}_i \mathbf{n} ds = 0, \quad i = \overline{1, \dots, 5},
 \tag{10}$$

где  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль.

Средние значения вектора неизвестных  $w$  на боковых гранях  $G$ , соответствующие средним значениям подынтегральных выражений [1], обозначим  $U, V, \Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \Sigma_{12}$ , далее будем называть эти значения «боль-

шими величинами». Для нахождения «больших величин» воспользуемся парами инвариантов приходящими на боковые грани с противоположных сторон. Каждая такая пара порождает систему двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными, что позволяет найти необходимые «большие величины» на боковых гранях.

Рассмотрим это подробнее на примере, грани  $x = \text{const}$ . Используя (8) и учитывая, что отклонение точных значений  $w$  от больших величин на боковых гранях  $G$  имеет порядок  $O(h_x) + O(h_y)$ , получаем соотношения для сеточных функций на временном слое  $t = nh_t$ :

$$x = at; \left( \sqrt{\rho} \hat{u} - \frac{\hat{\sigma}_{11}}{a\sqrt{\rho}} \right) [j-1, k] = P_x^+ = \left( \sqrt{\rho} U - \frac{\Sigma_{11}}{a\sqrt{\rho}} \right) [j-1/2, k]$$

$$x = -at; \left( \sqrt{\rho} \hat{u} + \frac{\hat{\sigma}_{11}}{a\sqrt{\rho}} \right) [j, k] = P_x^- = \left( \sqrt{\rho} U + \frac{\Sigma_{11}}{a\sqrt{\rho}} \right) [j-1/2, k].$$

В квадратных скобках – точка сетки, в которой берутся значения сеточных функций. Отсюда получаем выражения для нахождения больших величин:

$$U[j-1/2, k] = (P_x^+[j-1, k] + P_x^-[j, k]) / 2\sqrt{\rho[j-1/2, k]}$$

$$\Sigma_{11}[j-1/2, k] = (P_x^+[j-1, k] - P_x^-[j, k])\sqrt{(a\rho)[j-1/2, k]} / 2. \quad (11)$$

Значение параметров среды  $a, b, \rho$  на боковых гранях  $G$ , положим равным среднему арифметическому соответствующих параметров в прилегающих к грани узлах исходной сетки.

Представив интеграл (10), как сумму интегралов по граням с учетом определения  $R$ , получаем систему уравнений:

$$(\hat{C}w)^B h_x \tau - (\hat{C}w)^F h_x \tau + (\hat{B}w)^R h_x \tau - (\hat{B}w)^L h_x \tau + (\hat{A}w)^U h_x h_y - (\hat{A}w)^D h_x h_y = 0.$$

Индексы B (back), F (front), R (right), L (left) соответствуют боковым, U (up) – верхней, а D (down) – нижним граням  $G$ . Заменяя на боковых гранях вектор  $w$  вектором больших величин  $W$ , и, переходя к сеточным функциям, получаем систему пяти линейных уравнений с пятью неизвестными:

$$(\hat{A}\hat{w})^U h_x h_y = (\hat{C}W)^F h_x \tau - (\hat{C}W)^B h_x \tau + (\hat{B}W)^L h_x \tau - (\hat{B}W)^R h_x \tau + (\hat{A}\hat{w})^D h_x h_y = 0. \quad (12)$$

Решая систему (12), находим компоненты  $\hat{w}_n^U$  на верхней грани  $G$ , то есть  $\hat{w}_{n+1}$ .

Разностная схема во внутренних точках области  $\Omega$  построена.

### 3. Диссипативные граничные условия

#### 3.1. Формулировка граничных условий

Полностью диссипативные граничные условия в разностной форме требуют решения нелинейных уравнений и оказываются неустойчивыми. Это не позволяет эффективно использовать их на практике. Однако существует возможность получить относительно простые граничные условия, дающие отраженные волны, амплитуды которых много меньше амплитуд падающих волн в достаточно большом диапазоне углов падения.

Не нарушая общности, рассмотрим границу  $y = 0$ . Заметим, что инварианты (8) соответствуют продольной ( $P$ -инварианты) и поперечной ( $S$ -инварианты) составляющим падающей волны. Причем  $P_y^+$ ,  $S_y^+$  соответствуют волне прошедшей через границу, а  $P_y^-$ ,  $S_y^-$  – отраженной. Для подавления отраженной волны представляется естественным положить инварианты  $P_y^-$ ,  $S_y^-$  на границе равными нулю. Граничные условия при этом будут выглядеть следующим образом:

$$\rho b u = -\sigma_{12}, \quad \rho a v = -\sigma_{22}. \quad (13)$$

В разностном случае для реализации граничных условий (13) достаточно положить инварианты  $P_y^-$ ,  $S_y^-$  в граничных точках равными нулю, что позволяет, используя формулы (11), найти большие величины, а значит, из системы (12), и вектор  $\mathbf{w}$ .

#### 3.2. Диссипативность граничных условий

Покажем, что условия (13) являются диссипативными. Под диссипативностью краевого условия понимается выполнение в каждой точке границы неравенства:  $\Pi = \Pi_- + \Pi_+ \leq 0$ . Здесь  $\Pi_{\pm}$  – поток энергии волн, соответствующих характеристикам гиперболического уравнения, по которым его решение распространяется наружу ( $\Pi_- \leq 0$ ) и внутрь ( $\Pi_+ \geq 0$ ) области, где решается задача.

В рассматриваемом случае суммарный поток  $\Pi = \Pi_- + \Pi_+$  энергии упругих волн через границу  $y = 0$  с положительной внешней нормалью имеет, согласно [3], вид

$$\Pi = \sigma_{12}u + \sigma_{22}v.$$

С учетом (13) это равенство получаем

$$\Pi = -\rho b u^2 - \rho a v^2 < 0,$$

где  $\rho$  – плотность среды. Поток отрицателен, и, таким образом, диссипативность граничных условий доказана.



### 3.3. Оценка эффективности граничных условий

Исследуем граничные условия (13). В случае, когда решения представляются в виде плоских волн (2), уравнения исходной системы (4) выполняются не только во внутренних точках области, но и на границе. С учетом этого запишем уравнения исходной системы (4)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial t} &= \rho(a^2 - 2b^2) \frac{\partial u}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} &= \rho b^2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right).\end{aligned}$$

Используя граничные условия (13) получаем:

$$\begin{aligned}\rho b \frac{\partial u}{\partial t} + \rho(a^2 - 2b^2) \frac{\partial u}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \rho a \frac{\partial v}{\partial t} + \rho b^2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= 0.\end{aligned}\tag{14}$$

Подставим выражения для решения системы (1) в виде падающих и отраженных плоских  $P$  и  $S$  волн (2) в (14). В результате граничные условия (13) принимают вид:

$$\begin{cases} A \sin \alpha (a - 2b \cos \alpha) + Ba(1 + \cos \beta - 2 \cos^2 \beta) + \\ + Da(2 \cos^2 \beta - 1 + \cos \beta) + C \sin \alpha (2b \cos \alpha + a) = 0 \\ A(2b^2 \sin^2 \alpha + a^2 (\cos \alpha - 1)) + Basin \beta (2b \cos \beta - a) + \\ + Dasin \beta (2b \cos \beta + a) - C(a^2 (\cos \alpha + 1) - 2b^2 \sin^2 \alpha) = 0. \end{cases}$$

Заметим, что при  $\alpha = 0, \beta = 0$  из равенств (9) следует  $C = 0, D = 0$ .

То есть, при нормальном падении отраженной от границы волны нет. Из этой системы также очевидно, что при малых  $\alpha, \beta$  амплитуды отраженных волн  $C$  и  $D$  имеют порядок малости  $O(|\alpha| + |\beta|)$ .

### 3.4. Численное моделирование

Для проверки практической применимости описанных граничных условий проведено численное моделирование. На РС реализован алгоритм решения системы (5) на основании разностной схемы, изложенной в 2), с граничными условиями (13). Моделирование проводилось на сетке  $300 * 600$  точек для плоских продольных и поперечных волн падающих на границу под различными углами. Фиксировались амплитуды падающей и отраженной волн. Полученные результаты представлены в виде таблицы, где  $k$  – амплитудный коэффициент отражения равный отношению амплитуд отраженной и падающей волн.

Угол падения (градусы) k (%)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
Продольная волна	0	0,44	0,46	0,92	2,24	4,74	7,87	14,87	25,64
Поперечная волна	0	0,97	2,43	3,25	3,96	7,18	11,55	18,98	33,71

На рис 1. результаты тестовых расчетов представлены в виде графика.



Рис. 1

### Литература

1. Michael B. Giles. «Nonreflecting Boundary Conditions for Euler Equation Calculations». AIA Journal. 1990. Vol. 28. No 12
2. С.К. Годунов и др. «Численное решение многомерных задач газовой динамики», М., «Наука», 1976
3. Амензаде Ю.А. «Теория упругости», М., Высшая школа, 1976