

В.И.Дмитриев, И.С. Барашков

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ МОРСКИХ ЗОНДИРОВАНИЙ ТРЕХМЕРНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ*

Методы электромагнитных зондирований активно используются при изучении строения верхних слоев Земли и при поиске месторождений полезных ископаемых. В настоящее время важной задачей является исследование строения шельфа и обнаружение месторождений углеводородов в шельфовой зоне. Именно поэтому последнее время развиваются методы морских электромагнитных зондирований. При морских исследованиях в качестве источника электромагнитного поля обычно используется электрический кабель, который передвигается по поверхности моря, буксируемый судном. Поле измеряется на морском дне с помощью всплываемых датчиков.

Измеряемое поле зависит от частоты ω и координат точки $M_0(x_0, y_0)$ на поверхности моря при $z_0 = 0$, в которой находится источник. Эти измерения, зависящие от трёх переменных (ω, x_0, y_0) , позволяют определить трёхмерное распределение под морским дном $\sigma(x, y, z)$. Естественно, возникает вопрос о том, какая из компонент электромагнитного поля наиболее чувствительна к неоднородностям среды. Ответ на этот вопрос мы можем получить с помощью математического моделирования электромагнитного поля в неоднородной среде.

В математической модели будем считать, что источником поля является электрический диполь на поверхности моря в точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0 = 0)$. Учёт длины источника принципиальных изменений не вносит. В качестве модели строения среды возьмём проводящую среду, в которой имеется проводящая зона с электропроводностью $\sigma_T(M)$, $M \in V$, погруженная в слоистую среду $\sigma(z)$. Слоистая среда задаётся в виде:

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проект 11-05-12014 офи-м-2011 “Разработка новых подходов и вычислительных методов решения обратных задач электромагнитного морского зондирования при измерениях на морском дне”.

$$\sigma(z) = \begin{cases} \sigma_0 \approx 0 & \text{при } z \in (-\infty, 0) \text{ (атмосфера)}, \\ \sigma_1 = \text{const} & \text{при } z \in (0, h_1) \text{ (море)}, \\ \sigma_{\text{осн}}(z) & \text{при } z \in (h_1, \infty) \text{ (основание)}. \end{cases}$$

Неоднородная зона находится при $z \geq h_1 + h_2 \geq h_1$. Численные расчёты проводились для более простой модели (рис. 1), в которой

$$\sigma_{\text{осн}}(z) = \begin{cases} \sigma_2 = \text{const} & \text{при } z \in (h_1, h_1 + h_2), \\ \sigma_3 = \text{const} & \text{при } z \in (h_1 + h_2, \infty). \end{cases}$$

Такая модель вполне достаточна для анализа информативности различных компонент измеряемого поля.

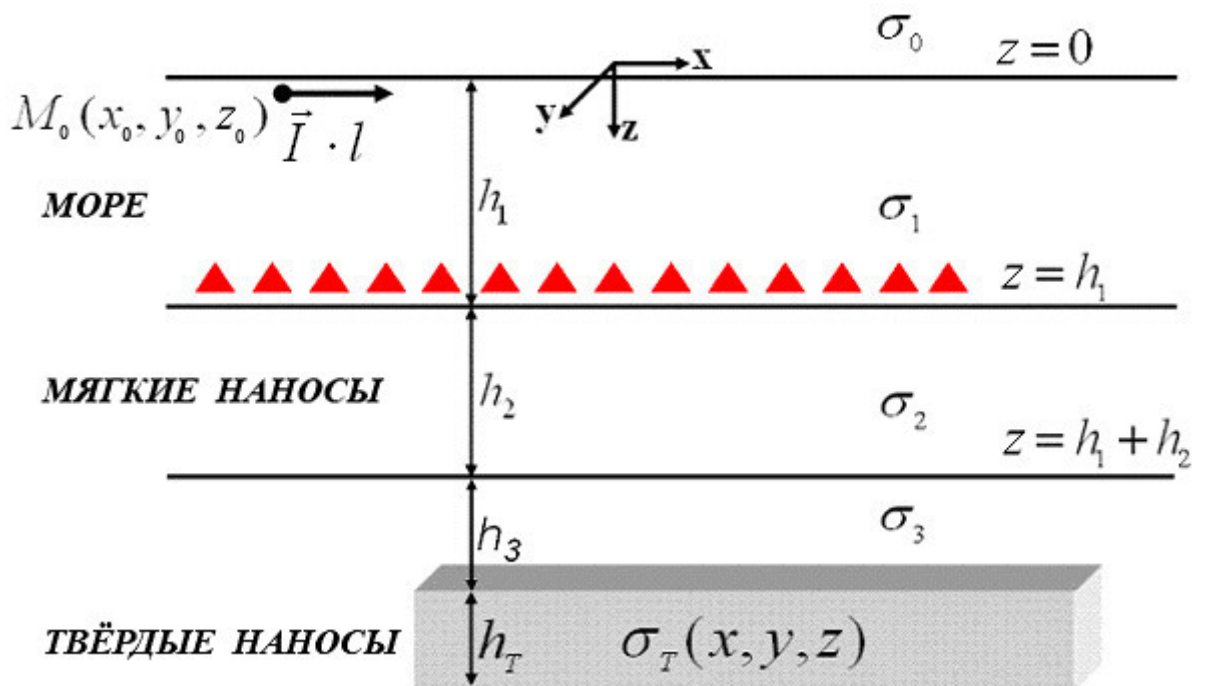


Рис.1. Модель горизонтально однородной слоистой среды с трёхмерной неоднородностью, возбуждаемой горизонтальным электрическим диполем.

Для расчёта электромагнитных полей в трёхмерной неоднородной среде применялся метод интегральных уравнений [3]. Используя тензорную функцию Грина, электромагнитные поля во всём пространстве можно записать в виде:

$$\vec{E}(M) = \vec{E}^N(M) + \int_V \hat{G}_E(M, M_0) \vec{j}(M_0) dv_{M_0}, \quad (1)$$

$$\vec{H}(M) = \vec{H}^N(M) + \int_V \hat{G}_H(M, M_0) \vec{j}(M_0) dv_{M_0}, \quad (2)$$

где \vec{E}^N и \vec{H}^N – нормальное электрическое и магнитное поле, возбуждаемое в горизонтально однородной слоистой среде горизонтальным электрическим диполем, $\vec{j}(M_0) = \sigma_a(M_0) \vec{E}(M_0)$ – избыточный ток в неоднородности. Аномальная проводимость σ_a равна разности между проводимостью неоднородности и проводимостью горизонтально однородной слоистой среды $\sigma_a = \sigma_T - \sigma_3$.

Тензора Грина электрического $\hat{G}_E(M, M_0)$ и магнитного $\hat{G}_H(M, M_0)$ типов, входящие в (1-2), являются решением уравнений Максвелла для произвольного электрического диполя:

$$\text{rot } \hat{G}_H = \sigma(z) \hat{G}_E + \hat{\delta}, \quad \text{rot } \hat{G}_E = i\omega\mu \hat{G}_H, \quad (3)$$

где

$$\hat{\delta} = \begin{pmatrix} \delta(R_{MM_0}) & 0 & 0 \\ 0 & \delta(R_{MM_0}) & 0 \\ 0 & 0 & \delta(R_{MM_0}) \end{pmatrix},$$

а $\delta(R_{MM_0})$ – трёхмерная функция Дирака. Для слоистой среды $\sigma(z)$ электромагнитные тензоры выражаются через тензорный потенциал \hat{A} в виде:

$$\hat{G}_H = \frac{1}{i\omega\mu} \text{rot } \hat{A}, \quad \hat{G}_E = \hat{A} + \text{grad} \left(\frac{1}{k^2(z)} \text{div } \hat{A} \right), \quad k^2 = i\omega\mu \sigma(z). \quad (4)$$

Тензорный потенциал является решением уравнения

$$\sigma(z) \text{grad} \left(\frac{1}{\sigma(z)} \text{div } \hat{A} \right) - \text{rot } \text{rot } \hat{A} + k^2(z) \hat{A} = -\hat{\delta}. \quad (5)$$

В работе [3] показано, что в слоистой среде тензорный потенциал имеет вид:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_1 & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & G_2 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

то есть определяется через три скалярные функции $G_1(M, M_0)$, $G_2(M, M_0)$ и $g(M, M_0)$, которые являются решениями следующих задач:

$$\Delta G_1 + k^2(z)G_1 = -\delta(R_{MM_0}), \quad [G_1]_z = 0, \quad \left[\frac{\partial G_1}{\partial z} \right]_z = 0, \quad (7)$$

$$\sigma \operatorname{div} \left(\frac{1}{\sigma} \operatorname{grad} G_2 \right) + k^2(z)G_2 = -\delta(R_{MM_0}), \quad [G_2]_z = 0, \quad \left[\frac{1}{\sigma} \frac{\partial G_2}{\partial z} \right]_z = 0, \quad (8)$$

$$\sigma \operatorname{div} \left(\frac{1}{\sigma} \operatorname{grad} g \right) + k^2(z)g = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}G_1, \quad [g]_z = 0, \quad \left[\frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial g}{\partial z} + G_1 \right) \right]_z = 0, \quad (9)$$

где скобки $[\varphi]_z$ обозначают разрыв функции $\varphi(z)$ в точке z . Искомые функции представляются через преобразование Бесселя:

$$G_1(M, M_0) = \frac{1}{2\pi_0} \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) V(z, \lambda) \lambda d\lambda, \quad (10)$$

$$G_2(M, M_0) = \frac{1}{2\pi_0} \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) U(z, \lambda) \lambda d\lambda, \quad (11)$$

$$g(M, M_0) = \frac{1}{2\pi_0} \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) u(z, \lambda) \lambda d\lambda, \quad (12)$$

где $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Функции, определяющие спектры Бесселя, являются решением следующих задач:

$$\frac{d^2 V}{dz^2} - \eta^2(z)V = 0, \quad [V]_z = 0, \quad \left[\frac{dV}{dz} \right]_z = -\Delta(z - z_0), \quad (13)$$

где

$$\eta^2 = \lambda^2 - k^2(z), \quad k^2 = i\omega\mu\sigma(z), \quad \operatorname{Re}\eta \geq 0, \quad \Delta(z - z_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \neq z_0, \\ 1 & \text{при } z = z_0, \end{cases}$$

$$\sigma \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{dU}{dz} \right) - \eta^2(z)U = 0, \quad [U]_z = 0, \quad \sigma(z') \cdot \left[\frac{1}{\sigma} \frac{dU}{dz} \right]_z = -\Delta(z - z_0), \quad (14)$$

$$\sigma \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{du}{dz} \right) - \eta^2(z)u = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}V(z, \lambda), \quad [u]_z = 0, \quad \left[\frac{1}{\sigma} \left(\frac{du}{dz} + V \right) \right]_z = 0. \quad (15)$$

Последнюю задачу можно упростить, исключив из её постановки $V(z, \lambda)$. Для этого введём новую функцию $v(z, \lambda)$ такую, что

$$u(z, \lambda) = v(z, \lambda) - \frac{1}{\lambda^2} \frac{dV}{dz}. \quad (16)$$

Функция $v(z, \lambda)$ является решением следующей задачи:

$$\sigma \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{dv}{dz} \right) - \eta^2(z) v = 0, \quad [v]_z = \Delta(z - z_0), \quad \left[\frac{1}{\sigma} \frac{dv}{dz} \right]_z = 0. \quad (17)$$

Задачи (13), (14) и (17) легко решаются, и мы можем, согласно (10-12) и (6), определить тензорный потенциал \hat{A} , а, следовательно, \hat{G}_H и \hat{G}_E в любой точке пространства.

Зная $\hat{G}_E(M, M_0)$, легко получить из (1) интегральное уравнение для аномального тока:

$$\vec{j}(M) - \sigma_a \int_V \hat{G}_E(M, M_0) \vec{j}(M_0) dv_{M_0} = \sigma_a(M) \vec{E}^N(M), \quad M \in V. \quad (18)$$

Определив из (18) аномальный ток $\vec{j} = \sigma_a \vec{E}$, легко определяем, согласно (1-2), электрическое и магнитное поле в любой точке пространства.

По данному алгоритму были проведены численные исследования электромагнитного поля в море для модели, показанной на рис. 1, при следующих значениях параметров:

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 0.1, \quad \sigma_3 = 0.05,$$

параметр σ_T меняется в диапазоне от 0.001 до 0.03,

$$h_1 = 100, \quad h_2 = 100,$$

параметр h_3 меняется в диапазоне от 200 до 300,

$$h_T = 20, \quad L_x = 240, \quad L_y = 480,$$

где L_x и L_y – размеры тела по оси Ox и Oy ,

$$x_0 = -1000, \quad y_0 = 0,$$

параметр λ_1 меняется в диапазоне от 1000 до 10000, λ_1 – длина волны в первом слое,

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{\text{Re}(k_1)} = \frac{2\pi}{\text{Re} \sqrt{i\omega\mu_0\sigma_1}} = \frac{2\pi\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\frac{\pi}{T}\mu_0}} = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} \rho_1 T,$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Все величины задаются в системе СИ: длины задаются в метрах, проводимости – в сименсах. Поскольку в международной системе единиц (СИ) магнитная проницаемость вакуума

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma H}{M},$$

то

$$\lambda_1 = \sqrt{10^7 \rho_1 T}.$$

Начало координат находится над центром неоднородности на поверхности моря. Электрический диполь расположен в точке $(x_0, y_0, 0)$ на поверхности моря. Он направлен вдоль оси Oy , его длина l , а ток в нём I . Расчёты проводились при значении

$$I \cdot l = 10^6 \text{ ам} \cdot \text{м}.$$

Графики построены для нормированного аномального поля. Например, для x -компоненты электрического поля рассчитывается величина

$$\left| \tilde{E}_x^a \right| = \frac{\left| E_x - E_x^N \right|}{\left| E_y^N \right|}$$

модуля x -компоненты аномального электрического поля при наличии трёхмерной неоднородности, нормированного на нормальную y -компоненту $|E_y^N|$ электрического поля в горизонтально однородной слоистой среде без неоднородности в зависимости от x при нескольких различных значениях y .

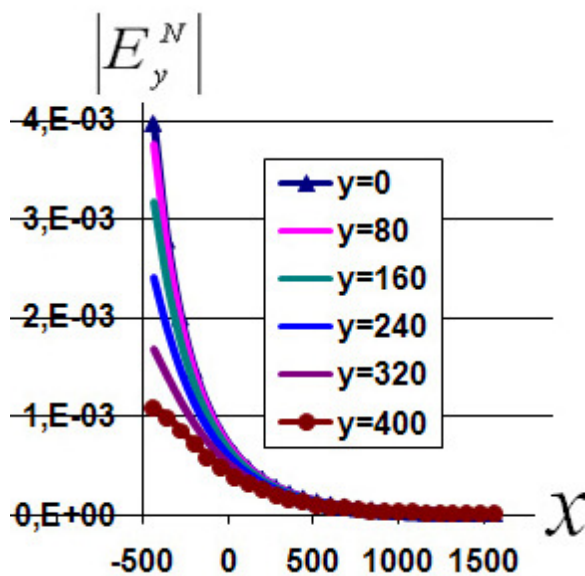


Рис.2

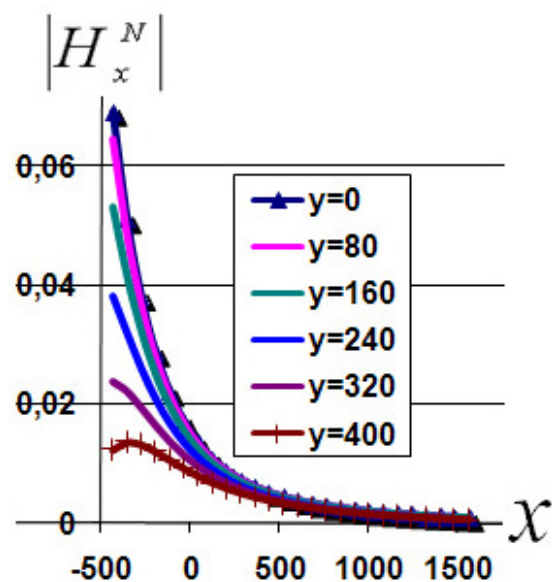


Рис.3

Для нормирующего знаменателя выбрана y -компонента $|E_y^N|$ электрического поля в горизонтально однородной слоистой среде, поскольку в точках плоскости $y = 0$, перпендикулярной направлению диполя и проходящей через точку расположения этого диполя электрический ток параллелен диполю в силу симметричности по y горизонтально однородной слоистой среды относительно плоскости $y = 0$. Поэтому при $y = 0$

$$\left| E_y^N \right| > 0, \quad \left| E_x^N \right| = 0, \quad \left| E_z^N \right| = 0,$$

а нас интересует зависимость поля от x при значениях y в окрестности точки $y = 0$, поскольку в модели, изображённой на рис.1 центр неоднородности

родности находится в точке для которой $x = 0$, $y = 0$. Чтобы понять поведение y -компоненты $|E_y^N|$ электрического поля и её величину на рис.2 приводятся графики модуля y -компоненты $|E_y^N|$ нормального электрического поля в горизонтально однородной слоистой среде без неоднородности в зависимости от x при нескольких различных значениях y .

Аномальное электрическое поле E_x^a вычисляется как разность между полным полем E_x и нормальным полем E_x^N :

$$E_x^a = E_x - E_x^N.$$

Нормированное на $|E_y^N|$ аномальное поле обозначено волнистой чертой сверху. Расчёты проводились при $\sigma_T = 0.001$, $h_3 = 200$ и $\lambda_1 = 1000$, причём график в зависимости от x для значения $y = 0$ не приводится, поскольку из-за симметричности модели по y относительно плоскости $y = 0$ значения $|\tilde{E}_x^a|$ при $y = 0$ обращаются в нуль. Из приведённых на рис.4 графиков значений $|\tilde{E}_x^a|$ видно, что положение неоднородности при $x = 0$ соответствует минимуму на этом графике значений. Левый максимум на этом графике примерно соответствует левой границе неоднородности. Правый максимум находится значительно правее правой границы неоднородности и на рисунок не попал. Сами значения x -компоненты нормированного аномального электрического поля достаточно большие. Практически измерить их можно.

На рис.5 и 6 приводятся графики модулей y -компоненты

$$|\tilde{E}_y^a| = \frac{|E_y - E_y^N|}{|E_y^N|}$$

и z -компоненты

$$|\tilde{E}_z^a| = \frac{|E_z - E_z^N|}{|E_z^N|}$$

аномального нормированного электрического поля при наличии трёхмерной неоднородности. Числовые значения компоненты $|\tilde{E}_y^a|$ значительно больше, чем у предыдущей компоненты, что позволяет их практически измерять. Из графика видно, что положение неоднородности при $x = 0$ соответствует минимуму на этом графике. Левый максимум на этом графике гораздо лучше соответствует левой границе неоднородности, чем в случае x -компоненты. Правый максимум находится значительно правее правой границы неоднородности и на рисунок не попал.

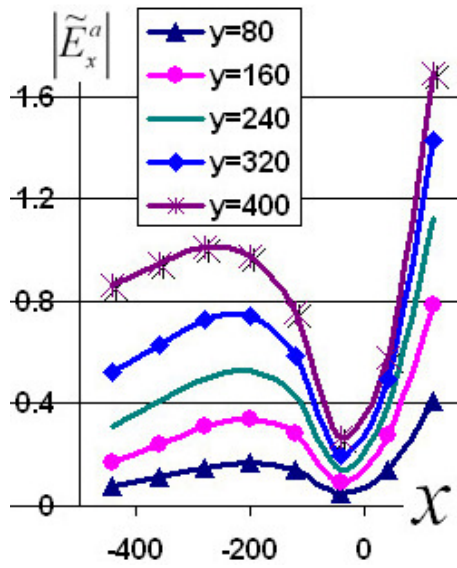


Рис.4

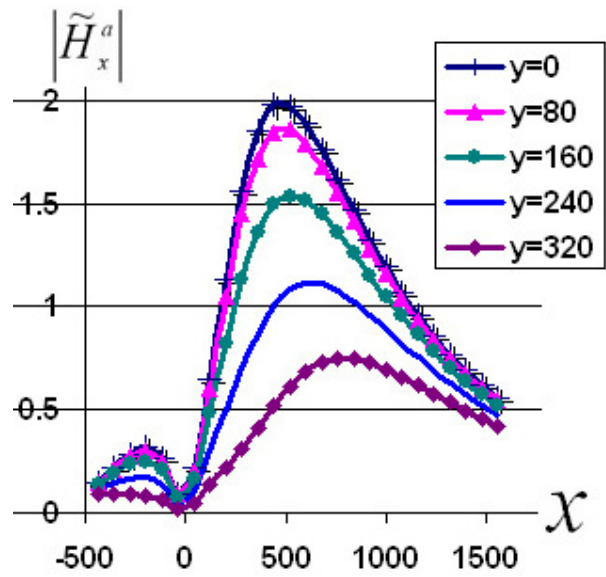


Рис.7

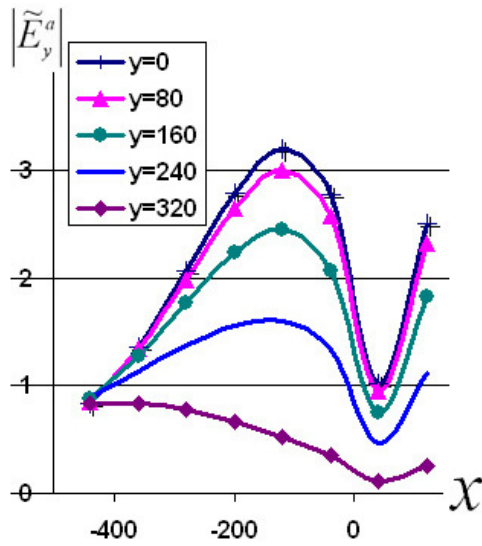


Рис.5

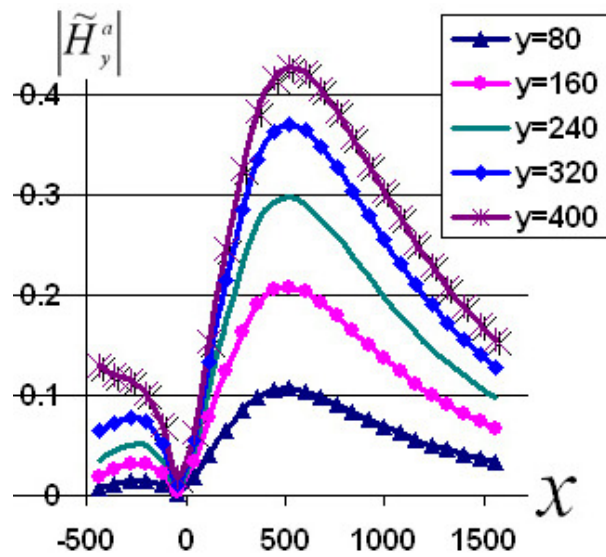


Рис.8

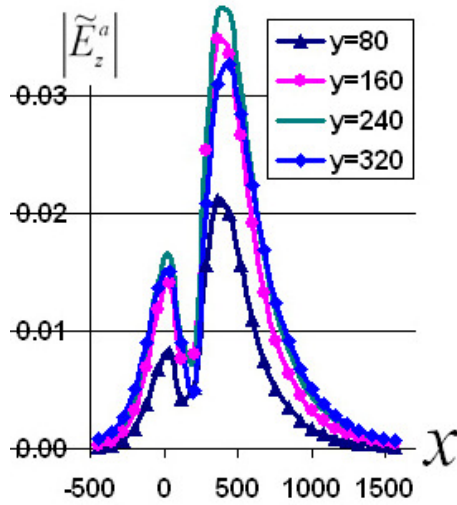


Рис.6

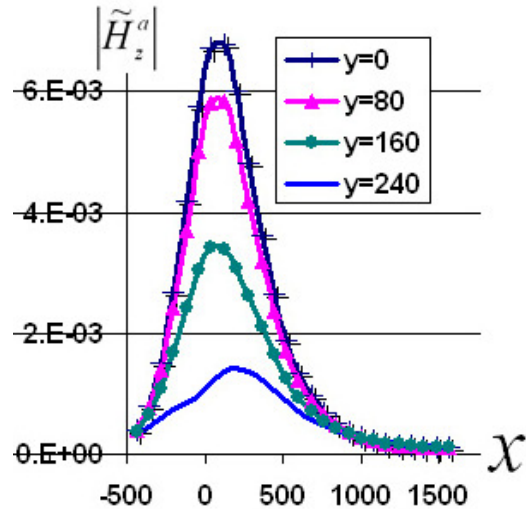


Рис.9

Модуль z -компоненты $|\tilde{E}_z^a|$ аномального электрического поля тоже информативен. Минимум на графике $|\tilde{E}_z^a|$ соответствует положению центра неоднородности, а максимумы на этом графике позволяют оконтурить неоднородность. Однако сами значения этой компоненты слишком малы и практически измерить их трудно. График значений $|\tilde{E}_z^a|$ аномального электрического поля в зависимости от x для значения $y=0$ на рис. 6 не приводится, поскольку из-за симметричности модели по y относительно плоскости $y=0$ значения $|\tilde{E}_z^a|$ при $y=0$ обращаются в нуль.

На рис. 7-9 приводятся графики модулей трёх компонент аномального нормированного магнитного поля при наличии трёхмерной неоднородности:

$$|\tilde{H}_x^a| = \frac{|H_x - H_x^N|}{|H_x^N|}, \quad |\tilde{H}_y^a| = \frac{|H_y - H_y^N|}{|H_x^N|}, \quad |\tilde{H}_z^a| = \frac{|H_z - H_z^N|}{|H_x^N|}.$$

Поскольку вектор магнитного поля перпендикулярен вектору электрического поля, то при $y=0$

$$|H_y^N| = 0, \quad |H_x^N| \geq 0, \quad |H_z^N| \geq 0.$$

Поэтому для нормирующего знаменателя нельзя выбрать y -компоненту $|H_y^N|$ магнитного поля в горизонтально однородной слоистой среде. Для нормирующего знаменателя при расчётах была выбрана x -компонента $|H_x^N|$ магнитного поля в горизонтально однородной слоистой среде. Чтобы понять поведение x -компоненты $|H_x^N|$ магнитного поля и её величину на рис.3 приводятся графики модуля x -компоненты $|H_x^N|$ нормального магнитного поля в горизонтально однородной слоистой среде без неоднородности в зависимости от x при нескольких различных значениях y .

Из графиков на рис.7-9 для аномального магнитного поля видно, что значения модуля x -компоненты $|\tilde{H}_x^a|$ аномального нормированного магнитного поля достаточно велики. Практически измерить их можно. Минимум на графике $|\tilde{H}_x^a|$ соответствует положению центра неоднородности, а максимумы приблизительно соответствуют границам неоднородности.

Значения модуля y -компоненты $|\tilde{H}_y^a|$ аномального нормированного магнитного поля хотя и меньше, но тоже достаточно велики. Практически измерить их можно. Минимум на графике $|\tilde{H}_y^a|$ соответствует положению центра неоднородности, а максимумы приблизительно соответствуют

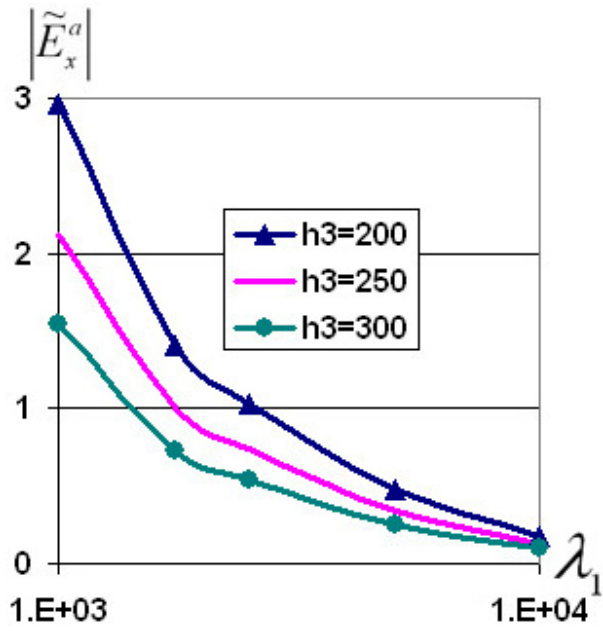


Рис.10

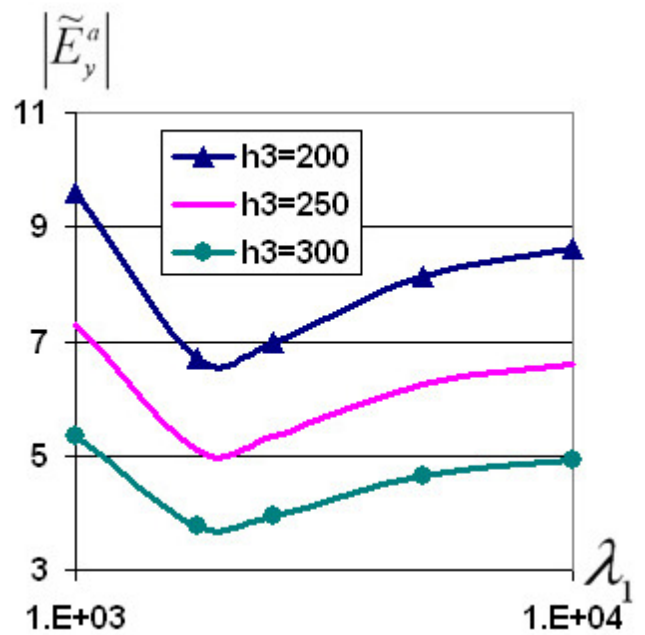


Рис.11

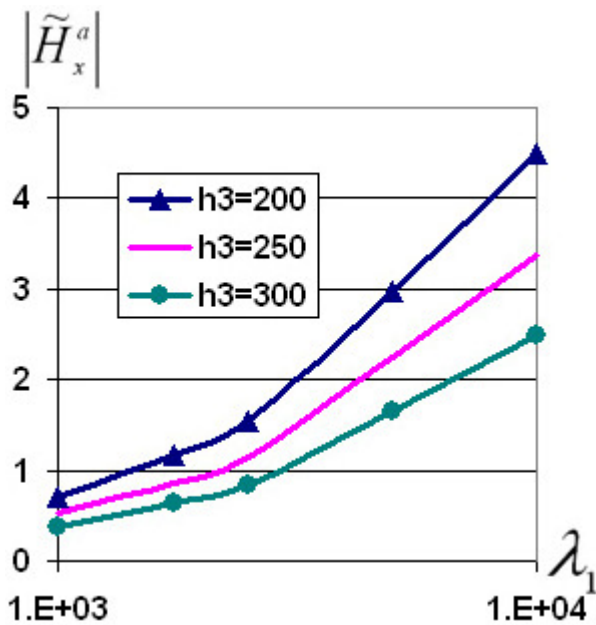


Рис.12

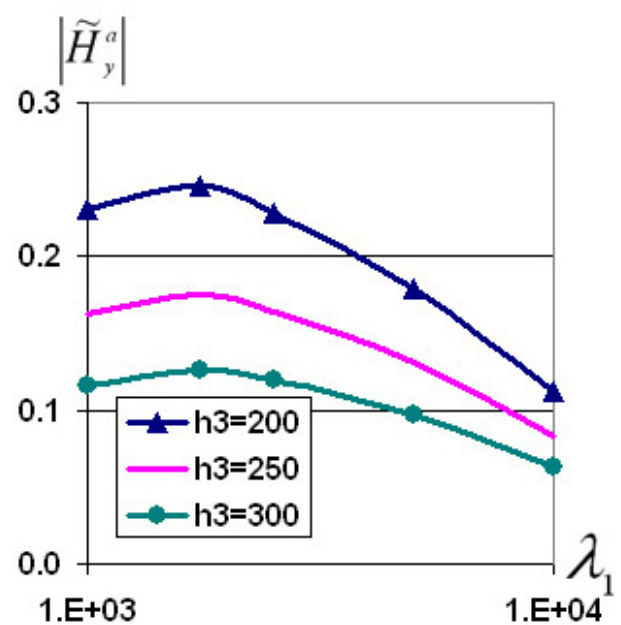


Рис.13

границам неоднородности. График значений $|\tilde{H}_y^a|$ аномального магнитного поля в зависимости от x для значения $y=0$ на рис. 8 не приводится, поскольку из-за симметричности модели по u относительно плоскости $y=0$ значения $|\tilde{H}_y^a|$ при $y=0$ обращаются в нуль.

Значения z -компоненты нормированного аномального магнитного поля слишком малы, поэтому практически измерить их трудно, хотя по

положению максимума z -компоненты нормированного аномального магнитного поля можно определить положение неоднородности.

Таким образом, наиболее целесообразно при морских электромагнитных зондированиях, когда поля возбуждаются электрическим током направленным по оси Oy , измерять следующие компоненты аномального электромагнитного поля: $\tilde{E}_x^a, \tilde{E}_y^a, \tilde{H}_x^a, \tilde{H}_y^a$. Поэтому в дальнейших исследованиях будут анализироваться именно эти компоненты поля.

Рассмотрим вначале вопрос о возможности определения глубины залегания неоднородности, если поля измеряются на разных частотах. На рис. 10-13 приводятся графики модулей компонент $\tilde{E}_x^a, \tilde{E}_y^a, \tilde{H}_x^a, \tilde{H}_y^a$ нормированного аномального электромагнитного поля в зависимости от длины волны λ_1 в точке $x = 280, y = 240$ на морском дне при разной глубине h_3 залегания неоднородности в слое твёрдых наносов. По оси λ_1 используется логарифмическая шкала. Из графиков видно, что при увеличении глубины h_3 залегания неоднородности численные значения всех полей уменьшаются. Кроме того, для модулей трёх нормированных компонент $\tilde{E}_x^a, \tilde{H}_x^a, \tilde{H}_y^a$ кривые по λ_1 при разных глубинах залегания неоднородности имеют разную кривизну. Они не параллельны друг другу. С ростом глубины залегания неоднородности кривизна графиков уменьшается. Таким образом, определённой глубине залегания неоднородности соответствует вполне определённый вид кривой. Это позволяет по виду измеренной в зависимости от λ_1 кривой определить глубину залегания неоднородности.

Для модуля нормированной компоненты \tilde{E}_y^a кривые по λ_1 при разных глубинах залегания неоднородности имеют практически одинаковый вид. Они параллельны друг другу. Однако по высоте, на которой расположена кривая всё-таки можно судить о глубине залегания неоднородности, что позволяет успешно решать обратную задачу определения глубины залегания неоднородности по измеренным при разных частотах на дне моря значениям электромагнитных полей.

Рассмотрим теперь вопрос о возможности определения проводимости неоднородности, если поля измеряются на разных частотах. На рис. 14-17 приводятся графики модулей компонент $\tilde{E}_x^a, \tilde{E}_y^a, \tilde{H}_x^a, \tilde{H}_y^a$ нормированного аномального электромагнитного поля в зависимости от длины волны λ_1 в точке $x = 280, y = 240$ на морском дне при разной проводимости σ_T неоднородности в слое твёрдых наносов. По оси λ_1 используется логарифмическая шкала.

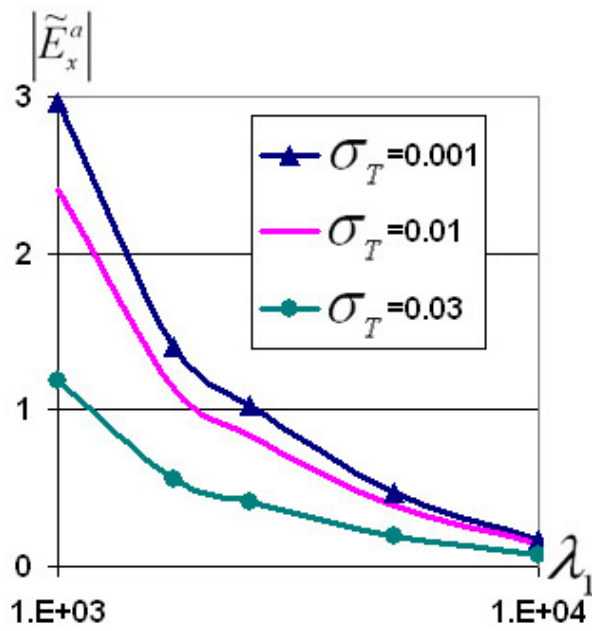


Рис.14

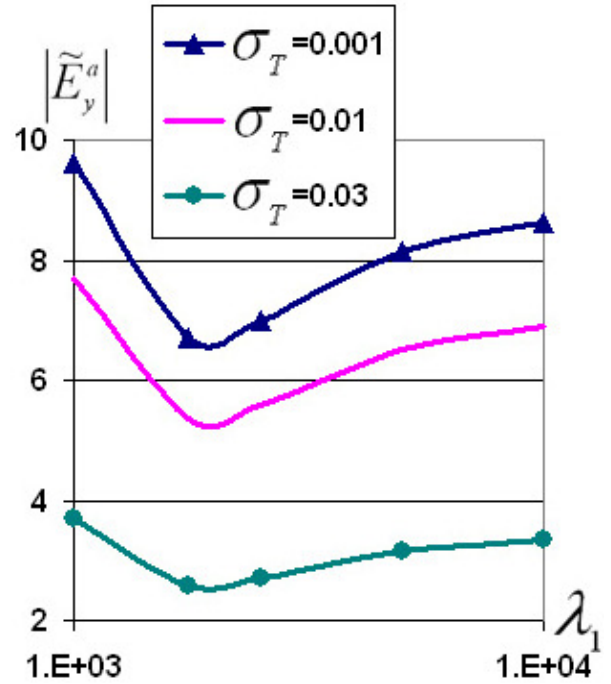


Рис.15

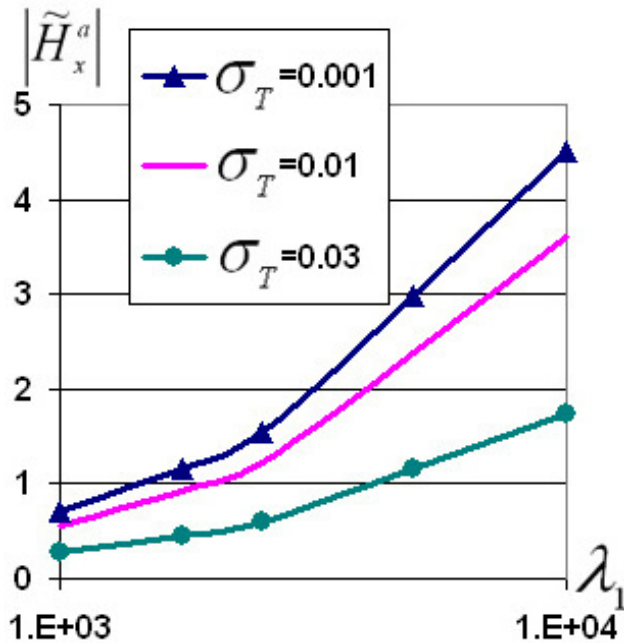


Рис.16

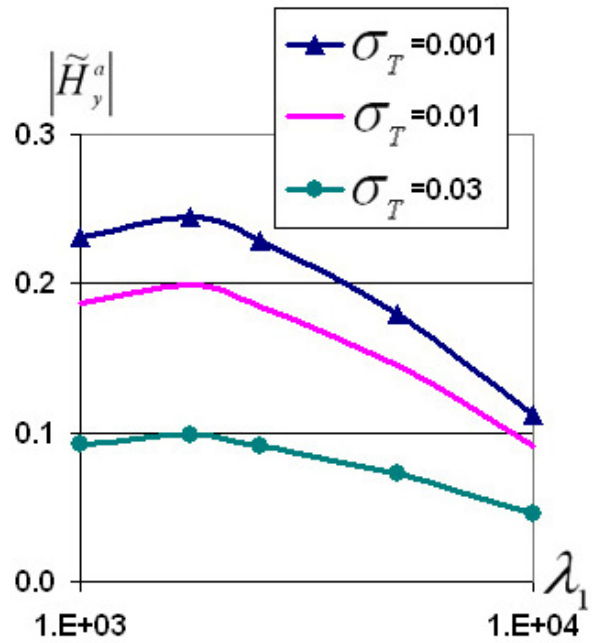


Рис.17

Из графиков видно, что чем больше проводимость σ_T неоднородности и чем ближе она к проводимости $\sigma_3 = 0,05$ слоя твёрдых наносов, в котором залегает неоднородность, тем меньше численные значения всех полей. Кроме того, для модулей трёх нормированных компонент

$\tilde{E}_x^a, \tilde{H}_x^a, \tilde{H}_y^a$ кривые по λ_1 при разных проводимостях неоднородности имеют разную кривизну. Они не параллельны друг другу.

С ростом проводимости неоднородности кривизна графиков уменьшается. Таким образом, определённой проводимости неоднородности соответствует вполне определённый вид кривой. Это позволяет по виду измеренной в зависимости от λ_1 кривой определить проводимость неоднородности.

Для модуля нормированной компоненты \tilde{E}_y^a кривые по λ_1 при разных проводимостях неоднородности имеют практически одинаковый вид. Они параллельны друг другу. Однако по высоте, на которой расположена кривая, всё-таки можно судить о глубине залегания неоднородности, что позволяет успешно решать обратную задачу определения проводимости неоднородности по измеренным при разных частотах на дне моря значениям электромагнитных полей.

Литература

1. Дмитриев В.И. Математическое моделирование влияния ионосферы на электромагнитное зондирование // Прикладная математика и информатика № 31, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2009.
2. Тихонов А.Н. Об асимптотическом поведении интегралов, содержащих бесселевы функции. ДАН 125, №5, 982-985.
3. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике. М.: МАКС Пресс, 2008.
4. Барашков И.С., Дмитриев В.И. Математическое моделирование электромагнитного поля удалённых источников в неоднородной среде // Прикладная математика и информатика № 32, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2009.
5. Барашков И.С., Дмитриев В.И. Математическое моделирование морских зондирований полем мощного удалённого источника при наличии сложной береговой линии // Прикладная математика и информатика № 34, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2010, с. 41-60.