А.А. Белолипецкий, М.А. Лепская

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПЕНСИОННЫХ ФОНДОВ И МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ИХ УСТОЙЧИВОСТИ

Проблема недостатка денежных средств на финансирование страховых пенсий текущим пенсионерам в бюджете Пенсионного Фонда обусловлена сложной демографической ситуацией в стране. Число пенсионеров с каждым годом увеличивается при сокращении работающей части населения, что приводит к нарастанию нагрузки на трудоспособное население. Среди особенностей российской пенсионной системы можно выделить: низкий пенсионный возраст, высокую долю лиц, имеющих право на разнообразные льготы, возможность получения пенсии для работающих пенсионеров, высокий уровень теневой занятости населения.

Бюджет Пенсионного Фонда в высокой степени формируется за счет неналоговых доходов и безвозмездных поступлений. Безвозмездные поступления составляли почти половину доходов Пенсионного фонда в 2012-2013 гг., с 2014 гг. их доля начала уменьшаться. Основную часть в составе всех безвозмездных поступлений составляют межбюджетные трансферты из федерального бюджета (около 99%). Наибольшая доля из всех налоговых и неналоговых доходов – это страховые взносы на обязательное социальное страхование (98–99%). Таким образом, основными источниками формирования бюджета Пенсионного Фонда являются страховые взносы на обязательное социальное страхование и межбюджетные трансферты из федерального бюджета.

Переходя к вопросу моделирования динамики пенсионных схем, математическая модель функционирования пенсионных фондов сводится к рассмотрению пенсионного фонда в качестве рискового резерва, где параметры поступлений и выплат могут быть как постоянными, так и случайными величинами. Случай постоянных выплат и случайных поступлений описывается моделью Камера-Лундберга, основанной на теории разорения скандинавской школы. Развивая теорию изменения рискового резерва можно получить условия, при которых происходит разорение рискового резерва, а также оценить вероятность данного разорения, указывающую на степень риска данной пенсионной схемы.

Представим пенсионный фонд как некий финансовый механизм, который пополняется за счет ежегодных выплат работающих участников (тех, кто уже вступил в пенсионную систему, но еще не достиг пенсионного возраста), и расходуется на периодическую выплату пенсий всем пенсионерам системы. В результате введения различных актуарных функций (дожития, ставки заработной платы, прогнозируемой ставки пенсионных выплат, количества участников пенсионной схемы, актуарной настоящей стоимости страхового аннуитета, уровня пенсионных выплат), модель функционирования пенсионных фондов сводится к двум уравнениям баланса для фонда работающих участников (так называемый фонд накопленных обязательств) и фонда пенсионеров, наполняемый взносами, рассчитанными по методу конечного финансирования, и инвестиционными доходами, и расходуемый на выплату пенсий. Разделение пенсионного фонда на две части позволяет более наглядно увидеть определенный денежный баланс, который соблюдается для фонда работающих участников и для фонда пенсионеров. При допущении, что экономическая ситуация на рынке может измениться, наибольший интерес представляет определение условий, при которых риск разорения фонда работающих участников велик и каким образом его можно уменьшить.

В данной статье рассматривается задача поиска вероятности разорения пенсионного фонда на конечном временном интервале. В качестве базовой модели рассматривается стандартная модель Крамера-Лундберга, которая претерпевает модификацию в данной работе в результате задания параметров поступления и выплат в фонд в виде случайных величин. Существует ряд факторов, которые можно рассматривать в качестве случайных величин в модели: время смерти участников пенсионной схемы, заработную плату участников, количество участников схемы, финансовые показатели (ставки дисконтирования и инвестиционного дохода, коэффициент инфляции, рост уровня заработной платы). Каждый из этих факторов с учетом заданиях их в виде случайных величин влияет на недетерминированность параметров поступлений и выплат в пенсионной схеме. В данной статье в качестве случайных факторов в постановке задачи рассматриваются количество человек, вступающие в пенсионную схему в год рассмотрения, и случайная смертность.

Математическая модель процесса накопления и расходования средств пенсионного фонда.

а) Математическая модель динамики портфеля пенсионного фонда.

Рассмотрим пенсионную схему со следующими параметрами:

1. Участники вступают в пенсионную схему и начинают платить взносы в возрасте a лет.
2. Достигнув возраста r лет участник выходит на пенсию и начинает получать пенсионные выплаты.

3. Что число участников старше R лет пренебрежимо мало.

4. Число людей $\boldsymbol{n}(t)$ возраста a, вступивших в пенсионную схему в t-ый год рассмотрения является случайной величиной.

5. Вступление и выход из пенсионный схемы в возрасте отличном от a невозможны.

Тогда в произвольный момент времени t возрастной состав участников пенсионной схемы может быть представлен в виде вектора:

$$\vec{\boldsymbol{N}}_t = \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}(t,a) \\ \boldsymbol{N}(t,a+1) \\ \ldots \\ \boldsymbol{N}(t,x) \\ \ldots \\ \boldsymbol{N}(t,r) \\ \ldots \\ \boldsymbol{N}(t,R) \end{bmatrix}, \tag{1}$$

каждая координата $\boldsymbol{N}(t,x)$ которого соответствует числу участников схемы возраста x по состоянию на год t.

Согласно сделанному выше предположению, первый элемент этого вектора соответствует числу участников, вновь вступивших в пенсионную схему в год t, и таким образом верно следующее равенство:

$$\boldsymbol{N}(t,a) = \boldsymbol{n}(t), \tag{2}$$

Рассмотрим теперь группу $\boldsymbol{N}(t,x)$ участников, которые в год t находятся в возрасте x лет. В год $t+1$ их возраст составит соответственно $x+1$ лет, а их число может быть представлено следующим образом:

$$\boldsymbol{N}(t+1,x+1) = \sum_{i=1}^{N(t,x)} \boldsymbol{\xi}_i(x), \tag{3}$$

где сумма берется по всей рассматриваемой группе, а величины $\boldsymbol{\xi}_i(x)$ являются индикаторами события, состоящего в том, что i-ый участник рассматриваемой группы пережил прошедший год:

$$\boldsymbol{\xi}_i(x) = \begin{cases} 1, & p(x) \\ 0, & 1-p(x) \end{cases}. \tag{4}$$

Здесь сделано предположение об однородности участников заданной возрастной группы, выражающемся в равенстве вероятностей $p(x)$ дожить до возраста x для всех участников. С учетом такого определения величин $\boldsymbol{\xi}_i(x)$ выражение (3) представляет из себя сумму числа успехов в $\boldsymbol{N}(t,x)$ одинаковых испытаниях Бернулли, а величина $\boldsymbol{N}(t+1,x+1)$ имеет биномиальное распределение:

$$\boldsymbol{N}(t+1, x+1) \sim Bin(\boldsymbol{N}(t,x), p(x)). \qquad (5)$$

В результате обобщения вышесказанного для всех возрастных групп, состав участников пенсионный схемы в $t+1$ год может быть представлен как:

$$\vec{\boldsymbol{N}}_{t+1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}(t+1,a) \\ \boldsymbol{N}(t+1,a+1) \\ \ldots \\ \boldsymbol{N}(t+1,x) \\ \ldots \\ \boldsymbol{N}(t+1,r) \\ \ldots \\ \boldsymbol{N}(t+1,R) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boldsymbol{n}(t) \\ Bin(\boldsymbol{N}(t,a), p(a)) \\ \ldots \\ Bin(\boldsymbol{N}(t,x-1), p(x-1)) \\ \ldots \\ Bin(\boldsymbol{N}(t,r-1), p(r-1)) \\ \ldots \\ Bin(\boldsymbol{N}(t,R-1), p(R-1)) \end{bmatrix} = \boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{N}}_t, \boldsymbol{n}(t), p). \qquad (7)$$

Таким образом, зная возрастной состав участников фонда в произвольный год t, можно спрогнозировать его динамику в течении любого временного промежутка.

Умножая вектор $\vec{\boldsymbol{N}}_t$ на матрицу E^W с единицами на первых r диагональных элементах получим вектор $\vec{\boldsymbol{N}}_t^W$, содержащий только работающую часть участников пенсионной схемы. Аналогично, умножением $\vec{\boldsymbol{N}}_t$ на матрицу E^I с единицами на последних $R-r$ диагоналях получим вектор $\vec{\boldsymbol{N}}_t^I$, характеризующий число пенсионеров:

$$\vec{\boldsymbol{N}}_t^W = E^W \vec{\boldsymbol{N}}_t; \qquad \vec{\boldsymbol{N}}_t^I = E^I \vec{\boldsymbol{N}}_t; \qquad (8)$$

$$E^W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}; \; E^I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}. \qquad (9)$$

b) Математическая модель пенсионных взносов и выплат.

Начальная годовая ставка пенсионных выплат является долей f от последней ставки заработной платы перед выходом на пенсию. Таким образом, для участника схемы, выходящего на пенсию (т.е. достигающего возраста r) момент времени t, прогнозируемая годовая ставка пенсионных выплат составит $fw(r)e^{\tau t}$. Для пенсионера возраста x момент времени t прогнозируемая годовая ставка пенсионных выплат равна $fw(r)e^{\tau(t-(x-r))}h(x)$, $x \geq r$, где $h(x)$ - поправочный коэффициент, применяемый к исходной ставке пенсионных выплат размера $fw(r)e^{\tau(t-(x-r))}$ тем лицам, которые вышли на пенсию $x-r$ лет назад. Заметим, что $h(r)=1$. Например, $h(x)$ может быть экспоненциальной функцией $e^{\beta(x-r)}$, где $\beta-$ постоянный коэффициент прироста (возможно, связанный ожидаемым темпом инфляции). Введем обозначение для ставки пенсионных выплат для пенсионера:

$$\boldsymbol{b}_t = fw(r)e^{\tau(t-(x-r))}h(x) = Ce^{\tau t}\left[h(x)e^{\tau(r-x)}\right] = Ce^{\tau t}F(x), \tag{10}$$

где

$$C = fw(r). \tag{11}$$

Взнос каждого участника пенсионной схемы определяется следующим образом:

$$\boldsymbol{q}_t = fw(r)a_r^h e^{-\delta(r-x)}m(x)e^{\tau(t+r-x)} = Ce^{\tau t}\left[a_r^h e^{-\delta(r-x)}m(x)e^{\tau(r-x)}\right] = Ce^{\tau t}G(x), \tag{12}$$

где $m(x)$ – функция плотности нарастания актуарных обязательств по пенсиям (функция $m(x)$ непрерывна для $a < x < r$, непрерывна справа в точке a слева в точке r так, что $m(x)=0$ для $x > r$), а

$$a_r^h = \sum_{x=r}^{\infty} e^{-\delta(x-r)}h(x)\frac{s(x)}{s(r)}, \tag{13}$$

где $s(x)$ – функция дожития (вероятность того, что новорожденный достигнет возраста x): $s(x) = 1 - F_X(x) = P(X > x),\ x \geq 0,\ s(0)=1.$

c) Математическая модель процесса накопления и расходования средств пенсионного фонда.

Составим вектор следующего вида:

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} G(a) \\ G(a+1) \\ \ldots \\ G(x) \\ \ldots \\ -F(r) \\ \ldots \\ -F(R) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_r^h e^{-\delta(r-a)}m(a)e^{\tau(r-a)} \\ a_r^h e^{-\delta(r-a-1)}m(a+1)e^{\tau(r-a-1)} \\ \ldots \\ a_r^h e^{-\delta(r-x)}m(x)e^{\tau(r-x)} \\ \ldots \\ -h(r) \\ \ldots \\ -e^{\tau(R-r)}h(R) \end{bmatrix}, \tag{14}$$

где x принимает все целочисленные значения от a до R.

Тогда, с учетом выражения (12), совокупный годовой объем взносов всех работающих в пенсионный фонд в год t может быть найден как:

$$\boldsymbol{Q}_t = Ce^{\tau t}\vec{V}E^W\vec{\boldsymbol{N}}_t, \tag{15}$$

а совокупный годовой объем всех пенсионных выплат, с учетом выражения (10) составит

$$\boldsymbol{B}_t = -Ce^{\tau t}\vec{V}E^I\vec{\boldsymbol{N}}_t, \tag{16}$$

где вектор $\vec{\boldsymbol{N}}_t$ представляет собой вектор (1), характеризующий возрастной состав участников пенсионной схемы.

Разница этих двух показателей представляет собой приращение объема пенсионного фонда в t-ом году:

$$\Delta\boldsymbol{H}_t = \boldsymbol{Q}_t - \boldsymbol{B}_t = Ce^{\tau t}\vec{V}\cdot\vec{\boldsymbol{N}}_t, \tag{17}$$

Здесь учтен тот факт, что сумма матриц E^W и E^I дает единичную матрицу, вследствие чего произведение векторов становится скалярным.

С учетом выражения (17) объем средств пенсионного фонда в произвольный момент времени t может быть найден следующим образом:

$$\boldsymbol{H}_t = H_0 + C\sum_{i=1}^{t} e^{\tau i}\vec{V}\cdot\vec{\boldsymbol{N}}_t, \tag{18}$$

где H_0 – объем пенсионного фонда в момент времени $t=0$. В совокупности с процессом (7), описывающим изменения состава участников пенсионной схемы, процесс (18) полностью характеризует динамику накопления/расходования средств пенсионным фондом.

Важно отметить, что в силу линейности процесса (18) относительно вектора состава участников $\vec{\boldsymbol{N}}_t$ рассмотрение пенсионных схем с возможностью вступления/ выхода в произвольном возрасте, отличном от a, равно как и схем с неоднородным (например, по половому признаку) составом участников, с различными функциями дожития $s(x)$ может быть произведено через суперпозицию соответствующих процессов (18) для различных a и $s(x)$.

В качестве меры устойчивости пенсионного фонда на конечном временном промежутке $[0,T]$ будем использовать вероятность его разорения, определенную следующим образом:

$$\boldsymbol{P} = \Pr\{\exists t < T : \boldsymbol{H}(t) < 0\}. \tag{19}$$

Процесс (18) не является марковским, в силу того, что его значения зависят от всей предыстории развития процесса (7). В силу этого факта, а также общей сложности рассматриваемых взаимосвязей, решение задачи нахождения вероятности (19) в аналитическом виде представляется затруднительным. В такой ситуации целесообразно использовать методы имитационного моделирования.

d) Математическая модель процесса накопления и расходования средств пенсионного фонда с учетом инвестиционной деятельности пенсионного фонда.

Предположим, что по результатам каждого финансового года средства фонда, оставшиеся после всех выплат размещаются на финансовом рынке с фиксированной средней ставкой доходности δ. Тогда выражение (17) для приращения объема фонда t-ом году должно быть переписано с учетом инвестиционного дохода от размещения средств, накопленных к концу предыдущего периода:

$$\Delta \boldsymbol{H}_t = \boldsymbol{Q}_t - \boldsymbol{B}_t + i\boldsymbol{H}_{t-1}, \tag{20}$$

а выражение для процесса (18) может быть представлено как

$$\boldsymbol{H}_t = H_0(1+\delta)^t + C\sum_{j=1}^{t-1} e^{\tau(t-j)}(1+\delta)^j \vec{V} \cdot \vec{\boldsymbol{N}}_{t-j}\,. \tag{21}$$

Имитационное моделирование.

a) Постановка эксперимента.

Рассмотрим пенсионный портфель при фиксированных параметрах a, r и R. Имитационный эксперимент поставим следующим образом: для $t=\overline{1,T}$ будем последовательно генерировать потоки случайных величин $\boldsymbol{n}(t)$ и $\{\boldsymbol{N}(t,x)\}_{x=a}^{R}$, на основе которых сформируем выборки значений процесса изменения возрастного состава участников фонда $\vec{\boldsymbol{N}}_t$. Далее, для фиксированных значений параметров δ, τ и β с использованием полученных значений $\vec{\boldsymbol{N}}_t$ рассчитаем динамику финансовых потоков пенсионного фонда и составим выборку значений процесса его накопления (21). На основе полученных выборок вероятность разорения фонда определяется как отношения числа реализаций соответствующего процесса, содержащих значения $\boldsymbol{H}(t)<0$, к общему числу проведенных экспериментов. Далее, повторяя описанную последовательность действий при различных значениях параметров получим оценку влияния этих параметров на устойчивость пенсионного фонда.

Вероятность индивида пережить x-ый год своей жизни $p(x)$, определяющая распределения случайных величин $\{\boldsymbol{N}(t,x)\}_{x=a}^{R}$ может быть определена через функцию дожития $s(x)$ как

$$p(x) = \frac{s(x+1)}{s(x)}. \tag{22}$$

В качестве последней, в данной серии экспериментов используем эмпирическую функцию, полученную на основе данных о продолжительности жизни мужской части населения США.

В качестве распределения величины $\boldsymbol{n}(t)$ – числа вновь вступивших в t-ом году участников фонда используем распределение Пуассона, описывающее число независимых событий, произошедших на конечном временном интервале. В целях упрощения анализа результатов будем считать это распределение постоянным во времени. В рамках предложенной модели характерное значение параметра распределения λ может быть получено из оценки общего числа участников пенсионной схемы:

$$E\sum_{x=a}^{R} n(t-(x-a))s(x) = \lambda \sum_{x=a}^{R} s(x) \sim 10^5 \div 10^6, \tag{23}$$

где E - символ математического ожидания. Однако, с целью уменьшения вычислительной сложности эксперимента, в дальнейшем будем полагать параметр $\lambda = 100$.

В каждом проведенном эксперименте были использованы 10^4 реализаций модели. Возраст вступления в пенсионную схему полагается равным $a = 20$ лет, максимальная продолжительность жизни $R = 120$лет. Если не оговорено иное, пенсионный возраст $R = 65$лет. Рассмотрение, по умолчанию, производится на временном интервале $T = 10$лет. Для начала, параметры δ, τ и β положим равными нулю. Размерная константа C принимается за единицу измерения объема денежных средств.

b) Моделирование процессов.

На рис. 1 представлен пример моделирования процесса изменения возрастного состава участников пенсионной схемы (несколько реализаций модели). Сплошной линией показана эмпирическая кривая дожития $s(x)$. Неопределенность числа участников возраста $x = 20$лет обуславливается величиной $\boldsymbol{n}(t)$ с дисперсией $D\boldsymbol{n}(t) = \lambda^2$. В дальнейшем это число начинает случайным образом убывать, с существенным увеличением скорости убывания в промежутке от 60 до 90 лет. После $x = 100$ лет можно наблюдать отдельных долгожителей.

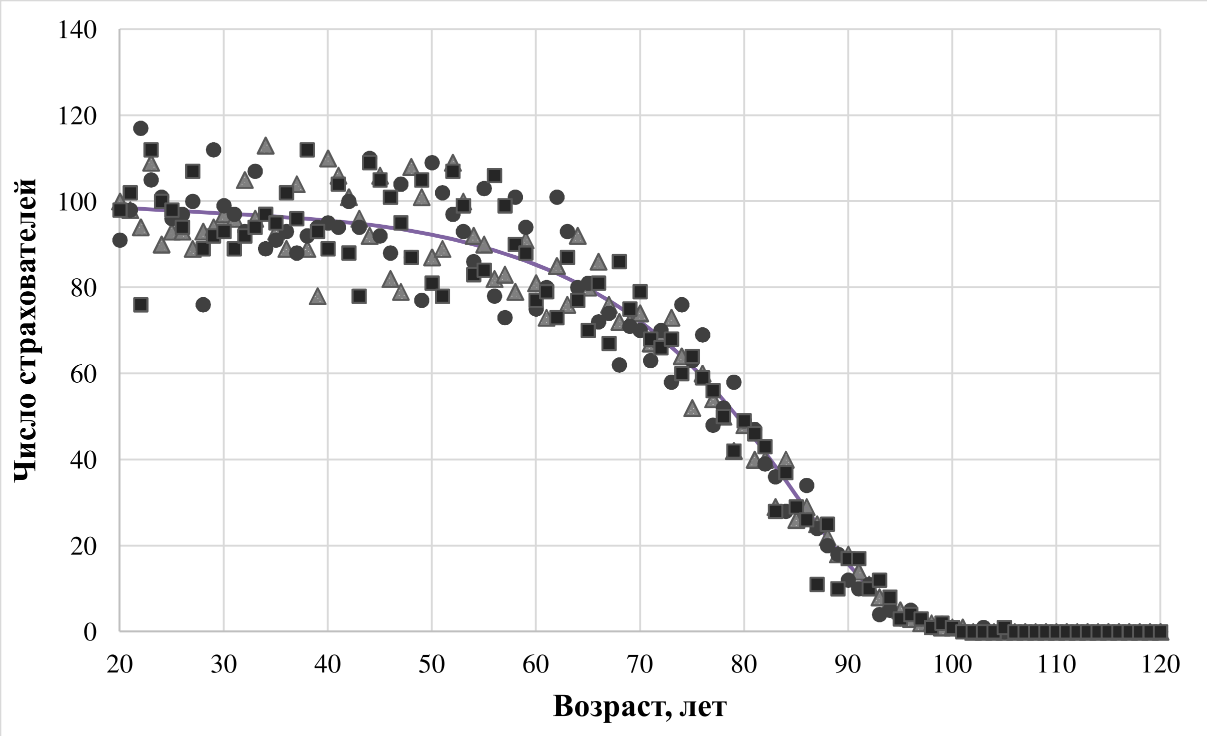

Рис. 1. Моделирование возрастного состава фонда.

На рис. 2 показано соответствующее рис. 1 распределение финансовых потоков от различных возрастных групп фонда. Видно, что основную неопределенность в результаты деятельности фонда вносит группа «молодых пенсионеров» возраста 65-80 лет.

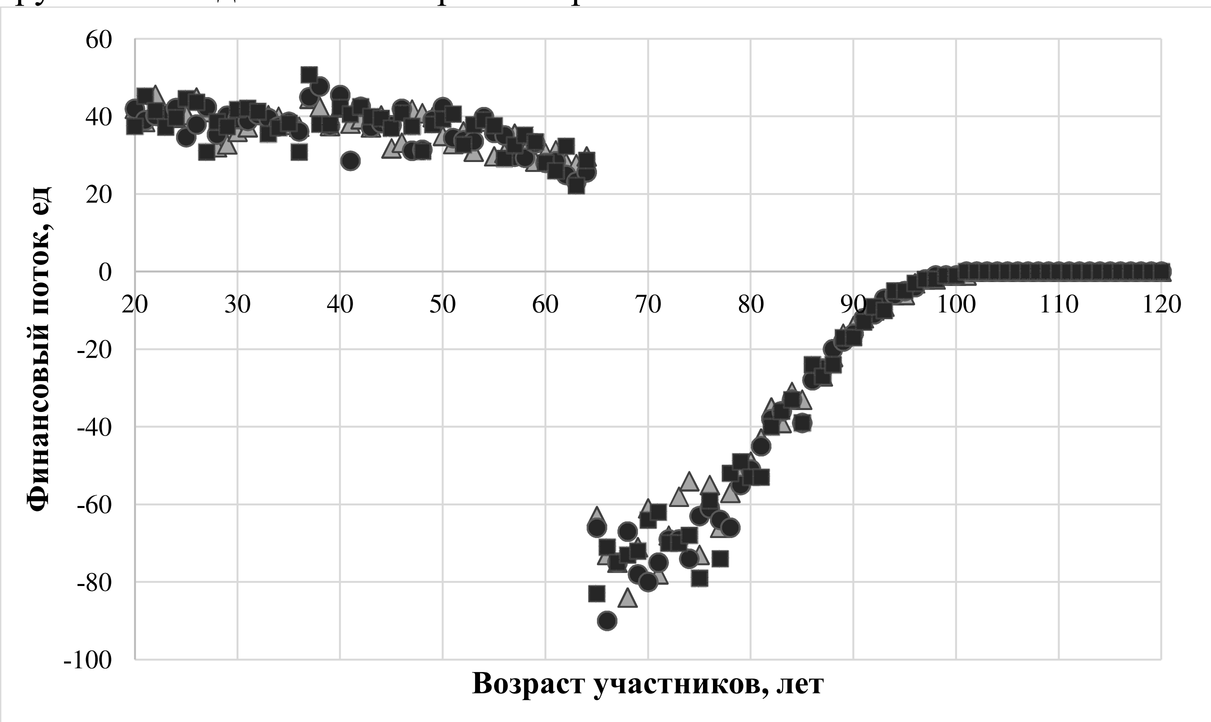

Рис. 2. Моделирование финансовых потоков фонда.

Пример распределения значений результата деятельности фонда за $T = 10$ лет $\boldsymbol{H}_T$ представлен на рис. 3 (в этом примере $\tau = 0.05$). В качестве начального состояния портфеля фонда $\vec{N}_0$ использовались ожидаемые значения $E\boldsymbol{n}(t-x+a)s(x)$. Представленное распределение соответствует уровню устойчивости с вероятностью разорения фонда на рассмотренном промежутке $\boldsymbol{P}$ =*5.5%*. По форме распределение близко к нормальному, но имеет свои особенности, которые требуют отдельного рассмотрения. Кроме того, при детальном рассмотрении можно охарактеризовать распределение $\boldsymbol{H}_T$ наличием «тяжелых хвостов» в левой его части, соответствующих случаям, когда в момент разорения деятельность фонда, по каким-либо причинам не прекращается, и убыток продолжает накапливаться.

Рис. 3. Пример распределения конечного объема фонда.

c) Устойчивость пенсионного фонда и ей зависимость от параметров.

Получив, таким образом, метод оценки вероятности разорения $\boldsymbol{P}$, рассмотрим, как зависит устойчивость пенсионного фонда от параметров пенсионной схемы и внешних условий. Для примера, в качестве таковых рассмотрим ставки δ, τ, β и уровень пенсионного возраста r.

На рис. 4 показана зависимость вероятности разорения $\boldsymbol{P}$ от доходности резервов пенсионного фонда δ при значениях прочих параметров, установленных по умолчанию. Видно, что доходность резервов существенно влияет на результаты деятельности фонда: низкие уровни доходности, на уровне реальных безрисковых ставок в США, при прочих равных условиях, гарантируют его разорение. Вместе с тем, относительно небольшое увеличение доходности резервов выводит фонд в устойчивое состояние с вероятностью разорения $\boldsymbol{P}=0$, оправдывая включение в инвестиционный портфель фонда разнородных финансовых инструментов, возможность чего, однако, часто терпит ограничения со стороны регуляторов.

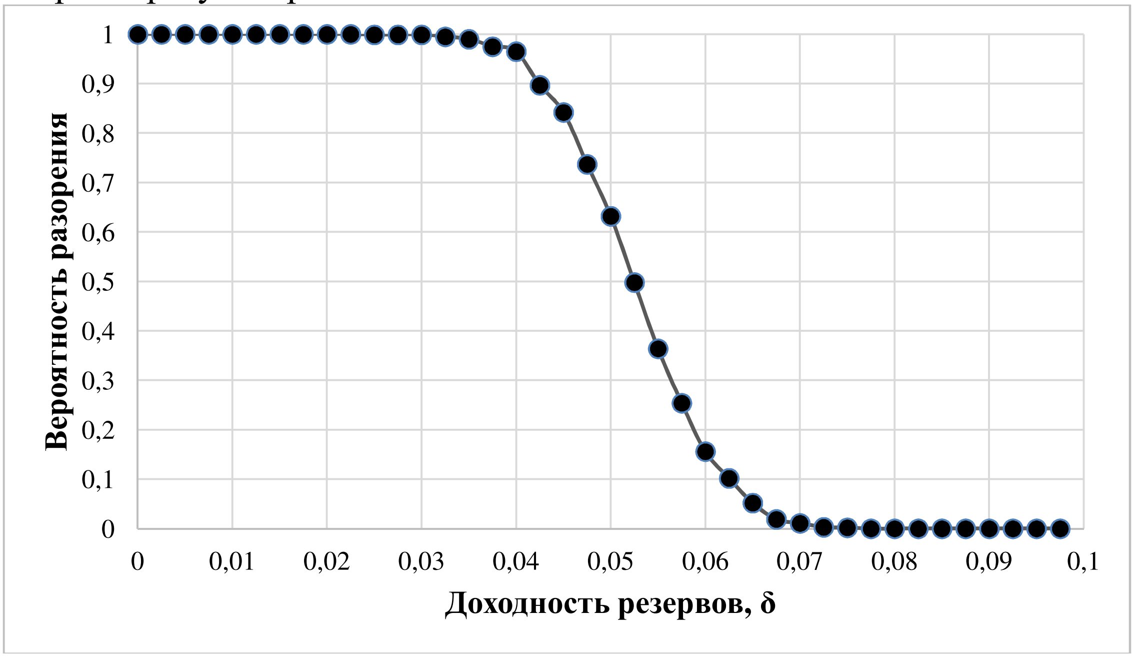

Рис. 4. Зависимость вероятности разорения $\boldsymbol{P}$ от доходности резервов пенсионного фонда δ.

Другим ключевым параметром, оказывающим существенное влияние на устойчивость пенсионного фонда, является темп роста заработных плат τ: он в некоторой степени находится в противоборстве с инвестиционной доходностью: с увеличением τ увеличивается скорость обесценивания резервов фонда и накопленных взносов оказывается недостаточно для покрытия будущих пенсий (рис. 5).

Рис. 5. Зависимость вероятности разорения $\boldsymbol{P}$ от темпа роста заработной платы τ.

Ситуация усугубляется, с включением в модель фактора увеличения пенсий с возрастом β (рис. 6).

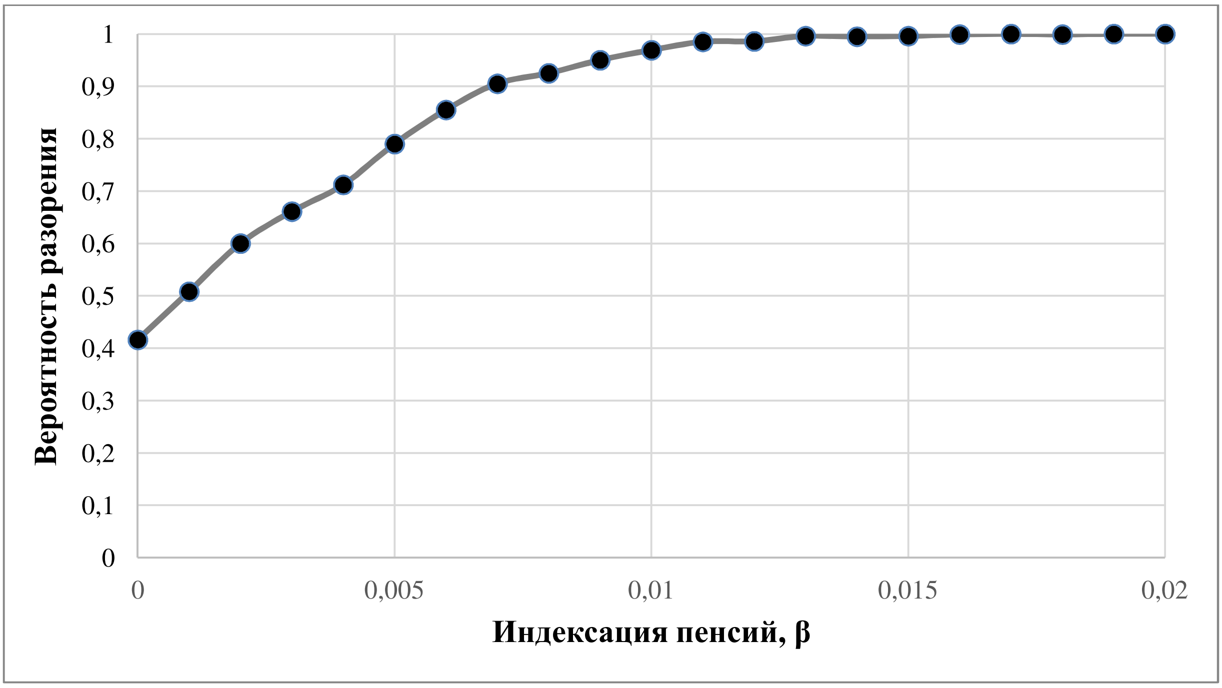

Рис. 6. Зависимость вероятности разорения $\boldsymbol{P}$ от уровня индексации пенсий β (при $\tau = 0.075$, $\delta = 0$).

В условиях высокой инфляции и низкой доходности резервов единственным, в рамках рассмотренной модели, способом увеличения устойчивости пенсионного фонда оказывается повышение пенсионного возраста (рис. 7).

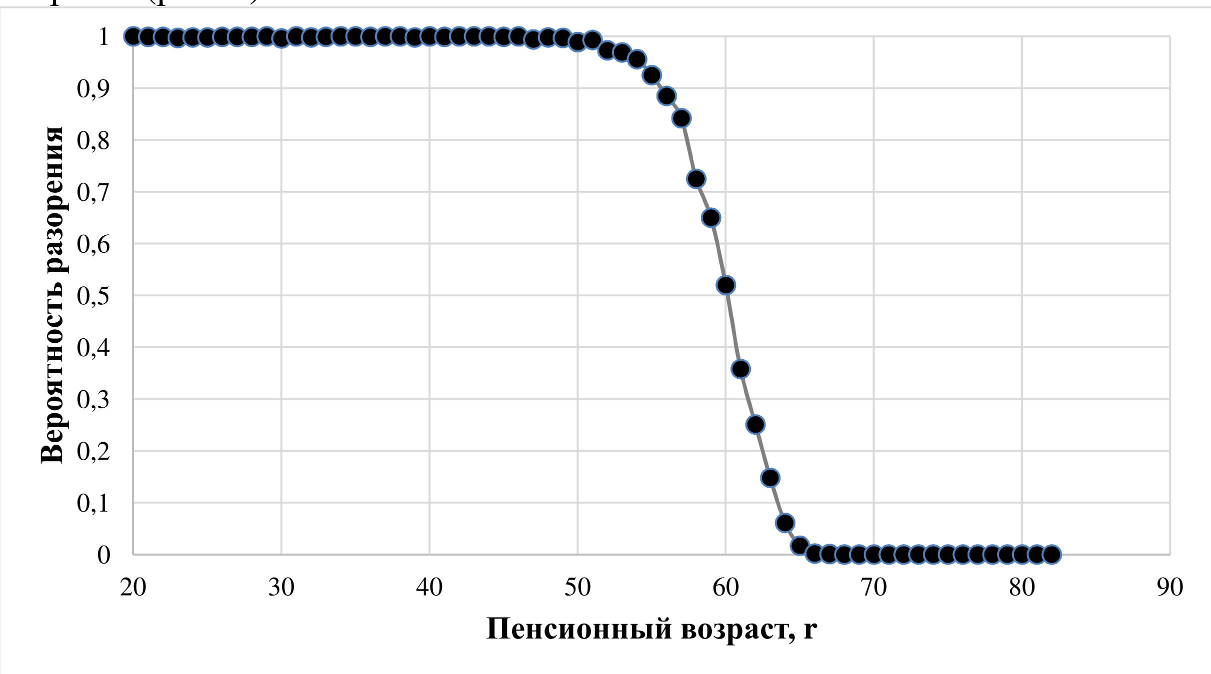

Рис. 7. Зависимость вероятности разорения $\boldsymbol{P}$ от установленного порога пенсионного возраста r .

Выводы.

Стохастический характер финансовых потоков пенсионных фондов требует, применения при их рассмотрении теоретико-вероятностного подхода. В рамках такого подхода факторами неопределённости должны выступать как параметры страхового портфеля фонда, так и колебания макроэкономических параметров.

В настоящей работе была предложена стохастическая модель процесса изменения возрастного состава участников фонда, использование которой позволяет описать пенсионный фонд с любыми условиями вступления/выхода и сколь угодно сегментированным составом участников. На основе этой модели, с использованием методов актуарной математики может быть произведена оценка будущих финансовых потоков фонда, и спрогнозирована динамика процесса его накопления.

В виду отсутствия у рассматриваемых процессов Марковского свойства, а также общей сложности исследуемых взаимосвязей, решение задачи нахождения вероятности разорения пенсионного фонда в аналитическом виде оказывается затруднительным. В такой ситуации для оценки устойчивости пенсионного фонда эффективным оказывается применение методов имитационного моделирования.

Предложенные имитационные алгоритмы могут быть использованы для оценки влияния на устойчивость фонда параметров формирования пенсионных взносов и выплат, а также стратегий управления резервами, исследования чувствительности результатов деятельности пенсионного фонда к изменениям внешних факторов и макроэкономических показателей.

Литература.

1. *Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д., Несбитт С., Хикман Д.* Актуарная математика. – М.: Янус – К, 2001. – 656 с.
2. *Бойков А.В*. Модель Крамера-Лундберга со стохастическими премиями // Теория вероятностей и её применение. – 2002. Т. 47. Вып.3. С. 549–553.
3. *Виноградов О.П.* Об одном элементарном методе получения оценок вероятности разорения // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 1998. Т.5. Вып.1. С. 134-149.
4. *Глухова Е.В., Змеев О.А., Ливщиц К.И.* Математические модели страхования. – Томск: Изд-во Томского университета, 2004. – 180 с.
5. *Королев В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я.* Математические основы теории риска. – М.: Физматлит, 2007. – 542 с.