А.А. Белолипецкий, Е.А. Малинина

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ

1.Постановка задачи в безразмерной форме

Диффузионное проникновение газа внутрь тонкой сферической оболочки под внешним давлением описывается уравнением

$$\frac{\partial \rho}{\partial t'} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 D \frac{\partial \rho}{\partial r}. \tag{1.1}$$

Здесь $\rho(r,t'), D$ – молярная плотность и коэффициент диффузии газа соответственно. Внешний и внутренний радиусы оболочки обозначим r_0, r_1. Малый параметр $\delta = \frac{r_0 - r_1}{r_0}$ характеризует аспектное число оболочки, равное δ^{-1}. Считаем, что в процессе диффузии газ в полости быстро перемешивается, поэтому плотность $\rho_{\text{int}}(t')$ и давление $p_{\text{int}}(t')$ внутри оболочки не зависят от пространственных координат. Внешнее давление

$$p_{ext}(t') = p_{\text{int}}(t') + \Delta p(t'), \tag{1.2}$$

где $\Delta p > 0 -$ избыточное давление, ограниченное сверху прочностными свойствами оболочки. На внутренней стенке оболочки выполняются граничные условия

$$\rho(r_1, t') = \rho_{\text{int}}(t'), \tag{1.3}$$

$$\frac{d\rho_{\text{int}}}{dt'} = \frac{3D}{r_1}\frac{\partial \rho}{\partial r}\Big|_{r=r_1}, \ \rho_{\text{int}}(0) = \rho_0. \tag{1.4}$$

Последнее уравнение описывает изменение плотности внутри оболочки вследствие диффузии. Газ предполагается неидеальным, его уравнение состояния есть $p = W_0(\rho)$, где согласно закону Ван-дер-Ваальса

$$W_0(\rho) = \frac{RT\rho}{(1 - b\rho)} - a\rho^2. \tag{1.5}$$

Здесь R, p, T – универсальная газовая постоянная, давление и температура, при которой происходит заполнение, a, b – постоянные, определяемые критическими параметрами газа.
Для записи модели в безразмерном виде приведем некоторые характерные значения физических величин.
$R = 8,31 \dfrac{дж}{моль\ K}$ – универсальная газовая постоянная,
$T = 300K$ – температура, при которой происходит заполнение.
Значения некоторых параметров для дейтерия:
$b = V_c / 3 = 19.23 \cdot 10^{-6} м^3 / моль$, $a = 27/8RT_c b, T_c = 31K$, $D = 1,6 \cdot 10^{-11} м^2/c$.
Характерное давление $p^* = \dfrac{RT}{b}$=$1,2964 \cdot 10^8 \, Па$. Разность давлений вне и внутри оболочки
$\Delta p = 0.24 \cdot 10^5$ Па, $\alpha = \dfrac{\Delta p}{p^*} \sim 10^{-4}$.
Геометрические параметры оболочки типичные для лазерной мишени:
$r_0 \approx 10^{-3} м$, $w = r_0 - r_1 = 3 \cdot 10^{-6} м$.

Введем следующие безразмерные величины.
Безразмерное время
$t = t'/t^*$, где $t^* = r_0^2 / D \approx \dfrac{1,04 \cdot 10^{-6} м^2}{1,6 \cdot 10^{-11} м^2/c} = 0,65 \cdot 10^5 c$.
Безразмерная координата
$x = (r_0 - r)/w \Rightarrow r = r_0(1 - \delta x)$, где $\delta = w / r_0 \approx 3 \cdot 10^{-3}$.
Безразмерная плотность $u = (\rho - \rho_0)b$ и *безразмерное давление* $y = p / p^*$.
При этом безразмерная начальная плотность газа внутри оболочки $b\rho_0 \sim 10^{-5}$. В новых обозначениях уравнение состояния (1.5) примет вид

$$y = W(u) \equiv \frac{u + b\rho_0}{1 - u - b\rho_0} \left[1 - \gamma(u + b\rho_0)(1 - u - b\rho_0)\right], \qquad (1.6)$$

где $\gamma = \dfrac{a}{bRT} = \dfrac{27T_c}{T} = \dfrac{27}{8}\dfrac{300}{30} \approx 0,33$. В частности, отсюда следует, что

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \left[\frac{1}{(1 - u - b\rho_0)^2} - 2\gamma(u + b\rho_0) \right] \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Уравнение (1.1) для функции $u(x,t)$ и граничные условия (1.2)-(1.4) запишутся как

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{(1 - \delta x)^2} \frac{\partial}{\partial x} (1 - \delta x)^2 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad x \in [0,1], t \in [0,T]. \qquad (1.7)$$

Здесь $\varepsilon = \delta^2 \approx 10^{-5}$. Обозначим безразмерную плотность внутри оболочки $\mu(t) = b(\rho_{\text{int}}(t^* t) - \rho_0)$. Тогда граничные условия (1.3)-(1.4) примут вид

$$\mu(t) = u(1,t), \tag{1.8}$$

$$\frac{d\mu}{dt} = -\beta \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1}, \ \mu(0) = 0, \tag{1.9}$$

где $\beta = \dfrac{Dt^*}{\delta r_1}$. Пусть безразмерная плотность газа на внешней стенке оболочки равна $u_{ext} = u_{\text{int}} + \Delta u = \mu + \Delta u$. Очевидно, что безразмерные давления внутри и вне оболочки равны $y_{\text{int}} = W(\mu)$, $y_{ext} = W(\mu + \Delta u)$. Условие (1.2) запишется как $W(\mu + \Delta u) = W(\mu) + \alpha$, где $\alpha = \dfrac{\Delta p}{p^*} \sim 10^{-4}$. Разложим левую часть этого равенства в ряд Тейлора, ограничившись первыми двумя членами. Отсюда и из (1.6) получим

$$\Delta u(\mu, t) = \frac{\alpha(t)}{W'(\mu)} = \frac{\alpha(t)}{\left[\dfrac{1}{(1-\mu-b\rho_0)^2} - 2\gamma(\mu + b\rho_0)\right]}.$$

Переходя в граничном условии (1.2) от равенства давлений к равенству плотностей на внешней границе, получим

$$u(0,t) = \mu + \Delta u(\mu,t) = \mu + \frac{\alpha(t)}{W'(\mu)} =$$

$$= \mu + \frac{\alpha(t)}{\left[\dfrac{1}{(1-\mu-b\rho_0)^2} - 2\gamma(\mu + b\rho_0)\right]} \equiv \Phi(\mu,t). \tag{1.10}$$

Пусть начальные условия имеют вид

$$u(x,0) = U(x), \tag{1.11}$$

При этом выполнены условия согласования

$$U(1) = 0, \ U(0) = \Phi(0,0) . \tag{1.12}$$

Основной результат о существовании и виде решения этой задачи приведен в теореме 2 в конце статьи при выполнении приведенных ниже предположений.

Предположение 1. Функция $\alpha(t)$ непрерывно дифференцируема и $\mu(t) + b\rho_0 < 1$ на $[0,T]$.

Отсюда следует, что:

А) Функция $\Phi(\mu,t)$ определена на некотором прямоугольнике $[0,\bar{\mu}] \times [0,T]$, непрерывна по обеим переменным, ее производные $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \mu} \equiv \Phi_\mu(\mu,t)$, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} \equiv \Phi_t(\mu,t)$ непрерывны на нем;

Б) производная $\Phi_\mu(\mu,t)$ удовлетворяет условию Липшица с липшицевой константой L, т.е. для всех значений $t\in[0,T]$ справедливо неравенство $\left|\Phi_\mu(\mu_1,t)-\Phi_\mu(\mu_2,t)\right|\le L\left|\mu_1-\mu_2\right|$, $\mu_1,\mu_2\in[0,\bar{\mu}]$;

В) Существует постоянная $k<1$ такая, что для всех $t\in[0,T]$ справедливо неравенство $\max\limits_{\mu\in[0,\bar{\mu}]}\left|\Phi_\mu(\mu,t)\right|<k$.

Предположение 2. Функция $U(x)$ определена на отрезке $[0,1]$, непрерывна и дважды непрерывно дифференцируема на нем.

Введем функцию

$$v(x,t)=(1-\delta x)u(x,t)-x(1-\delta)\mu(t)-(1-x)\Phi(\mu(t),t). \qquad (1.13)$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{1}{(1-\delta x)^2}\frac{\partial}{\partial x}(1-\delta x)^2\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{(1-\delta x)}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \qquad (1.14)$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{v}{1-\delta x}+\frac{x(1-\delta)}{1-\delta x}\mu+\frac{1-x}{1-\delta x}\Phi\right]=\\
&=\frac{1}{(1-\delta x)}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\delta v}{(1-\delta x)^2}+\frac{1-\delta}{(1-\delta x)^2}(\mu-\Phi),\\
&\frac{\partial}{\partial x}(1-\delta x)^2\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-\delta x)\frac{\partial v}{\partial x}+\delta v+(1-\delta)(\mu-\Phi)\right]=\\
&=(1-\delta x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.
\end{aligned} \qquad (1.15)$$

Отсюда получаем (1.14). Уравнение (1.7) теперь запишется как

$$\varepsilon\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\varepsilon x(1-\delta)\mu'(t)-\varepsilon(1-x)\Phi'(\mu(t),t). \qquad (1.16)$$

Здесь и далее используется обозначение

$$\Phi'(\mu(t),t)\equiv\frac{d}{dt}\Phi(\mu(t),t)=\Phi_\mu(\mu(t),t)\mu'(t)+\Phi_t(\mu(t),t).$$

Граничные условия с учетом (1.8), (1.10), (1.13) примут вид

$$v(0,t)=v(1,t)=0. \qquad (1.17)$$

Из (1.3), (1.9) и (1.13) получим

$$\frac{d\mu}{dt}=-\beta\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\Phi(\mu(t),t)+\mu(t)\right)\Big|_{x=1},\ \mu(t_0)=0, \qquad (1.18)$$

где $\beta=\dfrac{\alpha}{1-\delta}$.

Начальное условие с учетом (1.5) имеет вид

$$v(x,0) = (1-\delta x)U(x) - (1-x)\Phi(0,0). \tag{1.19}$$

А в силу условий согласования (1.12)

$$v(0,0) = v(1,0) = 0. \tag{1.20}$$

Задача (1.16)-(1.20) является сингулярно возмущенной краевой задачей Коши с малым параметром ε при производной по времени.

2.Решение вырожденной задачи и уравнений погранслоя

При $\varepsilon=0$ решение системы (1.16)-(1.17) тривиально: $v_0(x,t)\equiv 0$. Уравнение (1.18) запишется как

$$\frac{d\mu_0}{dt} = \frac{\beta\alpha(t)}{W'(\mu_0)},\ \mu_0(t_0) = 0. \tag{2.1}$$

Решение этой задачи имеет вид

$$W(\mu_0(t)) = W(0) + \beta\int_{t_0}^{t}\alpha(s)ds. \tag{2.2}$$

Полученное нулевое приближение не удовлетворяет граничным условиям. Чтобы добиться удовлетворения этих условий, построим погранслойную функцию. Положим в уравнениях (1.16)-(1.19)

$$\tau = t/\varepsilon,\ \mu(t,\varepsilon) = \mu_0(t) + \mu_1(t,\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon\tau) + \mu_1(\varepsilon\tau,\varepsilon). \tag{2.3}$$

Тогда уравнения (1.16), (1.20) примут вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial\tau} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \varepsilon x(1-\delta)\left[\mu_0'(\varepsilon\tau) + \mu_1'(\varepsilon\tau,\varepsilon)\right] - \\ &-\varepsilon(1-x)\Phi'\big(\mu_0(\varepsilon\tau) + \mu_1(\varepsilon\tau,\varepsilon),\varepsilon\tau\big),\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$v(0,t) = v(1,t) = 0. \tag{2.5}$$

Далее будем различать производные функций по t и τ и соответственно их обозначать. Так для произвольной функции $f(t)$ справедливо соотношение $f' \equiv \frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{df(\varepsilon\tau)}{d\tau} \equiv \frac{1}{\varepsilon}\dot{f}(\varepsilon\tau)$, или $\dot{f} = \varepsilon f'$. Поэтому уравнение (1.18) с учетом равенства (2.3) запишется как

$$\frac{d\mu_1}{d\tau} = -\varepsilon\beta\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \Phi(\mu_0+\mu_1,\varepsilon\tau) + \Phi(\mu_0,\varepsilon\tau) + \mu_1\right)\Big|_{x=1},\ \mu_1(0,\varepsilon) = 0. \tag{2.6}$$

Начальные условия

$$v(x,0) = \psi(x) \equiv (1-\delta x)U(x) - (1-x)\Phi(0,0). \tag{2.7}$$

Учитывая условия согласования (1.12), получаем

$$\psi(0) = \psi(1) = 0. \tag{2.8}$$

Для построения начального приближения погранслойной составляющей решения $v_s(x,\tau),\ \mu_s(\tau)$ положим в системе (2.4)-(2.7) $\varepsilon = 0$. Получим

$$\frac{\partial v_s}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v_s}{\partial x^2}, \tag{2.9}$$

$$v_s(0,t) = v_s(1,t) = 0, \tag{2.10}$$

$$v_s(x,0) = \psi(x). \tag{2.11}$$

$$\frac{d\mu_s}{d\tau} = 0,$$

$$\mu_s(0) = 0.$$

Из последних двух соотношений следует, что $\mu_s \equiv 0$. Смешанную задачу (2.9)-(2.11) решим методом разделения переменных. Для этого будем искать формальное решение в виде $v_s(x,\tau) = T(\tau)X(x)$. Подставим эту функцию в (2.9) и разделим левую и правую части на $T(\tau)X(x)$. Имеем

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2. \tag{2.12}$$

Константа в правой части должна быть отрицательной. В противном случае решение уравнения $\frac{X''}{X} = \xi \ge 0$ не удовлетворяло бы граничным условиям (2.10). Уравнение $\frac{X''}{X} = -\lambda^2$ с учетом (2.10) имеет решения

$$X_n(x) = \sin \lambda_n x,\ n = 1,2,\ldots,\ \text{где} \tag{2.13}$$

$$\lambda_n = \pi n. \tag{2.14}$$

Из (2.12) следует $\frac{T_n'}{T_n} = \frac{X_n''}{X_n} = -\lambda_n^2$, откуда получаем вид функций

$$T_n(\tau) = e^{-\lambda_n^2 \tau}. \tag{2.15}$$

Теперь формальное решение смешанной задачи (2.9)-(2.11) можно записать в виде ряда

$$v_s(x,\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} c_n T_n(\tau) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n^2 \tau} \sin(\lambda_n x). \tag{2.16}$$

Лемма 1. Пусть выполнено предположение 2. Тогда решение смешанной задачи (2.9)-(2.11) существует и представляется равномерно сходящимся по $x \in [0,1], \tau \ge 0$ рядом

$$v_s(x,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n^2 \tau} \sin(\lambda_n x), \qquad \text{\textit{где}}$$

$$c_n = \frac{2\delta}{\lambda_n^2}\int_0^1 [xU''(x) + 2U'(x)]\sin(\lambda_n x)dx .$$

Функция $v_s(x,\tau)$ *имеет непрерывную производную по* x*, причем*

$$\frac{\partial v_s(1,\tau)}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \lambda_n c_n e^{-\lambda_n^2\tau} . \qquad (2.17)$$

Доказательство. Разложим функцию $\psi(x)$ из (2.11) в ряд Фурье по ортонормированному базису (2.13)-(2.14) $\left\{\varphi_n(x) = \sqrt{2}\sin(\lambda_n x)\right\}, n = 1,2,...$.

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n \cdot \varphi_n(x) , \qquad (2.18)$$

$$\psi_n = \int_0^1 \psi(x)\varphi_n(x)dx = \sqrt{2}\int_0^1 \psi(x)\sin(\lambda_n x)dx = -\frac{\sqrt{2}}{\lambda_n}\int_0^1 \psi'(x)\cos(\lambda_n x)dx =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{\lambda_n^2}\int_0^1 \psi''(x)\sin(\lambda_n x)dx = \frac{\gamma_n}{\lambda_n^2},$$

где

$$\gamma_n = -\sqrt{2}\int_0^1 \psi''(x)\sin(\lambda_n x)dx = \sqrt{2}\delta\int_0^1 [xU''(x) + 2U'(x)]\sin(\lambda_n x)dx . \qquad (2.19)$$

Нетрудно видеть, что для $K = \sqrt{2}\delta\int_0^1 \left|xU''(x) + 2U'(x)\right|dx$ из (2.19) следует оценка $\left|\gamma_n\right| < K$.

В силу неравенства Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^2 \le \int_0^1 [xU''(x) + 2U'(x)]^2 dx < \infty , \qquad (2.20)$$

а в силу (2.14) и неравенства Коши-Буняковского

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n}{\lambda_n}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\gamma_n\right|}{\lambda_n} \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^2}\ \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-2}} < \infty . \qquad (2.21)$$

При $\tau = 0$ из условия (2.11) и вида функций (2.16), (2.18) получаем равенства $c_n = \sqrt{2}\,\psi_n = \sqrt{2}\,\dfrac{\gamma_n}{\lambda_n^2}$. (2.22)

Утверждение леммы теперь следует из равенства (2.16) и неравенств (2.20)- (2.21).

Действительно, ряд $\left|\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{-\lambda_n^2\tau}\sin(\lambda_n x)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\left|c_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sqrt{2}\gamma_n}{\lambda_n^2}\right| < \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sqrt{2}K}{\lambda_n^2}\right| < \infty$.

Т.е. ряд (2.16) абсолютно сходится равномерно по $x \in [0,1], \tau \ge 0$.

Формула (2.17) следует из (2.16). Абсолютная и равномерная сходимость ряда (2.17) гарантируется формулой (2.22) и неравенством (2.21). Лемма доказана.

Ниже будем искать функцию μ_1 в формуле (2.3) в виде $\mu_1(\varepsilon\tau,\varepsilon)=\mathrm{M}(\tau,\varepsilon),\, \mathrm{M}(\tau,0)\equiv\mu_s(\tau)=0$.

3. Существование и единственность решения нелинейного интегрального уравнения для $\mathrm{M}(\tau,\varepsilon)$

Положим

$$\begin{aligned} &v(x,\tau)=v_s(x,\tau)+w(x,\tau,\varepsilon),\, w(x,0,\varepsilon)=0,\\ &w(0,\tau,\varepsilon)=w(1,\tau,\varepsilon)=0,\, w(x,\tau,0)\equiv 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Подставим (3.1) в (2.4), (2.5), (2.7). С учетом равенств (2.9)-(2.11) и связи между производными $\dfrac{d}{d\tau}=\varepsilon\dfrac{d}{dt}$ для функции w получим смешанную задачу

$$\begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial\tau}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-(1-\delta x)(\dot{\mu}_0(\varepsilon\tau)+\dot{\mathrm{M}}(\tau,\varepsilon))-\\ &-(1-x)\dot{\Phi}\big(\mu_0(\varepsilon\tau)+\mathrm{M}(\tau,\varepsilon),\varepsilon\tau\big), \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$w(x,0,\varepsilon)=0,\, w(0,\tau,\varepsilon)=w(1,\tau,\varepsilon)=0. \tag{3.3}$$

Для функции $\mathrm{M}(\tau,\varepsilon)$ уравнение (2.6) примет вид

$$\begin{aligned} &\frac{d\mathrm{M}}{d\tau}+\varepsilon\beta\mathrm{M}=\\ &=-\varepsilon\beta\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial v_s}{\partial x}+\Phi(\mu_0,\varepsilon\tau)-\Phi(\mu_0+\mathrm{M},\varepsilon\tau)\right)\Big|_{x=1},\, \mathrm{M}(0,\varepsilon)=0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Разложим функции x и $1-x$ в ряд Фурье по ортонормированному базису $\left\{\varphi_n(x)=\sqrt{2}\sin(\lambda_n x)\right\},\, n=1,2,\ldots$

$$x(1-\delta)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda_n}\sin(\lambda_n x),\, a_n=(-1)^{n-1}(1-\delta), \tag{3.5}$$

$$1-x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\sin(\lambda_n x). \tag{3.6}$$

Воспользуемся известной процедурой и будем искать решение уравнения (3.2) в виде формального ряда

$$w(x,\tau,\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(\tau,\varepsilon)\sin(\lambda_n x). \tag{3.7}$$

Подставим этот ряд, а также ряды (3.5), (3.6) в уравнение (3.2) и приравняем коэффициенты при $\sin(\lambda_n x)$. Получим серию задач Коши для коэффициентов ряда (3.7)

$$\dot{b}_n(\tau) = -\lambda_n^2 b_n(\tau) - \frac{2}{\lambda_n}\left[a_n\left(\dot{\mathrm{M}}(\tau,\varepsilon) + \dot{\mu}_0(\varepsilon\tau) \right) + \dot{\Phi}(\mu_0(\varepsilon\tau) + \mathrm{M}(\tau,\varepsilon), \varepsilon\tau) \right].$$

Из начального условия (3.3) следует, что все $b_n(0) = 0$. Следовательно

$$b_n(\tau) = -\frac{2}{\lambda_n}\int_0^\tau e^{\lambda_n^2(\xi-\tau)}\left[a_n\left(\dot{\mathrm{M}}(\xi) + \dot{\mu}_0(\varepsilon\tau) \right) + \dot{\Phi}(\mu_0(\varepsilon\xi) + \mathrm{M}(\xi), \varepsilon\xi) \right] d\xi. \quad (3.8)$$

Отсюда и из (3.7) получаем вид функции

$$w(x,\tau,\varepsilon) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\int_0^\tau e^{\lambda_n^2(\xi-\tau)}\left[a_n \dot{\mathrm{M}}(\xi,\varepsilon) + \dot{\Phi}(\mu_0(\varepsilon\xi) + \mathrm{M}(\xi,\varepsilon), \varepsilon\xi) \right] d\xi \cdot \sin(\lambda_n x) -$$

$$-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda_n}\int_0^\tau e^{\lambda_n^2(\xi-\tau)}\dot{\mu}_0(\varepsilon\tau) d\xi \cdot \sin(\lambda_n x), \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial w(x,\tau)}{\partial x}\Big|_{x=1} = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^\tau e^{\lambda_n^2(\xi-\tau)}\left[a_n \dot{\mathrm{M}}(\xi,\varepsilon) + \dot{\Phi}(\mu_0(\varepsilon\xi) + \mathrm{M}(\xi,\varepsilon), \varepsilon\xi) \right] d\xi +$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}(1-\delta)\int_0^\tau e^{\lambda_n^2(\xi-\tau)}\dot{\mu}_0(\varepsilon\tau) d\xi. \quad (3.10)$$

Подставим (3.10) и (2.17) в уравнение (3.4). С учетом вида (3.5), (3.8) коэффициентов a_n, b_n оно примет вид

$$\frac{d\mathrm{M}(y,\varepsilon)}{dy} + \varepsilon\beta\mathrm{M}(y,\varepsilon) = -2\varepsilon\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^y e^{\lambda_n^2(\xi-y)}(\dot{\mu}_0 + \dot{\mathrm{M}}) d\xi +$$

$$+2\varepsilon\beta\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_0^y e^{\lambda_n^2(\xi-y)}\dot{\Phi}\left(\mu_0(\varepsilon\xi) + \mathrm{M}(\xi,\varepsilon), \varepsilon\xi\right) d\xi +$$

$$+\varepsilon\beta\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\lambda_n c_n e^{-\lambda_n^2 y} + \varepsilon\beta\left[\Phi\left(\mu_0(\varepsilon y) + \mathrm{M}(y,\varepsilon), \varepsilon\xi\right) - \Phi\left(\mu_0(\varepsilon y), \varepsilon\xi\right)\right].$$

Проинтегрируем его от 0 до τ.

Для решения задачи $\dot{z} + \alpha z = \varphi(z,\tau),\ z(0) = z_0$ справедлива формула Коши $z(\tau) = e^{-\alpha\tau}\left(z_0 + \int_0^\tau e^{\alpha y}\varphi(z(y), y) dy \right)$. С учетом этой формулы и начального условия $\mathrm{M}(0) = 0$ имеем

$$\mathrm{M}(\tau,\varepsilon)=-2\varepsilon\alpha\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\varepsilon\beta\tau}\int_0^{\tau}e^{\varepsilon\beta y}\int_0^{y}e^{\lambda_n^2(\xi-y)}(\dot{\mu}_0+\dot{\mathrm{M}}(\xi,\varepsilon)d\xi dy+$$

$$+2\varepsilon\beta\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-\varepsilon\beta\tau}\int_0^{\tau}e^{\varepsilon\beta y}\int_0^{y}e^{\lambda_n^2(\xi-y)}\,\dot{\Phi}\big(\mu_0(\varepsilon\xi)+\mathrm{M}(\xi,\varepsilon),\varepsilon\xi\big)d\xi dy+$$

$$+\varepsilon\beta\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\gamma_n}{\lambda_n(\lambda_n^2-\varepsilon\beta)}(e^{-\varepsilon\beta\tau}-e^{-\lambda_n^2\tau})+$$

$$+\varepsilon\beta\int_0^{\tau}e^{\varepsilon\beta(y-\tau)}\big[\Phi\big(\mu_0(\varepsilon y)+\mathrm{M}(y,\varepsilon),\varepsilon y\big)-\Phi\big(\mu_0(\varepsilon y),\varepsilon y\big)\big]dy\,. \qquad (3.11)$$

Для произвольной гладкой функции $\phi(\tau)$ справедливы тождества

$$e^{-\varepsilon\beta\tau}\int_0^{\tau}e^{\varepsilon\beta y}\int_0^{y}e^{\lambda_n^2(\xi-y)}\,\dot{\phi}(\xi)d\xi dy=e^{-\varepsilon\beta\tau}\int_0^{\tau}\dot{\phi}(\xi)e^{\lambda_n^2\xi}\int_{\xi}^{\tau}e^{(\varepsilon\beta-\lambda_n^2)y}dyd\xi=$$

$$=e^{-\varepsilon\beta\tau}\int_0^{\tau}\dot{\phi}(\xi)e^{\lambda_n^2\xi}\,\frac{e^{(\varepsilon\beta-\lambda_n^2)\xi}-e^{(\varepsilon\beta-\lambda_n^2)\tau}}{\lambda_n^2-\varepsilon\beta}d\xi=$$

$$=\frac{1}{\lambda_n^2-\varepsilon\beta}\int_0^{\tau}\dot{\phi}(\xi)(e^{\varepsilon\beta(\xi-\tau)}-e^{\lambda_n^2(\xi-\tau)})d\xi=$$

$$=\frac{1}{\lambda_n^2-\varepsilon\beta}\left[\phi(0)e^{-\varepsilon\beta\tau}(e^{-(\lambda_n^2-\varepsilon\beta)\tau}-1)+\int_0^{\tau}\phi(\xi)(\lambda_n^2e^{\lambda_n^2(\xi-\tau)}-\varepsilon\beta e^{\varepsilon\beta(\xi-\tau)})d\xi\right].$$

Используем это тождество для преобразования первых двух слагаемых в правой части равенства (3.11). Тогда это соотношение запишется в виде

$$\mathrm{M}(\tau,\varepsilon)=-2\varepsilon\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2-\varepsilon\beta}\left[\int_0^{\tau}\mathrm{M}(\xi,\varepsilon)(\lambda_n^2e^{\lambda_n^2(\xi-\tau)}-\varepsilon\beta e^{\varepsilon\beta(\xi-\tau)})d\xi\right]-$$

$$-2\varepsilon\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2-\varepsilon\beta}\left[\int_0^{\tau}\mu_0(\xi)(\lambda_n^2e^{\lambda_n^2(\xi-\tau)}-\varepsilon\beta e^{\varepsilon\beta(\xi-\tau)})d\xi\right]+$$

$$+2\varepsilon\beta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda_n^2-\varepsilon\beta}\Phi(0,0)e^{-\varepsilon\beta\tau}(e^{-(\lambda_n^2-\varepsilon\beta)\tau}-1)+$$

$$+2\varepsilon\beta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda_n^2-\varepsilon\beta}\int_0^{\tau}\Phi(\mu_0(\varepsilon\xi)+\mathrm{M}(\xi,\varepsilon),\varepsilon\xi)(\lambda_n^2e^{\lambda_n^2(\xi-\tau)}-\varepsilon\beta e^{\varepsilon\beta(\xi-\tau)})d\xi+$$

$$+\varepsilon\beta\int_0^{\tau}e^{\varepsilon\beta(y-\tau)}\big[\Phi\big(\mu_0(\varepsilon y)+\mathrm{M}(y,\varepsilon),\varepsilon y\big)-\Phi\big(\mu_0(\varepsilon y),\varepsilon y\big)\big]dy+$$

$$+\varepsilon\beta\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\gamma_n}{\lambda_n(\lambda_n^2-\varepsilon\beta)}(e^{-\varepsilon\beta\tau}-e^{-\lambda_n^2\tau})\,. \qquad (3.12)$$

Уравнение (3.12) имеет вид нелинейного операторного уравнения относительно функции $\mathrm{M}(\tau,\varepsilon)$

$$\mathrm{EM}(\tau,\varepsilon) = F(\mathrm{M}(\tau,\varepsilon)). \qquad (3.13)$$

Здесь E – единичный оператор, а F – нелинейный интегральный оператор

$$F(\mathrm{M}(\tau,\varepsilon)) = -2\varepsilon\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2-\varepsilon\beta}\left[\int_0^{\tau}\mathrm{M}(\xi,\varepsilon)(\lambda_n^2 e^{\lambda_n^2(\xi-\tau)}-\varepsilon\beta e^{\varepsilon\beta(\xi-\tau)})d\xi\right]-$$

$$-2\varepsilon\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2-\varepsilon\beta}\left[\int_0^{\tau}\mu_0(\xi)(\lambda_n^2 e^{\lambda_n^2(\xi-\tau)}-\varepsilon\beta e^{\varepsilon\beta(\xi-\tau)})d\xi\right]+$$

$$+2\varepsilon\beta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda_n^2-\varepsilon\beta}\Phi(0,0)e^{-\varepsilon\beta\tau}(e^{-(\lambda_n^2-\varepsilon\beta)\tau}-1)+$$

$$+2\varepsilon\beta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda_n^2-\varepsilon\beta}\int_0^{\tau}\Phi(\mu_0(\xi)+\mathrm{M}(\xi,\varepsilon),\varepsilon\xi)(\lambda_n^2 e^{\lambda_n^2(\xi-\tau)}-\varepsilon\beta e^{\varepsilon\beta(\xi-\tau)})d\xi+$$

$$+\varepsilon\beta\int_0^{\tau}e^{\varepsilon\beta(y-\tau)}\left[\Phi\left(\mu_0(\varepsilon y)+\mathrm{M}(y,\varepsilon),\varepsilon y\right)-\Phi\left(\mu_0(\varepsilon y),\varepsilon y\right)\right]dy+$$

$$+\varepsilon\beta\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\gamma_n}{\lambda_n(\lambda_n^2-\varepsilon\beta)}(e^{-\varepsilon\beta\tau}-e^{-\lambda_n^2\tau}). \qquad (3.14)$$

Для доказательства существования решения уравнения (3.13) используем сформулированную ниже теорему 1.

Предположение 3. B_1 и B_2 – банаховы пространства $A: D(A)\to B_2$ – линейный оператор с областью определения $D(A)$, плотной в B_1.

Предположение 4. Начальное приближение $x_0\in D(A)$, нелинейный оператор f дифференцируем в окрестности $O(x_0)$, производная Фреше $f'(x)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\left\|f'(x_1)-f'(x_2)\right\|\le l\left\|x_1-x_2\right\|;\quad x_1,x_2\in U_R(x_0).$$

Предположение 5. Линейный оператор $A-f'(x_0)$ имеет ограниченный обратный

$$B=\left(A-f'(x_0)\right)^{-1}. \qquad (3.15)$$

Величину

$$\omega = Ax_0 - f(x_0) \qquad (3.16)$$

называют невязкой. Введем следующие обозначения

$$\left\|B\right\|=\kappa,\ \left\|B\omega\right\|=\gamma,\ r=\frac{1-\sqrt{1-2l\kappa\gamma}}{l\kappa}. \qquad (3.17)$$

Предположение 6. $2l\kappa\gamma < 1$, замкнутый шар $\bar{U}_r(x_0) \subset O(x_0)$.

<u>*Теорема 1.*</u> *(А.М. Тер-Крикоров). Если выполнены предположения 3-6, то 1.Уравнение* $Ax - f(x) = 0$ *имеет единственное решение* $\bar{x}$ *в замкнутом шаре* $\bar{U}_r(x_0)$,

2. $\|\bar{x} - x_0\| \le 2\gamma$,

3. $\bar{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, *где* x_n *рекуррентная последовательность,*

$Ax_{n+1} - f'(x_0)x_{n+1} = f(x_n) - f'(x_0)x_n$,

4. $\|\bar{x} - x_n\| \le \dfrac{\gamma}{\sqrt{1-2l\kappa\gamma}}\left(1-\sqrt{1-2l\kappa\gamma}\right)^n$.

Доказательство этой теоремы содержится в [5].

Для непрерывных функций $y(\tau), \tau \in [0, T/\varepsilon]$ введем норму $\|y\| = \max\limits_{\tau\in[0,T/\varepsilon]} |y(\tau)|$. Обозначим соответствующее банахово пространство B.

<u>*Лемма 2.*</u> *Если выполнены предположения 1-4, то уравнение (3.13), а значит, и задача Коши (3.4) имеет единственное решение в окрестности нуля пространства* B.

<u>Доказательство.</u> Проверим выполнение условий теоремы 1. Предположение 3 очевидно, поскольку в нашем случае $\mathrm{B} = B_1 = B_2$, единичный оператор E определен на всем пространстве B и ограничен. Из свойств А, Б, В (стр.17) следует, что существует открытая окрестность $O_\rho(0)$ нуля в пространстве B, такая, что для любого элемента $M \in O_\rho(0)$ значение функции $\Phi(\mu_0(\varepsilon\tau) + M(\tau), \varepsilon\tau)$ определено.

Из формулы (3.14) следует, что действие производной Фреше нелинейного оператора $F(M)$, вычисленной в точке M, на элемент $h \in \mathrm{B}$ можно записать как

$$F'(\mathrm{M})h(\tau) = -2\varepsilon\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2 - \varepsilon\beta}\left[\int_0^\tau h(\xi)\lambda_n^2 e^{\lambda_n^2(\xi-\tau)} d\xi\right] +$$

$$+2\varepsilon\beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n^2 - \varepsilon\beta} \int_0^\tau \Phi_\mu(\mu_0(\xi) + \mathrm{M}(\xi,\varepsilon), \varepsilon\xi)\lambda_n^2 e^{\lambda_n^2(\xi-\tau)} h(\xi) d\xi + \tag{3.18}$$

$$+\varepsilon\beta \int_0^\tau e^{\varepsilon\beta(\xi-\tau)} \Phi_\mu\left(\mu_0(\varepsilon\xi) + \mathrm{M}(\xi,\varepsilon), \varepsilon\xi\right) h(\xi) d\xi .$$

Из предположения 1 следует, что существуют постоянные $C_0, C_1 > 0$, такие что $\left|\Phi(\mu,t)\right| \le C_0, \left|\Phi_\mu(\mu,t)\right| \le C_1$. Кроме того, очевидно равенство $\gamma\int_0^\tau e^{\gamma(\xi-\tau)}d\xi = 1 - e^{-\gamma\tau} < 1, \gamma > 0$. Тогда из (3.18) и неравенства $\left|h(\xi)\right| \le \|h\|$ получим оценку

$$\left|F'(\mathrm{M})h(\tau)\right| \le 2\varepsilon\alpha\|h\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2 - \varepsilon\beta} +$$

$$2\varepsilon\beta C_1\|h\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2 - \varepsilon\beta} + \varepsilon\beta\|h\|\int_0^\tau e^{\varepsilon\beta(\xi-\tau)}\left|\Phi_\mu(\mu_0(\varepsilon\xi) + \mathrm{M}(\xi), \varepsilon\xi)\right|d\xi. \qquad (3.19)$$

Ряды в первых двух слагаемых являются сходящимися согласно интегральному признаку сходимости. Действительно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2 n^2 - \gamma}$ сходится или расходится вместе с несобственным интегралом $\int_1^\infty \frac{dz}{z^2 - \gamma} = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{\gamma}}{1-\sqrt{\gamma}}\right)$.

Оценим последнее слагаемое при $\mathrm{M} = 0$. Из свойства В следует

$$\varepsilon\beta\|h\|\int_0^\tau\left|\Phi_\mu(\mu_0(\varepsilon\xi), \varepsilon\xi)\right|e^{\varepsilon\beta(\xi-\tau)}d\xi = \beta\|h\|\int_0^t\left|\Phi_\mu(\mu_0(\eta), \eta)\right|e^{\beta(\eta-t)}d\eta \le$$

$$\le \|h\|k(1 - e^{-\beta t}) \le \|h\|k(1 - e^{-\beta T}) < \|h\|.$$

Из полученной оценки и (3.19) вытекает, что для достаточно малых значений параметра ε существует постоянная $0 < K_1 < 1$, для которой справедливо неравенство $\left|F'(0)h(\tau)\right| \le K_1\|h\|$, а значит и

$$\|F'(0)h\| = \max_{\tau\in[0,T/\varepsilon]}\left|F'(0)h\right| \le K_1\|h\|.$$

Тем самым установлено, что $\|F'(0)\| \le K_1 < 1$. Отсюда и из теоремы об обратимости возмущенных операторов (см.[6]) следует непрерывная обратимость оператора $\mathrm{E} - F'(0)$, т.е. справедливость (3.15), или предположения 5 теоремы 1. Далее, из (3.18), используя липшицевость производной Φ_μ, имеем

$$\left|\left(F'(M_1)-F'(M_2)\right)h\right|\le 2\varepsilon\beta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2-\varepsilon\beta}\times$$

$$\times\int_0^\tau\left|\Phi_\mu(\mu_0(\xi)+M_1(\xi,\varepsilon),\varepsilon\xi)-\Phi_\mu(\mu_0(\xi)+M_2(\xi,\varepsilon),\varepsilon\xi)\right|\lambda_n^2e^{\lambda_n^2(\xi-\tau)}\left|h(\xi)\right|d\xi+$$

$$+\varepsilon\beta\int_0^\tau e^{\varepsilon\beta(\xi-\tau)}\left|\Phi_\mu(\mu_0(\xi)+M_1(\xi,\varepsilon),\varepsilon\xi)-\Phi_\mu(\mu_0(\xi)+M_2(\xi,\varepsilon),\varepsilon\xi)\right|\left|h(\xi)\right|d\xi\le$$

$$\le 2\varepsilon\beta L\|h\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2-\varepsilon\beta}\int_0^\tau\left|M_1(\xi,\varepsilon)-M_2(\xi,\varepsilon))\right|\lambda_n^2e^{\lambda_n^2(\xi-\tau)}d\xi+$$

$$+\varepsilon\beta L\|h\|\int_0^\tau e^{\varepsilon\beta(\xi-\tau)}\left|M_1(\xi,\varepsilon)-M_2(\xi,\varepsilon))\right|d\xi\le$$

$$\le\beta L\|h\|\cdot\|M_1-M_2\|\left[2\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-e^{-\lambda_n^2\tau}}{\lambda_n^2-\varepsilon\beta}+(1-e^{-\varepsilon\beta\tau})\right]<$$

$$<l\|h\|\cdot\|M_1-M_2\|,$$

где $l=\beta L\left[2\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2-\varepsilon\beta}+1\right]$. Отсюда получаем

$\left\|\left(F'(M_1)-F'(M_2)\right)h\right\|<l\|h\|\|M_1-M_2\|$, или $\|F'(M_1)-F'(M_2)\|<l\|M_1-M_2\|$. Таким образом, для производной Фреше нелинейного оператора $F(M)$ выполняется предположение 6 теоремы 1.

Невязка (3.16) для уравнения (3.13) равна $\omega=-F(0)$. Используем выражение (3.14) для оценки ее нормы в B.

$$\left|F(0)\right|\le 2\varepsilon\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2-\varepsilon\beta}\left[\int_0^\tau\left|\mu_0(\xi)\right|\cdot\left(\lambda_n^2e^{\lambda_n^2(\xi-\tau)}+\varepsilon\beta e^{\varepsilon\beta(\xi-\tau)}\right)d\xi\right]+$$

$$+2\varepsilon\beta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2-\varepsilon\beta}\Phi(0,0)+2\varepsilon\beta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2-\varepsilon\beta}\int_0^\tau\left|\Phi(\mu_0(\xi),\varepsilon\xi)\right|(\lambda_n^2e^{\lambda_n^2(\xi-\tau)}+\varepsilon\beta e^{\varepsilon\beta(\xi-\tau)})d\xi+$$

$$+2\sqrt{2}\varepsilon\beta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\gamma_n|}{\lambda_n(\lambda_n^2-\varepsilon\beta)}<4\varepsilon\alpha(\overline{\mu}+C_0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2-\varepsilon\beta}+2\sqrt{2}\varepsilon\beta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\gamma_n|}{\lambda_n(\lambda_n^2-\varepsilon\beta)}=\varepsilon K_2.$$

Итак, $\|\omega\|=\|F(0)\|<\varepsilon K_2$. Так как линейный оператор $\mathrm{E}-F'(0)$ непрерывно обратим, т.е. $\left\|(\mathrm{E}-F'(0))^{-1}\right\|=\kappa$, то $\left\|(\mathrm{E}-F'(0))^{-1}\omega\right\|\le\kappa\|\omega\|<\varepsilon\kappa K_2=\gamma$. По формуле (3.17) параметр $r\approx\gamma$ при малых γ. Следовательно, предположение 6 теоремы 1 так же выполняется для достаточно малых значений ε. Поскольку все предположения теоремы 1 для уравнения (3.13) выполнены, то решение его существует и принадлежит замкнутому шару $\bar{U}_r(0)$ радиуса $r \approx \varepsilon\kappa K_2$. Лемма 2 доказана.

Следствие. Функции $\mathrm{M}(\tau,\varepsilon), w(x,\tau,\varepsilon)$ *можно представить в виде* $\mathrm{M}(\tau,\varepsilon)=\varepsilon\mathrm{M}_1(\tau,\varepsilon), w(x,\tau,\varepsilon)=\varepsilon w_1(x,\tau,\varepsilon)$ *, причем функция* $\mathrm{M}_1(\tau,\varepsilon)$ *непрерывна в точке* $\varepsilon=0$ *равномерно по* τ*, а* $w_1(x,\tau,\varepsilon)$ *непрерывна в точке* $\varepsilon=0$ *равномерно по* x *и* τ*.*

Доказательство. Как было сказано, решение уравнения (3.13) принадлежит замкнутому шару $\bar{U}_r(0)$ радиуса $r \approx \varepsilon\kappa K_2$, т.е. решение $\mathrm{M}(\tau,\varepsilon)=\varepsilon\mathrm{M}_1(\tau,\varepsilon)$, причем функция $\mathrm{M}_1(\tau,\varepsilon)$ непрерывна в точке $\varepsilon=0$ равномерно по τ. Отсюда и из формулы (3.9) следует, что и функцию $w(x,\tau,\varepsilon)$ можно представить в виде $w(x,\tau,\varepsilon)=\varepsilon w_1(x,\tau,\varepsilon)$, при этом функция $w_1(x,\tau,\varepsilon)$ непрерывна в точке $\varepsilon=0$ равномерно по x и τ. Последнее утверждение обусловлено оценками

$$\left|\dot{\mu}_0\right| = \left|\varepsilon\mu_0'\right| \le \varepsilon\beta\left(\left|\mu_0\right| + \left|\Phi(\mu_0,t)\right|\right) \le \varepsilon\beta(\bar{\mu}+C_0),$$

$$\left|\dot{\Phi}(\mu_0+\mathrm{M},t)\right| = \left|\Phi_\mu(\mu_0+\mathrm{M},t)\cdot(\dot{\mu}_0+\varepsilon\dot{\mathrm{M}}_1)+\Phi_t(\mu_0+\mathrm{M},t)\right| \le \varepsilon K_3.$$

Следствие доказано.

<u>*ТЕОРЕМА 2.*</u> *Решение начально- краевой задачи (1.7)-(1.12) существует и имеет вид*

$$u(x,t)=\frac{x(1-\delta)}{(1-\delta x)}\mu(t)+\frac{(1-x)}{(1-\delta x)}\Phi(\mu(t),t)+\frac{1}{(1-\delta x)}\left[v_s\left(x,\frac{t}{\varepsilon}\right)+\varepsilon w_1\left(x,\frac{t}{\varepsilon}\right)\right],$$

где

$$v_s\left(x,\frac{t}{\varepsilon}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\exp\left(-\frac{\pi^2n^2t}{\varepsilon}\right)\sin(\pi nx),$$

$$c_n=\frac{2\delta}{\pi^2n^2}\int_0^1[xU''(x)+2U'(x)]\sin(\pi nx)dx,$$

$$\mu(t)=\mu_0(t)+\varepsilon\,\mathrm{M}_1\left(\frac{t}{\varepsilon},\varepsilon\right),$$

а функция $\mu_0(t)$ *является решением задачи Коши (2.1).*

Функция $v_s\left(x,\frac{t}{\varepsilon}\right)$ *компенсирует невязку в начальных условиях и быстро убывает до нуля с возрастанием* t*. Функции* M_1, w_1 *равномерно ограничены.*

Справедливость теоремы следует из леммы 1, леммы 2 и ее следствия.

Литература

1. Александрова И.В., Белолипецкий А.А., Корешева Е.Р. и др. *Криогенные мишени для реактора. Ч.1. Диффузионное заполнение топливом сферических оболочек.* М.: Препринт ФИАН им. П.Н. Лебедева, 2012, 134 с.
2. Белолипецкий А.А., Семенов К.О. *Исследование математической модели заполнения двухслойных пористых оболочек газом* // Вестник МГУ, серия 15, вычисл. матем. и кибернетика, 2011, №4,С.3-10.
3. Aleksandrova I.V., Belolipetskiy A.A. *Mathematical models for filling polymer shells with a real gas fuel. //* Laser and Particle Beams. 1999. V.**17**, N4, P.701-712
4. Белолипецкий А.А., Тер-Крикоров А.М. *О решении одной сингулярно возмущенной начально-краевой задачи для линейного параболического уравнения* // Труды МФТИ, 2011, Том 3, №1, С.14-17.
5. Тер-Крикоров А.М. *Нелинейный анализ и асимптотические методы малого параметра: Учебное пособие* – М.: МФТИ, 2007. – 204 с.
6. Като Т. *Теория возмущений линейных операторов.* – М.: Мир, 1972, 740 с.