

ТОЧЕЧНЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕЙМАНА ПОРЯДКА k

Введение. В [1], [2] описаны свойства распределения Неймана порядка k , зависящего, при фиксированном k , от двух параметров λ и μ . Такого рода распределение, описывающее события в различных областях науки и бизнеса, относится к классу обобщённых пуассоновских распределений (о.п.р.) бесконечной кратности с производящей функцией вероятностей вида [3, с. 294]

$$P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n = \exp \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \theta_l (z^l - 1) \right\}, |z| \leq 1,$$

где, в нашем случае, $\theta_l = \theta_l(\lambda, \mu) = \lambda \frac{\mu^l}{l!} \sum_{j=1}^k j^l e^{-j\mu}$. Функция вероятностей (ф.в.) p_n удовлетворяет рекуррентному соотношению [4, с.392]

$$np_n = \sum_{l=1}^n l \theta_l p_{n-l} = \lambda \sum_{j=1}^k e^{-j\mu} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(j\mu)^{n-l}}{(n-l-1)!} p_l, n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

с начальной вероятностью

$$p_0 = \exp \left(- \sum_{l=1}^{\infty} \theta_l \right) = \exp \left\{ \lambda \sum_{j=1}^k e^{-j\mu} - k\lambda \right\}. \quad (2)$$

В дальнейшем нам понадобятся ещё выражения для производных ф.в. по параметрам λ и μ . Воспользовавшись формулами для производных ф.в. по θ_l [5] и $\theta_l(\lambda, \mu)$ по параметрам λ и μ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_n}{\partial \theta_l} &= p_{n-1} - p_n, p_{-1} = p_{-2} = \dots = 0, \\ \frac{\partial \theta_l}{\partial \lambda} &= \frac{\mu^l}{l!} \sum_{j=1}^k j^l e^{-j\mu}, \quad \frac{\partial \theta_l}{\partial \mu} = \lambda \frac{\mu^{l-1}}{(l-1)!} \sum_{j=1}^k j^l e^{-j\mu} - \lambda \frac{\mu^l}{l!} \sum_{j=1}^k j^{l+1} e^{-j\mu}, \end{aligned}$$

легко проверить справедливость равенств, приведенных в [1]:

$$\frac{\partial p_n}{\partial \lambda} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\partial p_n}{\partial \theta_l} \frac{\partial \theta_l}{\partial \lambda} = -k p_n + \sum_{j=1}^k e^{-j\mu} \sum_{l=0}^n \frac{(j\mu)^{n-l}}{(n-l)!} p_l, \quad (3)$$

$$\frac{\partial p_n}{\partial \mu} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\partial p_n}{\partial \theta_l} \frac{\partial \theta_l}{\partial \mu} = \frac{np_n - (n+1)p_{n+1}}{\mu}. \quad (4)$$

Кроме того, мы будем пользоваться выражениями для моментных характеристик. Выражения для них приведены в [1], [2], но также могут быть легко получены из общих формул для кумулянтов о.п.р. [6]. Имеем

$$\kappa_1 = \sum_{l=1}^{\infty} l \theta_l = \alpha_1 = \lambda \mu \sum_{j=1}^k j = \lambda \mu \frac{k(k+1)}{2}, \quad (5)$$

$$\kappa_2 = \sum_{l=1}^{\infty} l^2 \theta_l = \mu_2 = \lambda \mu \frac{k(k+1)}{2} \left(1 + \mu \frac{2k+1}{3} \right) = \alpha_1 \left(1 + \mu \frac{2k+1}{3} \right), \quad (6)$$

$$\kappa_3 = \sum_{l=1}^{\infty} l^3 \theta_l = \mu_3 = \lambda \mu \frac{k(k+1)}{2} \left(1 + \mu^2 \frac{k(k+1)}{2} + \mu(2k+1) \right), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \kappa_4 &= \sum_{l=1}^{\infty} l^4 \theta_l = \mu_4 - 3\mu_2^2 = \\ &= \lambda \mu \frac{k(k+1)}{2} \left(1 + \frac{7}{3} \mu(2k+1) + 3\mu^2 k(k+1) + \frac{2k+1}{15} \mu^3 (3k^2 + 3k - 1) \right), \end{aligned} \quad (8)$$

где μ_m – центральный момент m -го порядка распределения Неймана порядка k .

В практических ситуациях значения параметров, как правило, неизвестны, и их нужно оценить на основании наблюдений. Рассмотрим некоторые методы вычисления точечных оценок параметров λ и μ по выборке наблюдений n_1, n_2, \dots, n_N объёма N . Они имеют различную эффективность, и чтобы сравнивать их, найдём нижнюю границу дисперсии оценок этих параметров.

Нижняя граница дисперсии оценок параметров. Как известно, для любой несмещённой оценки $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$ этих параметров ковариационная матрица $V(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) = Cov(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ не меньше, чем матрица $N^{-1}B^{-1}$,

$$V(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) \geq N^{-1}B^{-1}, \quad (9)$$

где B – информационная матрица Фишера (информант)

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} E\left(\frac{\partial \ln p_n}{\partial \lambda}\right)^2 & E\left(\frac{\partial \ln p_n}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \ln p_n}{\partial \mu}\right) \\ E\left(\frac{\partial \ln p_n}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \ln p_n}{\partial \mu}\right) & E\left(\frac{\partial \ln p_n}{\partial \mu}\right)^2 \end{vmatrix}.$$

В нашем случае элементы матрицы Фишера имеют вид:

$$B_{11} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n^2}{p_n} - k^2, \quad B_{12} = B_{21} = \frac{1}{\mu} \left(\sum_{n=0}^{\infty} n b_n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) b_n \frac{p_{n+1}}{p_n} \right),$$

$$B_{22} = \frac{1}{\mu^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 \frac{p_{n+1}}{p_n} + 2\alpha_1 - \mu_2 - \alpha_1^2 \right),$$

$$\text{где } b_n = \sum_{j=1}^k e^{-j\mu} \sum_{l=0}^n \frac{(j\mu)^{n-l}}{(n-l)!} p_l.$$

Неравенство (9) имеет место, если ф.в. p_n регулярна в смысле её первых и вторых частных производных по параметрам, т.е. если

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial p_n}{\partial \lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial p_n}{\partial \mu} = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^2 p_n}{\partial \lambda^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^2 p_n}{\partial \lambda \partial \mu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^2 p_n}{\partial \mu^2} = 0.$$

Из (3) можно доказать регулярность в смысле первой производной по параметру λ :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial p_n}{\partial \lambda} &= -k + \sum_{j=1}^k e^{-j\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n \frac{(j\mu)^{n-l}}{(n-l)!} p_l = -k + \sum_{j=1}^k e^{-j\mu} \sum_{l=0}^{\infty} p_l \sum_{n=l}^{\infty} \frac{(j\mu)^{n-l}}{(n-l)!} = \\ &= -k + \sum_{j=1}^k e^{-j\mu} e^{j\mu} \sum_{l=0}^{\infty} p_l = 0. \end{aligned}$$

Повторно применяя (3), доказываем регулярность в смысле второй производной по λ :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^2 p_n}{\partial \lambda^2} &= -k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial p_n}{\partial \lambda} + \sum_{j=1}^k e^{-j\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n \frac{(j\mu)^{n-l}}{(n-l)!} \frac{\partial p_l}{\partial \lambda} = \\ &= \sum_{j=1}^k e^{-j\mu} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\partial p_l}{\partial \lambda} \sum_{n=l}^{\infty} \frac{(j\mu)^{n-l}}{(n-l)!} = \sum_{j=1}^k e^{-j\mu} e^{j\mu} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\partial p_l}{\partial \lambda} = 0. \end{aligned}$$

Регулярность по первым двум производным по μ очевидна из (4).

Для доказательства равенства $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^2 p_n}{\partial \lambda \partial \mu} = 0$ воспользуемся сначала формулой (4), а затем вычисляя для разности в правой части (4) производную по λ , аналогично рассмотрению выше.

Таким образом, установлена правомочность использования (9). Эта регулярность гарантирует также асимптотическую нормальность оценок максимального правдоподобия и то, что их дисперсии при $N \rightarrow \infty$ равны соответствующим элементам матрицы в правой части (9). Результаты расчета матрицы \mathbf{V}^{-1} (9) приведены ниже.

Метод максимального правдоподобия. Для рассматриваемого нами класса о.п.р. система максимального правдоподобия (МП) в системе параметров θ_l имеет вид

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_l} = \frac{\partial}{\partial \theta_l} \sum_{i=1}^N \ln p_{n_i} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_{n_i}} \frac{\partial p_{n_i}}{\partial \theta_l} = 0, \quad l = 1, 2, \dots,$$

или с учетом формулы производной ф.в. p_n по параметрам θ_l получим

$$\sum_{i=1}^N \frac{p_{n_i-l}}{p_{n_i}} = N, \quad l = 1, 2, \dots$$

Преобразуем последний вид системы. Для этого умножим l -ое уравнение системы на $l\theta_l$ и, складывая все их, получим уравнение

$$\sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l\theta_l p_{n_i-l}}{p_{n_i}} = \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^{n_i} \frac{l\theta_l p_{n_i-l}}{p_{n_i}} = N \sum_{l=1}^{\infty} l\theta_l,$$

которое с учетом (1) и (5) принимает вид

$$\sum_{i=1}^N n_i = N\alpha_1.$$

Таким образом, МП-оценкой для α_1 о.п.р. является выборочное среднее, а система МП в системе параметров θ_l принимает вид

$$\begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i = \alpha_1, \\ \sum_{i=1}^N \frac{p_{n_i-l}}{p_{n_i}} = N, \quad l = 2, 3, \dots \end{cases}$$

В системе параметров λ и μ с учётом (3) и (4) получаем систему:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N (n_i + 1) \frac{p_{n_i+1}}{p_{n_i}} = \sum_{i=1}^N n_i = N \alpha_1, \\ \sum_{j=1}^k e^{-j\mu} \sum_{i=1}^N \sum_{l=0}^{n_i} \frac{(j\mu)^{n_i-l}}{(n_i-l)!} \frac{p_l}{p_{n_i}} = N k. \end{cases}, \quad (10)$$

С помощью рекуррентного соотношения (1) можно записать систему (10) в более симметричном виде, если выразить p_{n_i+1} через p_{n_i} и более младшие вероятности; однако такая симметрия не упрощает, а скорее усложняет задачу: как решать нелинейную систему уравнений (10) – не ясно; ничего также не удалось получить о существовании её решения и его единственности. Осталось надеяться, что если решение существует, то для одного из возможных решений (оценки максимального правдоподобия) достигается нижняя граница дисперсии (9). Но, по крайней мере, (9) даёт меру эффективности для других методов оценивания.

Метод подстановки (нулевой частоты и выборочного среднего).

Оценки параметров λ и μ ищем, приравнявая выражения (2) и (5) к выборочному среднему a_1 и нулевой выборочной частоте h_0 , соответственно. Это даёт нам уравнения:

$$\begin{cases} a_1 = \lambda \mu \frac{k(k+1)}{2} \\ h_0 = \exp \left\{ \lambda \sum_{j=1}^k [e^{-j\mu} - 1] \right\}. \end{cases}$$

Конечно, в последнем соотношении целесообразно прологарифмировать, и тогда второе уравнение системы станет

$$\ln h_0 = \lambda \sum_{j=1}^k (e^{-j\mu} - 1).$$

Отсюда получаем для оценки μ^* нелинейное уравнение

$$\frac{a_1}{\ln h_0} = \mu^* \frac{k(k+1)}{2 \left\{ \sum_{j=1}^k (e^{-j\mu^*} - 1) \right\}}, \quad (11)$$

а при найденной μ^* нетрудно оценить λ :

$$\lambda^* = \frac{2a_1}{k(k+1)\mu^*}.$$

Применяя рассуждения, близкие к использованным в [7, гл. 27], нетрудно получить приближённые дисперсии:

$$\begin{aligned} \text{Var}\{\lambda^*\} &= \left(\frac{\partial \lambda^*}{\partial a_1} \right)^2 \text{Var}\{a_1\} + \left(\frac{\partial \lambda^*}{\partial h_0} \right)^2 \text{Var}\{h_0\} + \\ &+ 2 \left(\frac{\partial \lambda^*}{\partial a_1} \right) \left(\frac{\partial \lambda^*}{\partial h_0} \right) \text{cov}\{a_1, h_0\} + O(N^{-1/2}), \\ \text{Var}\{\mu^*\} &= \left(\frac{\partial \mu^*}{\partial a_1} \right)^2 \text{Var}\{a_1\} + \left(\frac{\partial \mu^*}{\partial h_0} \right)^2 \text{Var}\{h_0\} + \\ &+ 2 \left(\frac{\partial \mu^*}{\partial a_1} \right) \left(\frac{\partial \mu^*}{\partial h_0} \right) \text{cov}\{a_1, h_0\} + O(N^{-1/2}), \end{aligned} \quad (12)$$

(частные производные берутся в точке $a_1 = \alpha_1, h_0 = p_0$), а также учитывая, что [8, стр. 153 и 212]

$$\text{Var}\{a_1\} = \frac{\mu_2}{N}, \quad (13)$$

$$\text{Var}\{h_0\} = \frac{p_0(1-p_0)}{N}, \quad \text{cov}(a_1, p_0) = -\frac{\alpha_1 p_0}{N}, \quad (14)$$

можно было бы посчитать дисперсии. Однако нелинейность уравнения (11) приводит к необходимости вычислять производные из неявных (нелинейных) функций

$$f_1(\alpha_1, p_0, \lambda, \mu) = \alpha_1 - \lambda \mu \frac{k(k+1)}{2} = 0,$$

$$f_2(\alpha_1, p_0, \lambda, \mu) = \ln(p_0) - \lambda \left(\sum_{j=1}^k e^{-j\mu} - k \right) = 0.$$

Вычисляя частные производные по α_1 и p_0 для этих функций, получим систему:

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} - \mu \frac{k(k+1)}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_1} - \lambda \frac{k(k+1)}{2} \frac{\partial \mu}{\partial \alpha_1} = 1 - \mu \frac{k(k+1)}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_1} - \lambda \frac{k(k+1)}{2} \frac{\partial \mu}{\partial \alpha_1}, \\ 0 = \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_1} - \left(\sum_{j=1}^k e^{-j\mu} - k \right) \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_1} + \lambda \sum_{j=1}^k j e^{-j\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \alpha_1} = - \left(\sum_{j=1}^k e^{-j\mu} - k \right) \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_1} + \lambda \sum_{j=1}^k j e^{-j\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \alpha_1}, \\ 0 = \frac{\partial f_1}{\partial p_0} - \mu \frac{k(k+1)}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial p_0} - \lambda \frac{k(k+1)}{2} \frac{\partial \mu}{\partial p_0} = - \mu \frac{k(k+1)}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial p_0} - \lambda \frac{k(k+1)}{2} \frac{\partial \mu}{\partial p_0}, \\ 0 = \frac{1}{p_0} - \left(\sum_{j=1}^k e^{-j\mu} - k \right) \frac{\partial \lambda}{\partial p_0} + \lambda \sum_{j=1}^k j e^{-j\mu} \frac{\partial \mu}{\partial p_0}. \end{cases}$$

Обозначим

$$\sigma = \sum_{j=1}^k j e^{-j\mu}, \quad \delta = \sum_{j=1}^k j e^{-j\mu} - k.$$

Легко получить выражение для частных производных по параметрам в виде:

$$\frac{\partial \mu}{\partial \alpha_1} = \frac{2\delta}{\lambda k(k+1) \delta + \mu \sigma}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial \alpha_1} = \frac{2\delta}{k(k+1) \delta + \mu \sigma}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial p_0} = - \frac{\mu}{\lambda p_0 \delta + \mu \sigma}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial p_0} = \frac{1}{p_0 \delta + \mu \sigma}. \quad (16)$$

Для выражения $\delta + \mu \sigma$ в знаменателе, общего для всех четырёх формул, если $\mu \neq 0$, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \delta + \mu \sigma &= \sum_{j=1}^k (e^{-j\mu} - 1 + j\mu e^{-j\mu}) = \sum_{j=1}^k e^{-j\mu} (1 + j\mu - e^{j\mu}) = \\ &= \sum_{j=1}^k e^{-j\mu} \left(1 + j\mu - 1 - j\mu - \frac{(j\mu)^2}{2!} - \dots \right) < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, вычисление дисперсий по формулам (12) с подстановкой частных производных из (15), (16), а дисперсий – по формулам (13), (14) оправдано.

Но нужно ещё убедиться, что уравнение (11) имеет решение. Можно показать, что если $\frac{a_1}{\ln h_0} \leq -1$, то существует решение (11) при $\mu > 0$. Действительно, рассмотрим предельные случаи. При $\mu \rightarrow \infty$ правая часть (11) ведёт себя как $-\mu \frac{k+1}{2}$, если $\mu \rightarrow +0$, то часть, содержащая μ ,

а именно, $\frac{\sum_{j=1}^k (e^{-j\mu} - 1)}{\mu}$, преобразуется как

$$\frac{\sum_{j=1}^k (e^{-j\mu} - 1)}{\mu} = -\frac{\sum_{j=1}^k e^{-j\mu} (e^{j\mu} - 1)}{\mu} \approx -\sum_{j=1}^k e^{-j\mu} \left(j + \frac{j^2\mu}{2} + O(\mu^2) \right),$$

и при $\mu \rightarrow +0$ это приближённо равно $-\sum_{j=1}^k j = -\frac{k(k+1)}{2}$, так что в правой части (11) будет (-1) . Правая часть (11) монотонна по μ , так как производная

$$\left\{ \frac{\mu}{\sum_{j=1}^k (e^{-j\mu} - 1)} \right\}' = \frac{\sum_{j=1}^k (e^{-j\mu} - 1) + \mu \sum_{j=1}^k j e^{-j\mu}}{\left(\sum_{j=1}^k (e^{-j\mu} - 1) \right)^2} < 0 \text{ при } \mu > 0,$$

так как для выражения в числителе это было доказано рассуждениями после формулы (16).

Но так как $h_0 = 1 - h_1 - h_2 - \dots$, $a_1 = 1 \cdot h_1 + 2 \cdot h_2 + 3 \cdot h_3 + \dots$, то, применяя формулу Тейлора к логарифму h_0 , получим

$$\frac{a_1}{\ln h_0} \cong -\frac{1 \cdot h_1 + 2 \cdot h_2 + 3 \cdot h_3 + \dots}{h_1 + h_2 + h_3 + \dots} < -1 \text{ при } \mu > 0.$$

Метод моментов. Получается заменой в левой части (5) и (6) моментов популяции выборочными моментами – выборочным средним a_1 и выборочной дисперсией

$$m_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (n_i - a_1)^2.$$

Приходим к системе

$$\begin{cases} a_1 = \lambda \mu \frac{k(k+1)}{2} \\ m_2 = \lambda \mu \frac{k(k+1)}{2} \left(1 + \mu \frac{2k+1}{3} \right) \end{cases},$$

решение которой μ'', λ'' записывается в явном виде как

$$\mu'' = \frac{3}{2k+1} \left(\frac{m_2}{a_1} - 1 \right), \quad \lambda'' = \frac{2a_1^2(2k+1)}{3k(k+1)(m_2 - a_1)},$$

при условии $m_2 > a_1$.

Известно [4, гл. 27], что если объём выборки $N \rightarrow \infty$, то

$$E\{\mu''\} = \mu + O(N^{-1}), \quad E\{\lambda''\} = \lambda + O(N^{-1}),$$

а приближённая дисперсия для функции выборочных моментов $y = y(a_1, m_2)$ равна

$$\text{Var}\{y\} = \left(\frac{\partial y}{\partial a_1} \right)^2 \text{Var}\{a_1\} + \left(\frac{\partial y}{\partial m_2} \right)^2 \text{Var}\{m_2\} + 2 \left(\frac{\partial y}{\partial a_1} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial m_2} \right) \text{cov}\{a_1, m_2\} + O(N^{-3/2}),$$

причём частные производные берутся в точке (a_1, μ_2) . Учитывая (13) и, что

$$\text{Var}\{m_2\} = \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{N} + O(N^{-2}), \quad \text{cov}\{a_1, m_2\} = \frac{\mu_3}{N} + O(N^{-2}),$$

$$\frac{\partial \mu''}{\partial a_1} = -\frac{3m_2}{a_1^2(2k+1)}, \quad \frac{\partial \mu''}{\partial m_2} = \frac{3}{a_1(2k+1)},$$

$$\frac{\partial \lambda''}{\partial a_1} = \frac{2(2k+1)(2a_1 m_2 - a_1^2)}{3k(k+1)(m_2 - a_1)^2}, \quad \frac{\partial \lambda''}{\partial m_2} = -\frac{2(2k+1)}{3k(k+1)} \frac{a_1^2}{(m_2 - a_1)^2},$$

можно вычислить дисперсии оценок по методу моментов как функций λ и μ для различных значений k по формулам:

$$\text{Var}\{\mu''\} = \frac{9}{N\alpha_1^2(2k+1)^2} \left(\frac{\mu_2^3}{\alpha_1^2} + \mu_4 - \mu_2^2 - 2\frac{\mu_2\mu_3}{\alpha_1} \right),$$

$$\text{Var}\{\lambda''\} = \frac{4\alpha_1^2(2k+1)^2 \left\{ (2\mu_2 - \alpha_1)^2 \mu_2 + \alpha_1^2(\mu_4 - \mu_2^2) - 2\alpha_1(2\mu_2 - \alpha_1)\mu_3 \right\}}{N9k^2(k+1)^2 (\mu_2 - \alpha_1)^4}.$$

Ковариацию оценок можно найти, если дополнительно рассмотреть функцию

$$y(a_1, m_2) = \frac{3k(k+1)}{2(2k+1)} \lambda'' + \frac{(2k+1)}{3} \mu'' = \frac{\alpha_1^2}{m_2 - a_1} + \frac{m_2 - a_1}{a_1}.$$

Воспользовавшись частными производными взятыми в точке (α_1, μ_2)

$$\frac{\partial y}{\partial a_1} = \frac{2\alpha_1\mu_2 - \alpha_1^2}{(\mu_2 - \alpha_1)^2} - \frac{\mu_2}{\alpha_1^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial m_2} = \frac{1}{\alpha_1} - \frac{\alpha_1^2}{(\mu_2 - \alpha_1)^2},$$

а также асимптотическими дисперсиями, найденными выше, из равенства

$$\text{Var}\{y\} = \frac{9k^2(k+1)^2}{4(2k+1)^2} \text{Var}\{\lambda''\} + \frac{(2k+1)^2}{9} \text{Var}\{\mu''\} + k(k+1) \text{cov}\{\lambda'', \mu''\}$$

получим выражение для $\text{cov}\{\lambda'', \mu''\}$. Из-за громоздкости оно не приводится.

Численные результаты. Если распределение зависит от единственного параметра, проблем с определением эффективности оценок этого параметра нет: она равна пределу отношения величины нижней границы дисперсии оценки к дисперсии рассматриваемой оценки (скажем, метода моментов) [8, стр. 361]. Но если параметров распределения несколько, и все они подлежат оценке, то вместо дисперсии нужно рассматривать ковариационные матрицы, и на основе их вычислять некоторые скалярные меры. Так, в многомерном статистическом анализе часто используется обобщенная дисперсия, т.е. величина определителя ковариационной матрицы, и можно определить эффективность как предел отношения обобщенной дисперсии матрицы $N^{-1}\mathbf{B}^{-1}$ к обобщенной дисперсии соответствующей оценки $V(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ (9) (см., например, [9-10]):

$$e_0(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) = e_0(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu} | \lambda, \mu) = \left(\lim_{N \rightarrow \infty} |\mathbf{B}| |\mathbf{V}(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})| \right)^{-1}.$$

Но эта многомерная мера не единственная: часто наряду с обобщённой дисперсией рассматривают полную (общую) вариацию, т.е. след соответствующей ковариационной матрицы. Для практических применений часто удобно рассматривать отдельно диагональные элементы матрицы \mathbf{B} и соответственные элементы ковариационной матрицы оценок, чтобы быть в состоянии прикинуть, какой объём выборки нужен, чтобы иметь оценку с нужной точностью. Конечно, при таком способе оценивания эффективности теряется информация о корреляциях между оценками, а они могут быть существенными. Зато не происходит нивелирования дисперсий оценок различных параметров, если они разнопорядковые. Именно такая ситуация, как показали расчёты, относится к нашей задаче: при малых λ дисперсия для λ заметно меньше, чем для μ ; более того, характер поведения этих функций во многом противоположный – дисперсия оценки параметра λ растёт с ростом значений λ , а дисперсия оценки параметра μ уменьшается. Поэтому основной акцент был сделан на вычисление умноженных на N асимптотических дисперсий различных оценок параметров при различных значениях порядка k (приводятся результаты расчётов для $k=2,3,4$), а трёхмерные графики эффективности оценок на основе отношения обобщённых дисперсий приводятся для полноты рассмотрения.

На рисунках 1 – 3 приведены графики зависимости натуральных логарифмов дисперсий различных оценок параметра λ как функции от значений λ (были взяты значения аргумента от 0.001 до 5.001); на рисунках 4 – 6 подобного типа графики построены для оценок параметра μ . На каждом рисунке изображено 4 картинки: для $\mu = 0.1, 0.5, 1, 3$. На каждой картинке приведена легенда: сплошная линия с маркером «кружок» (легенда «1») соответствует оценке метода моментов, штрихпунктирная линия (легенда «2») – методу подстановки, сплошная линия без маркеров (легенда «3») отмечает нижнюю границу дисперсии оценки; кроме того, при $\mu = 1$ и 3 (нижние картинки) построен логарифм дисперсии оценки по методу моментов соответствующего параметра при условии, что другой известен (маркеры «+», легенда «4»).

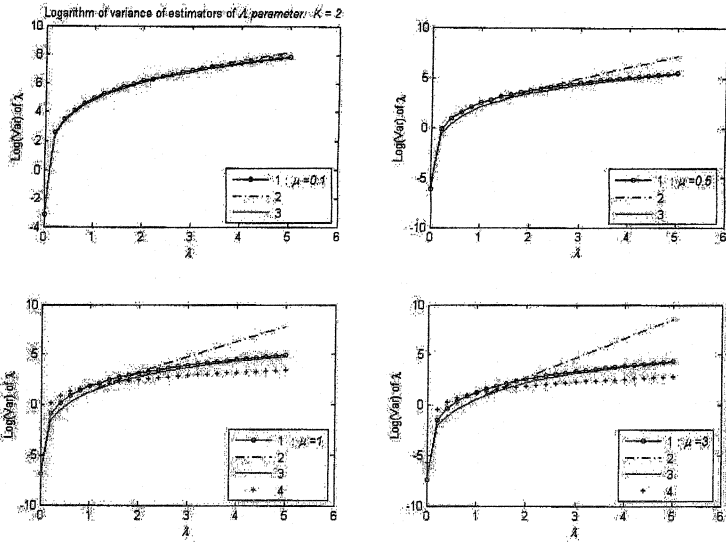


Рис.1

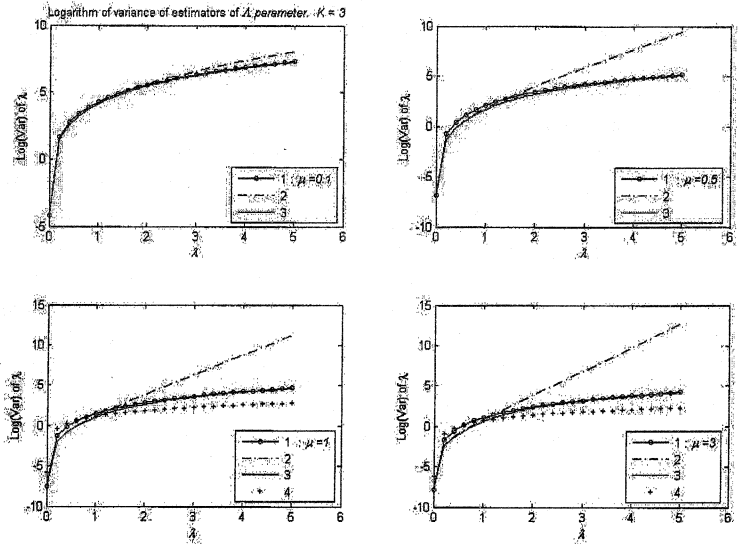


Рис.2

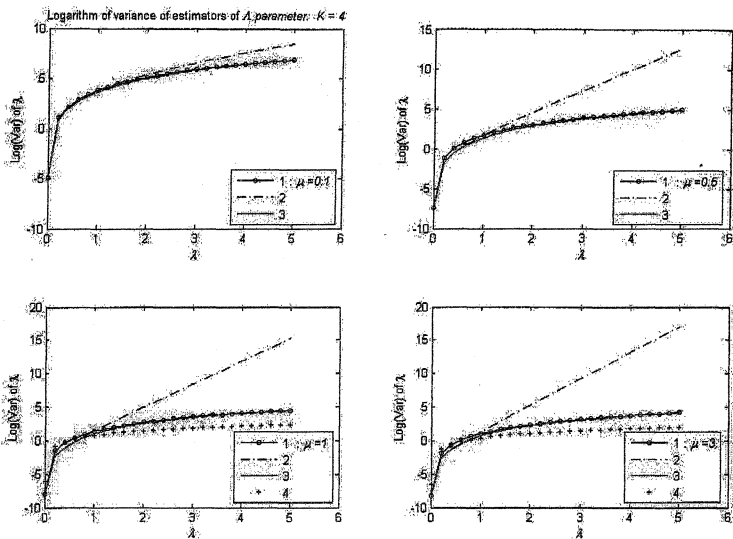


Рис.3

Оценки параметра λ демонстрируют монотонный рост по λ , причём в довольно широких пределах; с возрастанием λ скорость роста замедляется для оценок метода моментов и максимального правдоподобия, в то время так оценка метода подстановки сохраняет линейный рост; скорость роста логарифма дисперсии оценки по этому методу заметно растёт с увеличением μ . Дисперсия оценки λ по методу подстановки растёт с увеличением порядка k , а для двух остальных рассматриваемых методов она мало чувствительна к значениям k . Видно, что при возрастании λ график дисперсии оценки метода моментов сближается с графиком нижней границы дисперсии оценки, как это и следует из теории ([1] при $\lambda \rightarrow \infty$ рассматриваемое распределение сходится к нормальному закону по распределению, а для нормальных выборок метод моментов и метод максимального правдоподобия эквивалентны). Этот факт позволяет оценить скорость роста логарифма дисперсии: из (26) ясно, что главный член по λ в выражении для дисперсии по методу моментов, $\mu_4 - \mu_2^2 = \kappa_4 + 2\mu_2^2$, умноженный на α_1^4 и делённый на $(\mu_2 - \alpha_1)^4$, имеет рост порядка λ^2 , а после логарифмирования дисперсии скорость роста логарифмическая.

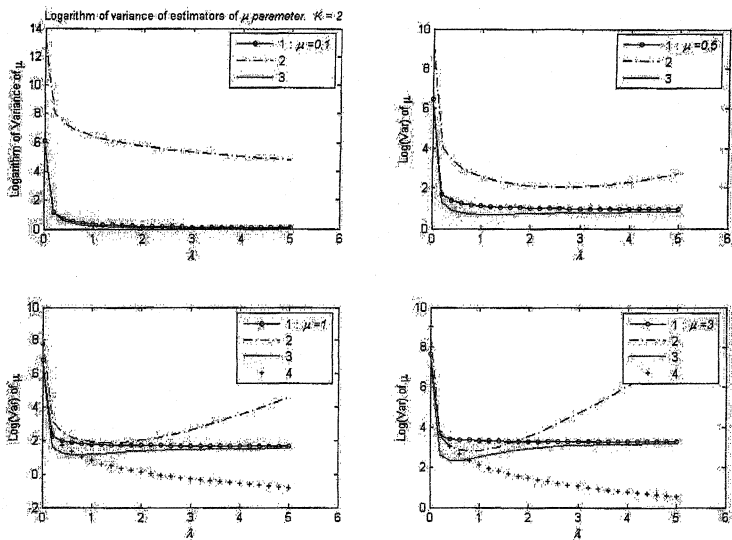


Рис.4

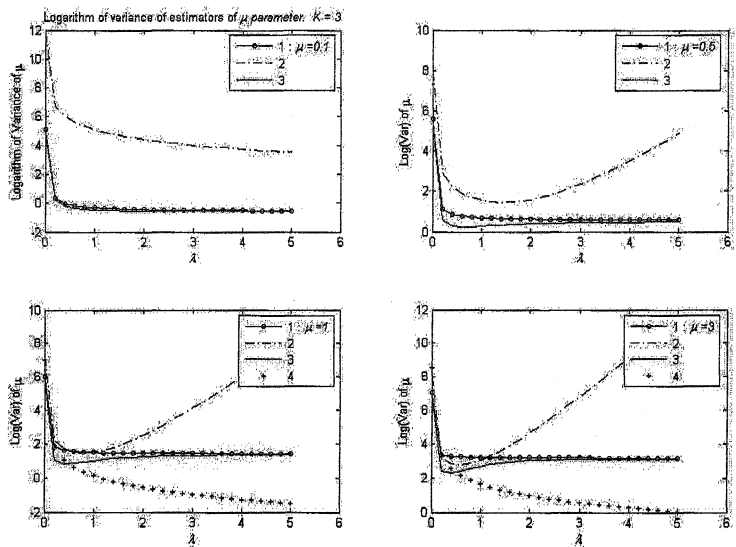


Рис.5

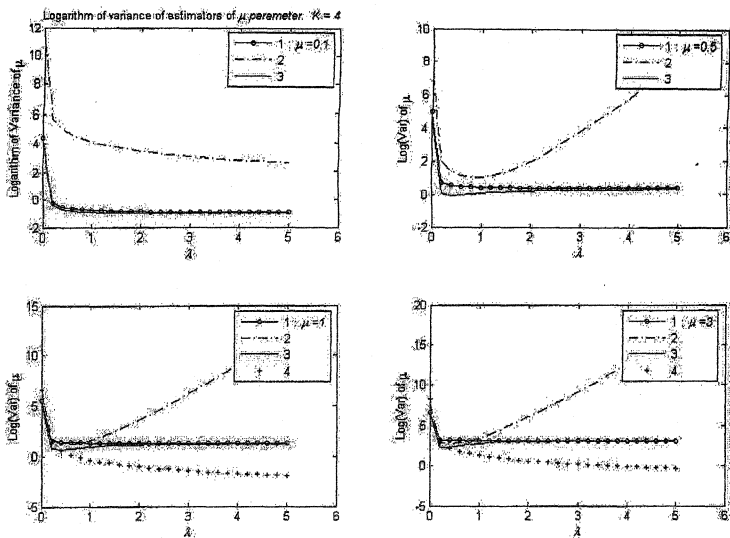


Рис.6

Более интересны рис. 4 – 6 с графиками зависимости логарифмов дисперсий оценок параметра μ : нижняя граница дисперсии оценок обнаруживает минимум при значениях $\lambda \approx 0.5$, а с ростом λ выходит на горизонталь. Это находит объяснение в выражении (25) для асимптотической дисперсии μ'' по методу моментов: главный член по λ , $\mu_4 - \mu_2^2 = \kappa_4 + 2\mu_2^2$, растёт как λ^2 ; но такова же скорость роста члена α_1^2 в знаменателе. Соответствующая кривая логарифма дисперсии оценки по методу моментов монотонно убывает, сближаясь сверху с нижней границей дисперсии. Графики логарифма дисперсии оценки по методу подстановки показывают, что он имеет значительно большую дисперсию, чем в методе максимального правдоподобия и методе моментов для $\mu = 0.1$ и $\mu = 0.5$; только для больших μ (1 и 3) он становится конкурентоспособен с методом моментов, да и то – в узком диапазоне малых λ . С ростом k отмеченные черты дисперсии оценки по методу подстановки усиливаются; что касается двух других оценок, то у них с ростом k наблюдается даже некоторое уменьшение дисперсии. Наконец, если оценивается единственный параметр (λ или μ), а другой считается заданным, то логарифм дисперсии оценки по методу моментов значительно меньше, нежели если оценивать этим методом два параметра.

На рис.7-10 (в процентах) изображены в виде линий уровня значения эффективностей e_0 метода моментов, как функции параметров λ, μ , рассчитанных при различных k . С ростом k явно локализуется область низких эффективностей ($e_0 < 0.9$) (рис.10). При этом границы области более растянуты по оси μ , чем по оси λ .

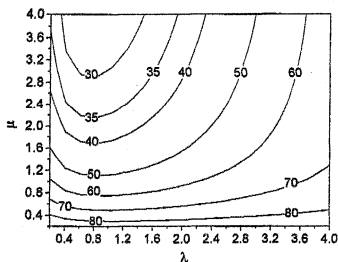


Рис.7 ($k=1$)

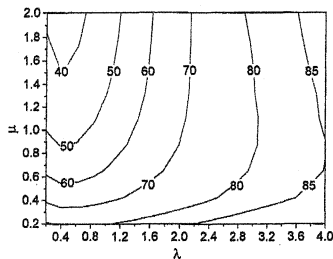


Рис.8 ($k=2$)

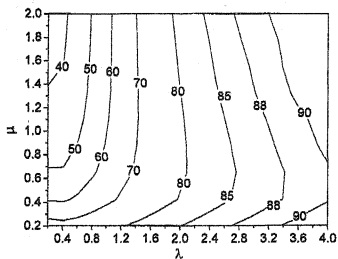


Рис.9 ($k=3$)

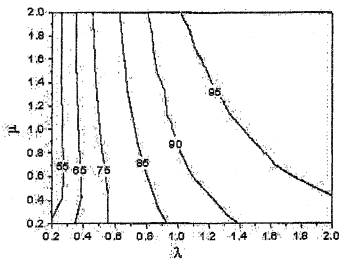


Рис.10 ($k=10$)

Каковы практические выводы? Прежде всего, из анализа приведённых рисунков ясно, что метод подстановки неконкурентоспособен. Хотя дисперсия оценок по методу максимального правдоподобия (совпадающая с нижней границей дисперсии оценок) меньше, чем по методу моментов, но не кардинально меньше; в то же время трудности численного решения системы уравнений максимального правдоподобия (как технические, так и связанные с вопросами

существования, единственности решения, выбором «подходящего» решения, обеспечивающего глобальный максимум функции правдоподобия) склоняют авторов к использованию метода моментов, свободного от указанных проблем и в то же время дающего не намного большие дисперсии при больших λ . Если же имеется возможность заранее знать один из параметров или же получить его оценку из независимых экспериментов, можно оценить неизвестный параметр по методу моментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфимцев М.В. Распределение Неймана порядка k и некоторые его свойства // Прикладная математика и информатика, № 23. М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2006. С. 85-93.
2. Philippou, A.N. Mixtures of distributions by the Poisson Distribution of Order k // Biometrical Journal, vol. 31, 1989. P. 67–74.
3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее применение, т.1. М., Мир, 1967.
4. Johnson N.L., Kotz S., Kemp A.W. Univariate discrete distributions. 3-rd edition, Wiley, New York, 2005.
5. Галкин В.Я. Прямые задачи при разделении множественных процессов // ДАН СССР, 1974. Т.216. №5. С.1014-1017.
6. Белов А.Г., Галкин В.Я. Моментные характеристики сложного Пуассона с обобщающим биномиальным распределением // Прикладная математика и информатика, №12. М.: Изд-во Макс Пресс, 2002. С. 111-125.
7. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир. 1975
8. Уилкс С. Математическая статистика. М.: Наука. 1967
9. Patel, Y.C. (1976) Even Point Estimation and Moment Estimation in Hermite Distribution. *Biometrics*, vol. 32, pp. 865 – 873.
10. Белов А.Г., Галкин В.Я. Асимптотическая эффективность совместного оценивания параметров одного сложнопуассоновского распределения // Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1988. С.46-57.