

ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СИГНАЛА С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Восстановление сигнала, искаженного приемной аппаратурой, является актуальной задачей.

Пусть искажающая система описывается линейным оператором, коммутирующим с оператором сдвига, т.е. может быть представлена линейным интегральным уравнением Фредгольма первого рода с ядром типа свертки [1,2]:

$$i(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x - \tau) \sigma(\tau) d\tau + n(x) = h(x) * \sigma(x) + n(x), \quad (1)$$

где * – обозначает свертку, $\sigma(x)$ – входной сигнал, $h(x)$ – ядро интегрального уравнения (приборная функция), $n(x)$ – высокочастотная помеха, $i(x)$ – выходной, искаженный сигнал. Решается обратная задача нахождения оценки $\hat{\sigma}(x)$ по зашумленным данным $i(x)$.

Задача обращения уравнения (1) является некорректной [2], т.е. малым отклонениям зашумленной функции $i(x)$ от истинного значения $h(x) * \sigma(x)$ могут соответствовать большие отклонения оценки $\hat{\sigma}(x)$ от $\sigma(x)$. Для борьбы с неустойчивостью решения применяют методы регуляризации решения [2]. Смысл поиска линейного регуляризирующего оператора применительно к уравнению свертки заключается в модификации характеристики инверсного фильтра таким образом, чтобы обеспечить подавление помехи на высоких частотах [1,2].

На решение часто наложены некоторые априорные ограничения, важнейшим из которых при обработке сигналов аналоговых приборов является неотрицательность сигнала $\sigma(x)$. При этом линейный подход имеет недостаток, связанный с несогласованностью решения с наложенными на него ограничениями. В случае неотрицательности решения эта несогласованность приводит к возникновению отрицательных осцилляций.

Задача восстановления сигналов с учетом априорных ограничений, как правило, становится нелинейной, так что ее решение не может быть определено аналитически. В то же время учет априорных ограничений значительно улучшает качество решения и снижает требования к отношению сигнал/шум, необходимому для качественного восстановления. Таким образом, разрабатываемые алгоритмы должны учитывать максимум доступной априорной информации о сигнале.

Цель данной работы – построение общей схемы решения задачи восстановления сигналов. В такой схеме линейный оператор восстановления сигналов [1] используется для построения ограничений в виде коридора допустимых значений для последующего итерационного уточнения решения внутри коридора оценки.

Постановка задачи. Из всего многообразия методов обработки сигнала рассмотрим итерационный алгоритм для получения оценки $\hat{\sigma}(x)$ в виде [3]

$$\hat{\sigma}_k(x) = \hat{\sigma}_{k-1}(x) + r(x)[i(x) - \hat{\sigma}_{k-1}(x) * h(x)],$$

где $\hat{\sigma}_k(x)$ – оценка решения на k -ой итерации, $r(x)$ – коэффициент релаксации в форме

$$r(x) = c \left\{ 1 - 2 \left| \hat{\sigma}_{k-1}(x) - \frac{1}{2} [B(x) + A(x)] \right| / [B(x) - A(x)] \right\}, \quad (2)$$

задающий коридор оценки $A(x) \leq \hat{\sigma}(x) \leq B(x)$. Здесь c – параметр акселерации, влияющий на сходимость процесса. В качестве начальной оценки решения обычно принимается наблюдаемый сигнал: $\hat{\sigma}_0(x) = i(x)$. Для окончания итерационного процесса производят контроль за величиной среднего квадратичного отклонения (СКО)

$$s_k = \left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [i(x_j) - (\hat{\sigma}_{k-1} * h)(x_j)]^2 \right]^{1/2}. \quad (3)$$

Характер изменения СКО от числа итераций представлен на рис. 1. Итерационный процесс прекращают либо при достижении СКО некоторого порога, либо когда изменение $s_k - s_{k-1}$ становится незначительным.

Применение коэффициента релаксации в форме (2) требует знания ограничивающих кривых оценки $A(x)$ и $B(x)$. Например, просто требование положительности оценки обеспечивается при $A(x) \equiv 0$ и достаточно большом $B(x) \equiv const$. В работе [4] предложено задавать ограничивающие функции в виде: $A(x) = i(x) - d$, $B(x) = i(x) + d$. Таким образом, обеспечивается ограничение $|i(x) - \hat{\sigma}(x)| \leq d$, т.е. область возможных значений оценки заключена в коридор шириной $2d$, середина которого совпадает с исходным сигналом $i(x)$. Центральным вопросом применения данного подхода является выбор величины d . Следует отметить, что завышенная

ширина коридора возвращает метод к обычной итерационной процедуре без ограничений, приводя к существенному нарастанию шума в оценке с увеличением числа итераций [4]. Зауженный коридор подавляет помеху и лишает оценку возможности приблизиться к истинному сигналу $\sigma(x)$, обрекая ее на тех участках, где $|i(x) - \sigma(x)| > d$. Однако величина искажения в каждой точке различна. В идеальном случае ширина коридора оценки должна быть равна искажению в данной точке $d(x) = |i(x) - \sigma(x)|$, но точное ее нахождение возможно лишь после решения исходной задачи. Оценим величину искажения $|i(x) - \sigma(x)|$ другим методом.

Метод оценивания. В качестве оценки $\bar{\sigma}(x)$, которая используется при задании коридора допустимых решений выберем редуцированный сигнал, полученный на основе дискретной свертки исходного сигнала с некоторыми весовыми коэффициентами $a_{j,h}^{(m)}(\alpha)$, зависящими от параметров приборной функции $h(x)$ и параметра регуляризации α [2,1]

$$\bar{\sigma}(x) = \sum_{j=-m}^m a_{j,h}^{(m)}(\alpha) i(x + jh), \quad (4)$$

где h – интервал дискретизации. Тогда значение функции ширины коридора может быть взято в виде

$$d(x) = \min\{|i(x) - \bar{\sigma}(x)|, i(x)\}. \quad (5)$$

Условие $d(x) \leq i(x)$ добавлено в (5) с целью обеспечения положительности оценки $\sigma(x) \geq A(x) = i(x) - d(x) \geq 0$ [5]. Приведем результаты численного эксперимента.

Численный пример. Сигнал, требующий разрешения показан на рис. 2 сплошной линией. В качестве приборной использовалась гауссовская функция. Результат восстановления с помощью итерационного процесса приведен на рис. 2 штриховой линией. Для достижения приемлемой точности оказалось достаточным выполнить 50 итераций. Из рис. 2 видно, что использованное в данном случае ограничение влияет на неотрицательность решения и приводит к значительному улучшению качества и повышению разрешения исходного сигнала.

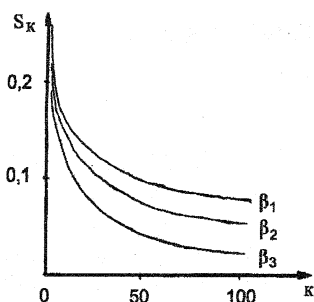


Рис.1

Зависимость СКО от числа итераций для различных β : $\beta_1 > \beta_2 > \beta_3$ [1]

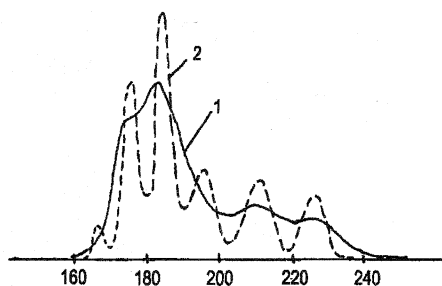


Рис. 2

1 - исходный сигнал
2 - восстановленный сигнал

Литература

1. Галкин В.Я., Сайфуллин Р.Т. Редукционная обработка сигналов аналитических приборов // Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Изд-во Моск.ун-та, 1988. С.58-63.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.- 287с.
3. Фриден Б.Р. Улучшение и реставрация изображений // Обработка изображений и цифровая фильтрация. М.: Мир, 1979.-319с.
4. Василенко Г.И., Тараторин А.М. Восстановление изображений. М.: Радио и связь, 1986.- 302с.
5. Мартиросян В.Р. Итерационный алгоритм восстановления изображений с переменной шириной коридора оценки // Автотметрия, 1984, №5. С. 87-92.