Раздел II.
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФИНАНСОВЫХ ЗАДАЧАХ.

Белянкин Г.А., Корсаков Н.Н., Морозов В.В.

Исследование задачи оптимального управления долгами

Рассмотрим финансовый институт (ФИ), осуществляющий координационную деятельность по финансированию отдельных предприятий промышленности. ФИ берет среднесрочные кредиты в банках и инвестирует их в промышленные предприятия (ПП). Процентные ставки по кредитам и сроки погашения могут быть различными. График погашения ФИ долгов банкам свободный, т.е. возможны в каждый момент следующие случаи: погашение только основной суммы долга, погашение процентов по долгу ипогашение процентов и основной суммы долга.

Кредиты могут погашаться в любой момент, но не позднее даты полного возврата соответствующего кредита. Между ФИ и ПП фиксируются сроки и суммы погашения кредитов и процентов по ним. Таким образом, поток платежей от ПП к ФИ полностью определен. Получая средства от ПП ФИ должна направлять полученные средства на погашение кредитов банкам. Задача состоит в оптимизации схемы погашения задолженности ФИ перед банками – минимизации суммы выплачиваемых простых процентов (основные понятия см. в [1]).

Пусть, на текущий нулевой момент времени у ФИ есть m кредитов от банков по ставкам простых процентов i_k , $k = 1,...,m$. Сумма непогашенной основной части долга к этому моменту составляет S_k , а сумма накопившихся процентов составляет Y_k . Пусть возврат средств от ПП ожидается величины Z_j в момент времени t_j, j=1,...,n. Погашение долгов банкам происходит также в моменты времени t_j. Будем считать, что t_1=0. Обозначим через n_k – номер момента времени, к которому должен быть погашен k-й кредит, а x_{kj} и y_{kj} , j=1,..., n_k – суммы погашения основной части и процентов по k -му кредиту в момент времени t_j . Без потери общности будем считать, кредиты упорядочены в порядке невозрастания величин n_k . Пусть m_j – наибольший номер кредита, срок погашения которого не истек к моменту времени t_j: $m_j = \max\{k \mid t_{n_k} \geq t_j\}$.

При этом m_1=m , m_{n+1}=0. Тогда оптимальное управление долгами может быть сформулировано в виде задачи линейного программирования (задача 1):

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_k} y_{kj} \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n_k} x_{kj} = S_k , \qquad \sum_{j=1}^{n_k} y_{kj} = \sum_{j=1}^{n_k} t_j i_k x_{kj} + Y_k , \quad k=1,...m, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{h}\sum_{k=1}^{m_j}\left(x_{kj}+y_{kj}\right)\le\sum_{j=1}^{h}Z_j\,,\quad h=1,\dots,n, \tag{2}$$

где переменные x_{kj} и y_{kj} неотрицательны.

Задача 1 содержит $2\sum_{k=1}^{m}n_k$ переменных и $2m+n$ основных ограничений (1),(2).

В случае, когда кредитов много, а промежутки между сроками погашения небольшие, возникает проблема уменьшения размерности задачи. Покажем, как можно осуществить декомпозицию задачи. Введем новые переменные

$$u_k=\sum_{j=1}^{n_k}y_{kj},\quad \mathrm{v}_j=\sum_{k=1}^{m_j}y_{kj}. \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{j=1}^{n}\mathrm{v}_j=\sum_{k=1}^{m}u_k. \tag{4}$$

Кроме того, введенные агрегированные переменные удовлетворяют некоторым дополнительным ограничениям. Пусть при $j=j_{r-1}+1,\dots,j_r$ величина m_j принимает одно и то же значение $m^{(r-1)}$, где $r=1,\dots l$. Здесь $m^{(0)}=m$, $j_0=0$ и $j_l=n$. С ростом r величины $m^{(r)}$ убывают, поскольку последовательность m_j не возрастающая. Тогда справедливы неравенства

$$\sum_{j=1}^{j_r}\mathrm{v}_j\ge\sum_{k=m^{(r)}+1}^{m}u_k,\quad r=1,\dots,l\text{-}1. \tag{5}$$

Отметим, что если все кредиты выданы на один и тот же срок, то ограничения (5) отсутствуют, поскольку $l=1$.

Пример 1. Пусть ФИ взял четыре кредита: первый – на 5 месяцев, второй и третий – на 4 месяца и четвертый – на 2 месяца. Здесь $n=6$, $t_j=j\text{-}1$, $j=1,\dots,6$, $n_1=6$, $n_2=n_3=5$, $n_4=3$, $m_1=m_2=m_3=4$, $m_4=m_5=3$, $m_6=1$, $l=3$, $m^{(0)}=4$, $m^{(1)}=3$, $m^{(2)}=1$, $j_1=3$, $j_2=5$, $j_3=6$.

Утверждение 1. Для того, чтобы система (3) имела неотрицательное решение относительно переменных y_{kj}, необходимо и достаточно выполнения условий (4),(5).

Доказательство. Утверждение докажем индукцией по l. Если $l=1$, то система (3) является системой ограничений транспортной задачи с условными n пунктами производства и m пунктами потребления, которая при выполнении условия (4) имеет допустимое решение. Пусть утверждение справедливо при всех $l=1,\dots h$. Докажем его при $l=h+1$. В силу (5) справедливы неравенства

$$\sum_{j=1}^{j_r}\mathrm{v}_j\ge\sum_{k=m^{(r)}+1}^{m}u_k,\quad r=1,\dots,l\text{-}1.$$

Нетрудно подобрать такие числа w_j, что выполнены соотношения $v_j\ge w_j$, $j=1,\dots j_h$,

$$\sum_{j=1}^{j_r} \mathrm{w}_j \geq \sum_{k=m^{(r)}+1}^{m} u_k, \quad r=1,...,l-1, \qquad \sum_{j=1}^{j_h} \mathrm{w}_j = \sum_{k=m^{(h)}+1}^{m} u_k.$$

Положим $w_j=0$, $j=j_h+1,..., n$. Рассмотрим две вспомогательных транспортных задачи: в первой имеется j_h пунктов производства с величинами выпуска w_j, $j=1,..j_h$ и $m - m^{(h)}$ пунктами потребления с потребностями в продукции u_k, $k= m^{(h)}+1,...,m$; во второй задаче имеется n пунктов производства с величинами выпуска $v_j - w_j$, $j=1,...,$ n и $m^{(h)}$ пунктов потребления с потребностями в продукции u_k, $k= 1,...,m^{(h)}$. Проверим условие баланса во второй транспортной задаче:

$$\sum_{j=1}^{n}(\mathrm{v}_j - w_j) = \sum_{j=1}^{n} v_k - \sum_{j=1}^{j_h} w_j = \sum_{k=1}^{m} u_k - \sum_{j=m^{(h)}+1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{m^{(h)}} u_k.$$

Обе задачи согласно предположению индукции имеют допустимые решения, объединяя которые получаем допустимое решение исходной задачи. Утверждение 1 доказано.

Определим теперь задачу линейного программирования с использованием агрегированных переменных (задача 2):

$$\sum_{k=1}^{m} u_k \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n_k} x_{kj} = S_k, \quad u_k = \sum_{j=1}^{n_k} t_j i_k x_{kj} + Y_k, \; k=1,...m,$$

$$\sum_{j=1}^{h} v_j + \sum_{j=1}^{h}\sum_{k=1}^{m_j} x_{kj} \leq \sum_{j=1}^{h} Z_j, \; h=1,...,n,$$

$$\sum_{j=1}^{j_r} \mathrm{v}_j \geq \sum_{k=m^{(r)}+1}^{m} u_k, \quad r=1,...,l-1, \qquad \sum_{j=1}^{n} \mathrm{v}_j = \sum_{k=1}^{m} u_k.$$

Для решения задачи 1 сначала находится оптимальное решение задачи 2 x_{kj}^0, v_j^0, u_k^0, $j=1,...n_k$, $k=1,...m,$ а затем компоненты y_{kj}^0, удовлетворяющие ограничениям (3),(4) при найденных v_j^0, u_k^0.

Пример 2. Пусть в условиях примера 1 $S_1= S_2= S_3= S_4=1000$, $Y_1=60$, $Y_2=100$, $Y_3=140$, $Y_4=320$, $i_1=6\%$, $i_2=5\%$, $i_3=7\%$, $i_4=8\%$, $Z_1=0$, $Z_2= Z_3= Z_4= Z_5= Z_6=950$. Эта задача имеет бесконечное множество решений со значением целевой функции, равным 679,5. Если в целевую функцию ввести малый коэффициент дисконтирования:

$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_k}(1+\varepsilon)^{-t_j} y_{kj}$, то ненулевые компоненты оптимального решения задачи 1 с точностью до первого знака будут равны:

$x_{14}^0 = 2035, x_{16}^0 = 7965, x_{24}^0 = 3195, x_{25}^0 = 6805, x_{33}^0 = 573, x_{34}^0 = 427, x_{42}^0 = 950, x_{43}^0 = 50$

$y_{16}^0 = 83.0, y_{25}^0 = 1153, y_{35}^0 = 1542, y_{43}^0 = 327.$

Решение агрегированной задачи приведет к тем же значениям вектора x и значениям агрегированных переменных, равным:

$u_1^0 = 83.0, u_2^0 = 1153, u_3^0 = 1542, u_4^0 = 327.0, v_1^0 = 0.0, v_2^0 = 0.0, v_3^0 = 327.0, v_4^0 = 0.0, v_5^0 = 3695, v_6^0 = 83.0$

Дезагрегация этой задачи с использованием вышеуказанной целевой функции приведет к таким же значениям вектора y^0.

В задаче 1 нет прямых ограничений на срок выплаты процентов по вкладам. Ограничение (1) позволяет аккумулировать суммы процентов на счете ФИ и произвести их выплату по k-му кредиту в последний, т.е. n_k-й момент времени. Для обоснования докажем следующее утверждение.

Утверждение 2. Если задача 1 имеет решение, то добавление системы равенств

$$y_{kj} = 0, \quad j < n_k, \quad y_{kn_k} = \sum_{j=1}^{n_k} t_j i_k x_{kj} + Y_k, \quad k = 1, \dots, m. \tag{6}$$

к задаче 1 не приведет к несовместности системы ограничений и значение целевой функции на решении не изменится.

Доказательство. Очевидно, что с добавлением нового ограничения значение минимума не может уменьшиться. Докажем, что оно и не увеличится. Пусть набор x_{kj}^0, y_{kj}^0 является решением задачи 1. Построим решение x_{kj}, y_{kj}, которое будет удовлетворять как ограничениям (1),(2), так и ограничению (6). Положим

$$x_{kj} = x_{kj}^0, \ j = 1, \dots, n_k, \ y_{kj} = 0, \ j < n_k, \ y_{kn_k} = \sum_{j=1}^{n_k} y_{kj}^0, \ k = 1, \dots, m.$$

Выполнение неравенств (1),(6) очевидно, а неравенство (2) следует из неотрицательности величин x_{kj}, y_{kj}. Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. Решение задачи 1 эквивалентно следующей задаче линейного программирования (задача 3):

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_k} t_j i_k x_{kj} \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n_k} x_{kj} = S_k, \quad k = 1, \dots m$$

$$\sum_{k=m_{h+1}+1}^{m} \sum_{j=1}^{n_k} t_j i_k x_{kj} + \sum_{k=1}^{m_{h+1}} \sum_{j=1}^{h} x_{kj} \le \sum_{j=1}^{h} Z_j - \sum_{k=m_{h+1}+1}^{m} [Y_k + S_k], \quad h = 1, \dots, n.$$

$$x_{kj} \ge 0, j = 1, \dots n_k, \ k = 1, \dots m.$$

Доказательство. В силу утверждения 2 добавление уравнений (6) не изменит значения целевой функции. После этого выполнение правой части равенства (1) следует из уравнений (6). Подставляя выражения для y_{kj} в неравенства (2) получим:

$$\sum_{k=m_{h+1}+1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n_k} t_j i_k x_{kj} + Y_k\right] + \sum_{k=m_{h+1}+1}^{m}\sum_{j=1}^{n_k} x_{kj} + \sum_{k=1}^{m_{h+1}}\sum_{j=1}^{h} x_{kj} \le \sum_{j=1}^{h} Z_j, \quad h=1,\dots,n.$$

Принимая во внимание, что $\sum_{j=1}^{n_k} x_{kj} = S_k$, получим искомый результат. Утверждение 3 доказано.

Утверждение 2 показывает, что действия ФИ по выплате простых процентов являются достаточно свободными, что не всегда устраивает кредитующие организации. Поэтому наиболее распространенными являются схемы с фиксированными сроками погашения. В этом случае фиксируются моменты времени, в которые ФИ должен возвращать все накопившееся к этому времени проценты по нему. Пусть $a_{kj}=1$, если в j момент времени должны быть возвращены все накопившиеся проценты по k-му кредиту и $a_{kj}=0$ в противном случае.

Утверждение 4. Оптимальное управление портфелем обязательств, связанных условием возврата накопившихся процентов в фиксированные моменты времени, определяется решением следующей задачи линейного программирования:

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_k} y_{kj} \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n_k} x_{kj} = S_k, \qquad \sum_{j=1}^{n_k} y_{kj} = \sum_{j=1}^{n_k} t_j i_k x_{kj} + Y_k, \quad k=1,\dots m,$$

$$\sum_{j=1}^{h}\sum_{k=1}^{m_j}\left(x_{kj} + y_{kj}\right) \le \sum_{j=1}^{h} Z_j, \qquad h=1,\dots,n,$$

$$a_{kh}\sum_{j=h+1}^{n_k}\left[x_{kj} i_k \left(t_j - t_h\right) - y_{kj}\right] = 0, \qquad h=1,\dots,n, \quad (7)$$

$$x_{kj} \ge 0, y_{kj} \ge 0.$$

Доказательство. Условие возврата накопившихся процентов по k кредиту в h-й момент времени может быть записано следующим образом (проценты с части долга, оплаченного к моменту времени t_h плюс неоплаченные проценты в нулевой момент времени плюс накопившиеся к моменту t_h проценты по неоплаченной части долга):

$$\sum_{j=1}^{h} y_{kj} \ge \sum_{j=1}^{h} t_j i_k x_{kj} + Y_k + t_h\left(S_k - \sum_{j=1}^{h} x_{kj}\right) i_k.$$

Вычитая это неравенство из (1) получим

$$\sum_{j=h+1}^{n_k} y_{kj} \le \sum_{j=h+1}^{n_k} x_{kj} i_k \left(t_j - t_h\right).$$

Откуда в силу рассуждений, аналогичных используемым в доказательстве утверждения 2, получим (7). Утверждение 4 доказано.

Пример 3. Решение задачи (3) в условиях примера 2 приведет к тем же значениям вектора x^0 и значению целевой функции равной 59.5, что отличается от предыдущего значения на $\sum_{k=1}^{m} Y_k = 620$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 99-01-00184.

Литература

1. Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. – М.: «Дело», «BusinessРечь», 1992 г.