Близорукова М.С.

О моделировании входа в системе с запаздыванием

Постановка задачи.

Рассмативается динамическая система, описываемая дифференциальным уравнением с запаздыванием вида

$$x(t) = f_1(t, x(t), x(t-\alpha_1), \ldots, x(t-\alpha_k)) +$$
$$f_2(t, x(t), x(t-\alpha_1), \ldots, x(t-\alpha_k))u(t), \quad (1)$$

$$x_{t_0}(s) = x(t_0 + s) = \varphi(s), \quad s \in [-\alpha, 0], \quad \varphi(\cdot) \in C_1[0, \alpha].$$

Здесь $x(t) \in R^n$ — фазовый вектор, время меняется в пределах фиксированного отрезка $T = [t_0, \vartheta]$, $\alpha_i > 0$, $i = 1,..k$ — постоянные величины запаздываний, $(\alpha = \max\{\alpha_i : i = 1, 2, \ldots, k\})$, $u \in R^p$ — управление, $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$ — непрерывные функции, отображающие $T \times R^n \times \ldots \times R^n$ соответственно в R^n и в пространство матриц размерности $n \times p$ и удовлетворяющие на $T \times R^n \times \ldots \times R^n$ условию Липшица:

$$|f_j(t_1, x_1, y_1^{(1)}, \ldots, y_k^{(1)}) - f_j(t_2, x_2, y_1^{(2)}, \ldots, y_k^{(2)})| \le$$
$$\le c_j(|t_1 - t_2| + |x_1 - x_2| + \sum_{i=1}^{k} \left|y_i^{(1)} - y_i^{(2)}\right|), \quad c_j \in (0, +\infty)$$

при *j=1,2*, $t_1, t_2 \in T$, $x_1, x_2, y_1^{(1)}, \ldots, y_k^{(1)}, y_1^{(2)}, \ldots, y_k^{(2)} \in R^n$. В дальнейшем $|\cdot|$ означает евклидову норму в соответствующем пространстве R^n или $R^{n \times p}$, $C_1[0, \alpha]$ — пространство непрерывно-дифференцируемых функций, $x_{t_0}(\cdot)$ (или $x_{t_0}(s)$) — функцию $x(t_0 + s)$, $s \in [-\alpha, 0]$, рассматриваемую как единое целое.

Обсуждаемая в работе задача состоит в следующем. Имеется система (1). Ее траектория $x(\cdot)$ порождается некоторым управлением

$u(\cdot)$: $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_{t_0}(\cdot), u(\cdot))$.

Здесь $x(\cdot; t_0, x_{t_0}(\cdot), u(\cdot))$ означает решение уравнения (1) (в смысле Каратеодори), отвечающее управлению $u(\cdot)$. Под управлением $u(\cdot)$ понимаются измеримые по Лебегу функции со значениями в заданном компакте $P \subset R^p$. Управление $u(\cdot)$ неизвестно, неизвестна также и порождаемая им траектория системы. В то же время в достаточно частые моменты времени $t = t_i$ с некоторой погрешностью измеряются состояния $x(t_i)$. Результаты измерений—вектора ξ_i^h—удовлетворяют неравенствам

$$\left|\xi_i^h - x(t_i)\right| \le h, \quad (2)$$

где h — погрешность измерения. Требуется указать устойчивый к погрешностям вычислений алгоритм, который синхронно с развитием процесса по результатам неточных измерений текущих состояний вычисляет (с ошибкой) некоторую функцию $v_h(\cdot)$ из множества $U(x(\cdot))$ управлений, порождающих $x(\cdot)$, то есть из множества

$$U(x(\cdot))=\{u(\cdot)\in P\subset R^p : x(t)=x(t;t_0,x_{t_0},u(\cdot)) \text{ при п.в. } t\in T\}.$$

Такова содержательная постановка задачи.

Один из подходов к решению подобного типа задач был предложен в работе [1] и развит [2-8]. Для систем с последействием он развивался в работах [9-12]. В настоящей заметке предлагается алгоритм динамического восстановления входа в системе с запаздыванием отличный от [9-12]. В основе этого алгоритма лежат конструкции работ [2, 3].

Алгоритм решения.

Решение задачи будем искать в классе конечношаговых динамических алгоритмов, то есть таких алгоритмов, которые используют информацию лишь в узлах конечного разбиения, обрабатывая ее между узлами.В качестве метода решения выберем известный в теории некорректных задач метод невязки, точнее его динамическую модификацию, предложенную в [3]. Коротко суть метода невязки состоит в следующем [13]: на основании имеющейся неточной информации определяется некоторое множество Ω, заведомо содержащее искомый элемент. Затем в этом множестве по некоторому правилу указывается другой элемент, служащий приближением искомого (обычно этот элемент ищется как точка экстремума подходящего функционала).

Пусть $x_*(\cdot)$ — истинное движение системы (далее считаем его фиксированным). Символом $u_*(\cdot)$ обозначим минимальный по норме пространства $L_2(T;U)$ элемент множества $U(x_*(\cdot))$. Для простоты в дальнейшем считаем, что движение $x_*(\cdot)$, а также величины ξ_i^h содержатся в заранее известном компакте $E\subset R^n$. Пусть для каждого $h\in(0,1]$ выбрано равномерное разбиение отрезка T

$$\Delta_h=\{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h},\quad t_0=\tau_{h,0}<\tau_{h,1}<\ldots<\tau_{h,m_h}=\vartheta,\quad \tau_{h,i}=\tau_{h,i-1}+\delta(h),$$

обладающее свойством

$$h/\delta(h)\to 0,\quad \delta(h)\to 0 \quad \text{при} \quad h\to 0.$$

В дальнейшем довольно часто будем опускать индекс h и писать вместо $\delta(h)$ просто δ, а вместо $\tau_{h,i}$ — τ_i. Будем также считать $\delta\in(0,1)$, $h\in(0,1)$.

Введем константы $c_0>0$, $c_u>0$, $c_*>0$ такие, что

$$|f_1(t,x,y_1,\ldots,y_k)+f_2(t,x,y_1,\ldots,y_k)u|\le c_0\ \ \forall t\in T,$$
$$x,y_i\in E,\quad i=1,2,\ldots,k,\quad u\in P;$$
$$|u|\le c_u\quad \forall u\in P;$$
$$|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|\le c_0|t_1-t_2|\quad \forall t\in[0,\alpha];$$
$$|x_*(\tau_i)|\le c_*,\qquad |\xi_h(\tau_i)|\le c_*,\ \forall i\in[0:m_h],\quad h\in(0,1). \tag{3}$$

Перейдем к описанию алгоритма. Сопоставим системе (1) вспомогательную управляемую дискретную систему. Будем (следуя [2]) называть эту систему моделью. Пусть символ $m_h(j)$ означает целую часть числа $\alpha_j/\delta(h)$. Тогда для некоторого $\vartheta_{m_h(j)} \in [0,\delta(h))$ справедливо равенство $\alpha_j = m_h(j)\,\delta(h) + \vartheta_{m_h(j)}$. Состояние модели в каждый момент $\tau_{h,i}$ разбиения Δ_h будем характеризовать вектором

$$\begin{gathered}z_h(\tau_{h,i+1}) = z_h(\tau_{h,i}) + \\ +[f_1(\tau_{h,i-1},\xi_h(\tau_{h,i-1}),\xi_h(\tau_{h,i-1}-\alpha_1),\dots,\xi_h(\tau_{h,i-1}-\alpha_k)) + \\ + f_2(\tau_{h,i-1},\xi_h(\tau_{h,i-1}),\xi_h(\tau_{h,i-1}-\alpha_1),\dots,\xi_h(\tau_{h,i-1}-\alpha_k))v_h(\tau_{h,i})]\delta,\end{gathered} \tag{4}$$

$$z_h(\tau_{h,1}) = \varphi(0), \tag{5}$$

где

$$\xi_h(\tau_{h,i}-\alpha_j) = \xi_h(\tau_{h,i-m_h^0(j)}),$$

$$m_h^0(j) = \begin{cases} m_h(j), & \vartheta_{m_h(j)} = 0, \\ m_h(j)+1, & \vartheta_{m_h(j)} \neq 0. \end{cases}$$

Управление моделью выбирем из принципа экстремального сдвига [14], обеспечивающего "близость" движений модели (4) и системы (1). Этот принцип естественно положить в основу определения аналогов множества Ω для нашей задачи — множеств $\Omega_{h,i}$. Предположим, что в каждый момент $\tau_{h,i}$ $(i \geq 1)$ на основании результатов измерений $\xi_h(\tau_{h,i})$и $\xi_h(\tau_{h,i-1})$ построено замкнутое выпуклое множество $\Omega_{h,i} \subset P$ вида

$$\begin{gathered}\Omega_{h,i} = \Omega_{h,i}(\xi_h(\tau_{h,i}),\xi_h(\tau_{h,i-1})) = \{v \in P:\ z_h(\tau_{h,i}) - \xi_h(\tau_{h,i-1}))' \times \\ \times[f_1(\tau_{h,i-1},\ \xi_h(\tau_{h,i-1}),\xi_h(\tau_{h,i-1}-\alpha_1),\dots,\xi_h(\tau_{h,i-1}-\alpha_k)) + \\ + f_2(\tau_{h,i-1},\xi_h(\tau_{h,i-1}),\xi_h(\tau_{h,i-1}-\alpha_1),\dots,\ \xi_h(\tau_{h,i-1}-\alpha_k))v] - \\ -(z_h(\tau_{h,i}) - \xi_h(\tau_{h,i-1}))'\frac{\xi_h(\tau_{h,i}) - \xi_h(\tau_{h,i-1})}{\delta} \leq \sigma_h^\delta\}.\end{gathered} \tag{6}$$

Здесь штрих означает транспонирование, величина σ_h^δ задается следующим образом

$$\sigma_h^\delta = 4c_*\frac{h}{\delta} + N_1\delta + N_2 h,$$

$$N_1 = (2c_*+1)(2c_0+1)(k+1)(c_1+c_2c_u) + c_0^2,\ N_2 = (2c_*+1)(k+1)(c_1+c_2c_u).$$

В дальнейшем для простоты выкладок полагается, что справедливы оценки

$$|z_h(\tau_i)| \leq c_*.$$

Следуя идеалогии метода невязки [13], укажем закон формирования управления в модели. Будем считать, что — элемент наименьшей нормы множества $\Omega_{h,i}$, то есть

$$v_h(\tau_{h,i}) = \begin{cases} \arg\min\{|u| : u \in \Omega_{h,i}\}, & \text{если } \Omega_{h,i} \neq \varnothing \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{7}$$

Для каждого $h \in (0,1)$ построим функцию $v_h(t), t \in T$ по правилу

$$v_h(t) = v_h(\tau_{h,i}) \quad \text{при} \quad t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1}), \quad i \in [0, m_h - 1]. \tag{8}$$

Теорема 1. Семейство управлений, определенных согласно (4) — (8), обладает следующим свойством

$$|v_h(\cdot) - u_*(\cdot)|_{L_2(T;U)} \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{9}$$

Прежде, чем переходить к доказательству теоремы, приведем вспомогательное утверждение. Введем величину

$$\varepsilon_{j+1} = |z_{j+1} - x_j|^2, \quad x_j = x_*(\tau_j), \quad z_j = z_h(\tau_{h,j}).$$

Лемма 1. Справедливо неравенство

$$\varepsilon_j \le (\vartheta - t_0)\{2\sigma_h^\delta + 4h(c_* + c_0) + 6c_0^2\delta\} \quad \forall j \ge 0.$$

Доказательство. Сначала оценим изменение величины

$$\mu_i \equiv (z(\tau_i) - \xi(\tau_{i-1}))'[f_1(\tau_{i-1}, \xi(\tau_{i-1}), \xi(\tau_{i-1} - \alpha_1), \ldots, \xi(\tau_{i-1} - \alpha_k))\delta +$$
$$+ f_2(\tau_{i-1}, \xi(\tau_{i-1}), \xi(\tau_{i-1} - \alpha_1), \ldots, \xi(\tau_{i-1} - \alpha_k)) \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} u_*(t)dt] -$$
$$- (z(\tau_i) - \xi_i(\tau))' \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} [f_1(t, x_*(t), x_*(t - \alpha_1), \ldots, x_*(t - \alpha_k)) +$$
$$+ f_2(t, x_*(t), x_*(t - \alpha_1), \ldots, x_*(t - \alpha_k))u_*(t)]dt.$$

Имеем

$$\mu_i = \mu_i^{(1)} + \mu_i^{(2)}, \tag{10}$$

где

$$\mu_i^{(1)} = (z(\tau_i) - \xi(\tau_{i-1}))' \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \{[f_1(\tau_{i-1}, \xi(\tau_{i-1}), \xi(\tau_{i-1} - \alpha_1), \ldots, \xi(\tau_{i-1} - \alpha_k)) +$$
$$+ f_2(\tau_{i-1}, \xi(\tau_{i-1}), \xi(\tau_{i-1} - \alpha_1), \ldots, \xi(\tau_{i-1} - \alpha_k))u_*(t)] -$$
$$- [f_1(t, x_*(t), x_*(t - \alpha_1), \ldots, x_*(t - \alpha_k)) +$$
$$+ f_2(t, x_*(t), x_*(t - \alpha_1), \ldots, x_*(t - \alpha_k))u_*(t)]\}dt.$$

$$\mu_i^{(2)} = (\xi(\tau_i) - \xi(\tau_{i-1}))' \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} [f_1(t, x_*(t), x_*(t-\alpha_1), \ldots, x_*(t-\alpha_k)) +$$
$$+ f_2(t, x_*(t), x_*(t-\alpha_1), \ldots, x_*(t-\alpha_k)) u_*(t)] dt.$$

Рассмотрим при $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$ величину

$$|\Delta f| = | f_1(t, x_*(t), x_*(t-\alpha_1), \ldots, x_*(t-\alpha_k)) + \tag{11}$$
$$+ f_2(t, x_*(t), x_*(t-\alpha_1), \ldots, x_*(t-\alpha_k)) u_*(t)] -$$
$$- [f_1(\tau_{i-1}, \xi(\tau_{i-1}), \xi(\tau_{i-1} - \alpha_1), \ldots, \xi(\tau_{i-1} - \alpha_k)) +$$
$$+ f_2(\tau_{i-1}, \xi(\tau_{i-1}), \xi(\tau_{i-1} - \alpha_1), \ldots, \xi(\tau_{i-1} - \alpha_k)) u_*(t)]| \le$$

$$\le | f_1(t, x_*(t), x_*(t-\alpha_1), \ldots, x_*(t-\alpha_k)) -$$
$$- f_1(\tau_{i-1}, \xi(\tau_{i-1}), \xi(\tau_{i-1} - \alpha_1), \ldots, \xi(\tau_{i-1} - \alpha_k))| +$$
$$+ |f_2(t, x_*(t), x_*(t-\alpha_1), \ldots, x_*(t-\alpha_k)) -$$
$$- f_2(\tau_{i-1}, \xi(\tau_{i-1}), \xi(\tau_{i-1} - \alpha_1), \ldots, \xi(\tau_{i-1} - \alpha_k))| c_u.$$

Обозначим первое слагаемое в правой части неравенства (11) символом $|\Delta f_1|$, а второе — символом $|\Delta f_2|$. Имеем

$$|\Delta f_1| \le c_1(|t - \tau_{i-1}| + | x_*(t) - \xi(\tau_{i-1}) | + + | x_*(t-\alpha_1) - \xi(\tau_{i-1} - \alpha_1) | +..$$
$$+ | x_*(t-\alpha_k) - \xi(\tau_{i-1} - \alpha_k) |).$$

Кроме того

$$|t - \tau_{i-1}| \le \delta,$$

$$| x_*(t) - \xi(\tau_{i-1}) | \le | x_*(t) - x_*(\tau_{i-1}) | + | x_*(t) - \xi(\tau_{i-1}) | \le c_0 |t - \tau_{i-1}| + h \le c_0\delta + h$$
$$|x_*(t-\alpha_j) - \xi(\tau_{i-1} - \alpha_j)| \le 2c_0\delta + h.$$

Поэтому

$$| x_*(t) - \xi(\tau_{i-1}) | + | x_*(t-\alpha_1) - \xi(\tau_{i-1} - \alpha_1) | + | x_*(t-\alpha_k) - \xi(\tau_{i-1} - \alpha_k) |)$$
$$\le c_0\delta + h + + k(2c_0\delta + h) \le (k+1)(h + 2c_0\delta).$$

Таким образом

$$|\Delta f_1| \le c_1((k+1)h + (k+1)(2c_0 + 1)\delta).$$

Аналогично имеем

$$|\Delta f_2| \le c_u c_2((k+1)h + (k+1)(2c_0 + 1)\delta).$$

Таким образом

$$|\Delta f| \le K_0\delta + K_1 h, \tag{12}$$

$$K_0 = (c_1 + c_u c_2)(k+1)(2c_0 + 1), \quad K_1 = (c_1 + c_u c_2)(k+1).$$

Учитывая (3), заключаем

$$\left|z(\tau_i)-\xi(\tau_{i-1})\right| \le \left|z(\tau_i)\right| + \left|\xi(\tau_{i-1})-x_*(\tau_{i-1})\right| + \left|x_*(\tau_{i-1})\right| \le 2c_* + h, \qquad (13)$$

$$\left|\xi(\tau_i)-\xi(\tau_{i-1})\right| \le 2h + c_0\delta.$$

Тогда имеем

$$\mu_i^{(2)} = (\xi(\tau_i)-\xi(\tau_{i-1}))' \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} [f_1(t, x_*(t), x_*(t-\alpha_1),\ldots,x_*(t-\alpha_k)) +$$

$$+ f_2(t, x_*(t), x_*(t-\alpha_1),\ldots,x_*(t-\alpha_k))u_*(t)]dt \le$$

$$\le \left|\xi(\tau_i)-\xi(\tau_{i-1})\right| \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} c_0 dt \le c_0\delta(2h + c_0\delta).$$

Из (10), (12), (13) также выводим

$$\mu_i^{(1)} \le (2c_* + h)(K_0\delta + K_1 h)\delta.$$

Таким образом, в силу предположения $\delta \in (0,1)$, $h \in (0,1)$ имеем

$$\mu_i \le 2c_* K_0\delta^2 + 2c_* K_1\delta h + K_0\delta^2 h + K_1 h^2\delta + 2c_0\delta h + c_0^2\delta^2 \le \qquad (14)$$

$$\le \left[(2c_* K_0 + c_0^2 + K_0)\delta + (2c_* K_1 + K_1 + 2c_0)h\right]\delta$$

Учитывая неравенство

$$\left|(\xi_h(\tau_{h,i}) - \xi_h(\tau_{h,i-1})) - \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} [f_1(t, x_*(t), x_*(t-\alpha_1),\ldots,x_*(t-\alpha_k)) +\right.$$

$$\left. + f_2(t, x_*(t), x_*(t-\alpha_1),\ldots,x_*(t-\alpha_k))u_*(t)]dt\right| \le 2h$$

из (14) приходим к условию

$$\frac{1}{\delta}\int_{\tau_{h,i-1}}^{\tau_{h,i}} u_*(t)dt \in \Omega_{h,i}, \qquad (15)$$

где множество $\Omega_{h,i}$ задается формулой (6).

Далее в силу включений $x_*(t) \in E$, $\xi_i^h \in E$, имеем

$$\varepsilon_{j+1} \le \varepsilon_j + 2\,(z_j - x_{j-1})\,[f_1(\tau_{j-1}, \xi(\tau_{j-1}), \xi(\tau_{j-1}-\alpha_1),\ldots,\xi(\tau_{j-1}-\alpha_k)) +$$

$$+ f_2(\tau_{j-1}, \xi(\tau_{j-1}), \xi(\tau_{j-1}-\alpha_1),\ldots,\xi(\tau_{j-1}-\alpha_k))v_h(\tau_j)]\delta +$$

$$+ 2(z_j - x_{j-1})(x_j - x_{j-1}) + 4(c_0\delta)^2.$$

Учитывая неравенства (2), (3) выводим

$$\varepsilon_{j+1} \le \varepsilon_j + 2\,(z_j - \xi_{j-1})\,[f_1(\tau_{j-1}, \xi(\tau_{j-1}), \xi(\tau_{j-1}-\alpha_1),\ldots,\xi(\tau_{j-1}-\alpha_k)) +$$

$$+ f_2(\tau_{j-1}, \xi(\tau_{j-1}), \xi(\tau_{j-1}-\alpha_1),\ldots,\xi(\tau_{j-1}-\alpha_k))v_h(\tau_j)]\delta + 2hc_0\delta +$$

$$+ 2(z_j - x_j)(x_j - x_{j-1}) + 4(c_0\delta)^2 + 2\left|x_j - x_{j-1}\right|^2.$$

Следовательно

$$\varepsilon_{j+1} \le \varepsilon_j + 2\,(z_j - \xi_{j-1})\,[f_1(\tau_{j-1},\xi(\tau_{j-1}),\xi(\tau_{j-1}-\alpha_1),\dots,\xi(\tau_{j-1}-\alpha_k)) +$$
$$+ f_2(\tau_{j-1},\xi(\tau_{j-1}),\xi(\tau_{j-1}-\alpha_1),\dots,\xi(\tau_{j-1}-\alpha_k))v_h(\tau_j)]\delta +$$
$$+ 2(z_j - \xi_j)(x_j - x_{j+1}) + 6(c_0\delta)^2 + 4hc_0\delta.$$

Кроме того, ввиду (3)

$$\left|(z_j - \xi_j)(x_j - x_{j-1}) - (z_j - \xi_j)(\xi_j - \xi_{j-1})\right| \le 2h\left|z_j - \xi_j\right| \le 4hc_*.$$

Значит (см. (6))

$$\varepsilon_{j+1} \le \varepsilon_j + 2\,\sigma_h^{\delta}\delta + 4h(c_* + c_0)\delta + 6(c_0\delta)^2. \qquad (16)$$

Таким образом, в силу (16) имеем

$$\varepsilon_j \le \varepsilon_0 + (\vartheta - t_0)\{2\,\sigma_h^{\delta} + 4h(c_* + c_0) + 6c_0^2\delta\}.$$

Однако, $\varepsilon_0 = 0$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. При доказательстве теоремы достаточно показать: для произвольной числовой последовательности $\{h_l\} \in (0,1)$ такой, что $h_l \to 0$ при $l \to \infty$, справедлива сходимость

$$v_l(\cdot) = v_{h_l}(\cdot) \to u_*(\cdot) \quad \text{в } L_2 = L_2(0,T;R^p) \quad \text{при } l \to \infty.$$

Пусть такая последовательность $\{h_l\}$ фиксирована. В силу слабой компактности в L_2 последовательности $\{v_l(\cdot)\}$, не нарушая общности, можно считать

$$v_l(\cdot) \to v(\cdot) \text{ слабо в } L_2 \quad \text{при } l \to \infty. \qquad (17)$$

Покажем, что $v(\cdot) \in U(x_*(\cdot))$.

Введем вспомогательную функцию $Z(t,\xi(\cdot),v(\cdot)) : T \to R^n$ по правилу

$$Z(t,\xi(\cdot),v(\cdot)) = \varphi(0) + \int_{t_0}^{t} [\,f_1(\tau,\xi(\tau),\xi(\tau-\alpha_1),\dots,\xi(\tau-\alpha_k)) + \qquad (18)$$
$$+ f_2(\tau,\xi(\tau),\xi(\tau-\alpha_1),\dots,\xi(\tau-\alpha_k))v(\tau)]d\tau, \quad \xi(\tau) = \xi(\tau_i), \quad \tau \in [\tau_i,\tau_{i+1}).$$

Из интегрального представления решения следует равенство

$$x_*(t) = \varphi(0) + \int_{t_0}^{t} [\,f_1(\tau,x_*(\tau),x_*(\tau-\alpha_1),\dots,x_*(\tau-\alpha_k)) + \qquad (19)$$
$$+ f_2(\tau,x_*(\tau),x_*(\tau-\alpha_1),\dots,x_*(\tau-\alpha_k))u_*(\tau)]d\tau.$$

Подсчитывая интеграл в (18) для $\xi(\cdot) = \xi_l(\cdot)$, $v(\cdot) = v_l(\cdot)$ приближенно по формуле прямоугольников, получим рекуррентную формулу, эквивалентную (3), то есть кусочно-постоянная функция $z_h(t)$ является приближением $Z(t,\xi_l(\cdot),v_l(\cdot))$. Здесь $\xi_l(t) = \xi_i^{h_l}$, $t \in [\tau_{h_l,i},\tau_{h_l,i+1})$, $i \in [0:m_{h_l}]$. В данном случае погрешность формулы прямоугольников имеет порядок δ и можно выписать неравенства

$$|\,Z(t,\xi_l(\cdot),v_l(\cdot)) - z_h(t)\,| \le C\delta, \qquad (C = const > 0), \qquad (20)$$

$$| Z(t,\xi_l(\cdot),v_l(\cdot)) - x_*(t) | \le | Z(t,\xi_l(\cdot),v_l(\cdot)) - z_h(t) | + \tag{21}$$

$$+ | z_h(t) - x_*(t) | \le C\delta + | z_h(t) - x_*(t) |, \quad t \in T.$$

Отсюда и из леммы 1 следует сходимость

$$\lim_{l \to \infty} Z(t,\xi_l(\cdot),v_l(\cdot)) = x_*(t) \quad \forall t \in T.$$

Оценим разность

$$\lambda_l(t) = \left| Z(t,\xi_l(\cdot),v_l(\cdot)) - Z(t,x_*(\cdot),v(\cdot)) \right|, \quad t \in T.$$

Имеем

$$\lambda_l(t) = \Big| \int_{t_0}^{t} [\, f_1(\tau,\xi_l(\tau),\xi_l(\tau-\alpha_1),\ldots,\xi_l(\tau-\alpha_k)) -$$

$$- f_1(\tau,x_*(\tau),x_*(\tau-\alpha_1),\ldots,x_*(\tau-\alpha_k))] d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} [\, f_2(\tau,\xi_l(\tau),\xi_l(\tau-\alpha_1),\ldots,\xi_l(\tau-\alpha_k)) v_l(\tau) -$$

$$- f_2(\tau,x_*(\tau),x_*(\tau-\alpha_1),\ldots,x_*(\tau-\alpha_k)) v(\tau)] d\tau \Big|.$$

Прибавим и вычтем во втором слагаемом под знаком интеграла величину

$$f_2(\tau,x_*(\tau),x_*(\tau-\alpha_1),\ldots,x_*(\tau-\alpha_k)) v_l(\tau).$$

Учитывая условие Липшица для функций f_1, f_2, а также включение $v_l(\tau) \in P, \tau \in T$ получим неравенство

$$\lambda_l(t) \le A | h + \delta + \int_{t_0}^{t} f_2(\tau,x_*(\tau),x_*(\tau-\alpha_1),\ldots,x_*(\tau-\alpha_k))[v_l(\tau) - v(\tau)] d\tau |,$$

$$A = const \in (0,\infty).$$

Так как $v_l(\cdot) \to v(\cdot)$ слабо в L_2 при $l \to \infty$, то

$$\lim_{l \to \infty} \lambda_l(t) = 0 \quad \forall t \in T.$$

Таким образом получаем,

$$x_*(t) = Z(t,x_*(\cdot),v(\cdot)) = \varphi(0) + \int_{t_0}^{t} [\, f_1(\tau,x_*(\tau),x_*(\tau-\alpha_1),\ldots,x_*(\tau-\alpha_k)) +$$

$$+ f_2(\tau,x_*(\tau),x_*(\tau-\alpha_1),\ldots,x_*(\tau-\alpha_k)) v(\tau)] d\tau \quad \forall t \in T.$$

Последнее равенство означает, что управление $v(\cdot)$ порождает движение $x_*(\cdot)$, то есть

$$v(\cdot) \in U(x_*(\cdot)).$$

Далее, из этого включения, определения управления $u_*(\cdot)$ как нормального элемента множества $U(x_*(\cdot))$ и известного свойства слабой сходимости вытекают неравенства

$$\underline{\lim}_{l\to\infty}\|v_l(\cdot)\|_{L_2} \geq \|v(\cdot)\|_{L_2} \geq \|u_*(\cdot)\|_{L_2}. \qquad (22)$$

Учитывая включения $v_h(\tau_{h,i}) \in \Omega_{h,i}$, а также (15), получаем

$$|v_l(\tau_i)| \leq \left|\frac{1}{\delta}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} u_*(t)dt\right|.$$

Пользуясь неравенством Коши – Буняковского, можно записать

$$\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |v_l(t)|^2 dt = \delta|v_l(\tau_i)|^2 \leq \delta\left|\frac{1}{\delta}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} u_*(t)dt\right|^2 =$$

$$= \delta\left|\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \frac{1}{\delta}u_*(t)dt\right|^2 \leq \delta\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 dt \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}|u_*(t)|^2 dt = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}|u_*(t)|^2 dt.$$

Суммируя полученные неравенства по j, будем иметь

$$\|v_l(\cdot)\|_{L_2} \leq \|u_*(\cdot)\|_{L_2} \quad \forall l. \qquad (23)$$

Отсюда выводим

$$\overline{\lim_{l\to\infty}}\|v_l(\cdot)\|_{L_2} \leq \|u_*(\cdot)\|_{L_2}.$$

Из данного неравенства, (22), определения верхнего и нижнего пределов последовательности следует

$$\|u_*(\cdot)\|_{L_2} \leq \|v(\cdot)\|_{L_2} \leq \underline{\lim}_{l\to\infty}\|v_l(\cdot)\|_{L_2} \leq \overline{\lim_{l\to\infty}}\|v_l(\cdot)\|_{L_2} \leq \|u_*(\cdot)\|_{L_2},$$

то есть

$$\lim_{l\to\infty}\|v_l(\cdot)\|_{L_2} = \|v(\cdot)\|_{L_2} = \|u_*(\cdot)\|_{L_2}. \qquad (24)$$

Так как элемент минимальной нормы в $U(x_*(\cdot))$ единственен, то в силу (24)

$$u_*(\cdot) = v(\cdot). \qquad (25)$$

Поэтому (см. (17))

$$v_l(\cdot) \to u_*(\cdot) \qquad \text{слабо в } L_2.$$

Из (24), (25) следует сходимость $v_l(\cdot)$ к $u_*(\cdot)$ в метрике пространства L_2. Теорема доказана.

Оценка скорости сходимости алгоритма.

В предыдущем разделе была установлена сходимость последовательности $\{v_h(\cdot)\}$ вида (7), (8) к управлению $u_*(\cdot)$. При некоторых дополнительных условиях можно установить оценки скорости сходимости алгоритма. Введем эти условия.

Условия 1.

a) Размерность управления $u(\cdot)$ не превосходит размерности фазового вектора $x(\cdot)$, то есть $p \le n$.

b) Существуют число $d>0$ и p-мерный минор матрицы

$$F_*(\tau) = f_2(\tau, x_*(\tau), x_*(\tau-\alpha_1), \ldots, x_*(\tau-\alpha_k)), \quad \tau \in T$$

такие, что $p \times p$ −мерная матрица $\overline{F}_*(\tau)$, отвечающая этому минору, удовлетворяет неравенству

$$\inf_{\tau \in T} \left|\overline{F}_*(\tau) v\right| \ge d|v| \quad \forall v \in R^p.$$

c) Функция $u_*(\cdot)$ есть функция ограниченной вариации.

Имеет место

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1. Тогда имеет место следующая оценка скорости сходимости алгоритма

$$\|v_h(\cdot) - u_*(\cdot)\|^2_{L_2} \le d_*(\delta + h/\delta). \tag{26}$$

Здесь постоянная d_* может быть выписана явно.

Доказательство теоремы 2. Аналогично (21) из (16), (18)—(20) выводится неравенство

$$\left|\int_{t_0}^{t} [\, f_2(\tau, \xi_h(\tau), \xi_h(\tau-\alpha_1), \ldots, \xi_h(\tau-\alpha_k)) v_h(\tau) - \right.$$

$$\left. - f_2(\tau, \xi_h(\tau), \xi_h(\tau-\alpha_1), \ldots, \xi_h(\tau-\alpha_k)) u_*(\tau)] d\tau \right| \le d_1(\delta + h/\delta), \quad t \in T.$$

Здесь $\xi_h(\tau) = \xi_h(\tau_i)$ при $\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1})$. Отсюда и из (2) получаем

$$\sup_{t \in T} \left| \int_{t_0}^{t} f_2(\tau, x_*(\tau), x_*(\tau-\alpha_1), \ldots, x_*(\tau-\alpha_k))[v_h(\tau) - u_*(\tau)] d\tau \right| \le \tag{27}$$

$$\le d_2(\delta + h/\delta).$$

В силу условия 1 из (27) выводим

$$d\left|\int_{t_0}^{t} [v_h(\tau) - u_*(\tau)] d\tau\right| \le \left|\int_{t_0}^{t} \overline{F}_*(\tau)[v_h(\tau) - u_*(\tau)] d\tau\right| \le d_2(\delta + h/\delta) \; \forall t \in T,$$

то есть

$$\sup_{t \in T} \left|\int_{t_0}^{t} [v_h(\tau) - u_*(\tau)] d\tau\right| \le d_3(\delta + h/\delta). \tag{28}$$

Аналогично (23) устанавливаем оценку

$$\|v_h(\cdot)\|_{L_2} \le \|u_*(\cdot)\|_{L_2} \quad \forall h \in (0,1). \tag{29}$$

Далее в силу (29) имеем

$$\|v_h(\cdot)-u_*(\cdot)\|_{L_2}^2 = \|v_h(\cdot)\|_{L_2}^2 - 2\int_{t_0}^{\vartheta} v_h'(\tau)u_*(\tau)d\tau + \|u_*(\cdot)\|_{L_2}^2 \le \tag{30}$$

$$\le 2\int_{t_0}^{\vartheta} (u_*(\tau)-v_h(\tau))' u_*(\tau)d\tau.$$

Из (28), (30) в силу леммы 1 [15] получаем (26). Теорема доказана.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке INTAS (проект 96-0816) и РФФИ (грант 0001-00222).

Литература

1. Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. *О моделировании управления в динамической системе*// Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1983, 2, с.51–60.

2. Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S. Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Gordon and Breach, London, 1995.

3. Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. *О методах позиционного моделирования управления в динамических системах*// В сб.: Качественные вопросы теории дифференциальных уравнений и управляемых систем, Свердловск, 1988, с.34–44.

4. Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. *Устойчивое решение обратных задач динамики управляемых систем*// Оптимальное управление и дифференциальные игры. Труды Математич. института им. В.А.Стеклова. 1988. Т. 85, с.126–146.

5. Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. *Обратные задачи динамики и управляемые модели*// В кн.: Механика и научно-технический прогресс. Т. 1. Общая и прикладная механика. М.: Наука. 1987. с. 196–211.

6. Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И. Задачи динамической регуляризации для систем с распределенными параметрами. ИММ УрО АН СССР. Препринт. 1991.

7. Максимов В.И. *Об устойчивом решении обратных задач для нелинейных распределенных систем.* I// Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26, 12, с. 2059–2067, II. Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, 4, с. 597–603.

8. Ким А.В., Короткий А.И., Осипов Ю.С. *Обратные задачи динамики для параболических систем*// Прикл. математ. и мех. 1990. Т. 54, 5, с. 754–759.

9. Максимов В.И. *О моделировании некоторых параметров в системах с последействием с помощью позиционно-управляемых систем* // В кн.: III Конференция по дифференциальным уравнениям и примененииям. Резюме докладов и сообщений, Руссе, 1985, с. 74.

10. Максимов В.И. *Позиционное моделирование некоторых параметров дифференциально-функциональных систем* // В кн.: Некоторые методы позиционного и программного управления, Свердловск, 1987, с. 84–106.

11. Maksimov V.I. Problems of robust control and dynamical input reconsruction for time-delay systems. Proc. of 5th European Control Conference, Karlsruhe, Germany, 1999.

12. Близорукова М.С., Максимов В.И. *О реконструкции пары "управление–траектория" в системе с последействием* // Проблемы управления и информатики. 1999. 4, с. 37–48.

13. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука. 1981.

14. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука. 1974.

15. Вдовин А.Ю. *Оценки погрешности в задаче динамического восстановления управления* // В сб.: Задачи позиционного моделирования. Свердловск, 1986, с. 3–11.