Богданов А. В.

Об устойчивости эффективных исходов в повторяющихся играх.

1. Введение.

Одна из центральных проблем теории игр – это проблема обеспечения устойчивости для эффективных решений игры. Известный пример, который иллюстрирует эту проблему, – игра "дилемма заключенного" (см. [1] и др.).

"Дилеммой заключенного" называется симметричная игра двух лиц, где у каждого из игроков есть две стратегии поведения: кооперативная (*К*) и эгоистичная (Э). В качестве примера приведем следующую матрицу выигрышей:

	К	Э
К	(5, 5)	(1, 6)
Э	(6, 1)	(2, 2)

В общем случае предполагается, что при любом поведении партнера выгоднее эгоистичная стратегия ($u_{ээ} > u_{кэ}$, $u_{эк} > u_{кк}$), и в то же время суммарный выигрыш максимален, когда оба действуют кооперативно ($u_{кк} > (u_{эк} + u_{кэ})/2$, $u_{кк} > u_{ээ}$). В данной игре существует единственная точка равновесия Нэша $(Э,Э)$, которая является решением по доминированию.

Таким образом, единственный парето-оптимальный индивидуально-рациональный исход, когда оба игрока ведут себя кооперативно, является неустойчивым. В то же время единственный устойчивый исход является неэффективным в том смысле, что он не парето-оптимален.

Данное противоречие удается разрешить для некоторых типов конфликтных ситуаций. Один из таких типов – это повторяющиеся конфликтные ситуации. Соответствующие результаты в теории игр получили название *"народных теорем" (Folk theorems)*, поскольку они были получены в результате усилий большого числа разных авторов. Общее содержание "народных теорем" состоит в том, что всякий индивидуально-рациональный исход первоначальной, или однократной, игры может быть реализован как устойчивый исход для повторяющейся игры. Существуют варианты "народной теоремы", относящиеся к бесконечным играм (с бесконечным числом повторений), с дисконтированием и без, а также к конечным играм. Причем рассматриваются разные понятия устойчивости, такие, как равновесие по Нэшу, совершенное подыгровое равновесие и наиболее сильное понятие – решение по доминированию. В первой версии (см. работу [2]) рассматривалась сверхигра, в которой значением выигрыша каждого игрока был нижний предел его среднего выигрыша за T повторений при $T \to \infty$. Было показано, что каждому достижимому и индивидуально рациональному исходу однократной игры соответствует равновесие Нэша в этой сверхигре. При достаточно общих предположениях об исходной игре $Г$ этот результат обобщается для дисконтированных сверхигр: каждый такой исход игры $Г$ может быть аппроксимирован равновесными исходами дисконтированных сверхигр при стремлении коэффициента дисконтирования к 1 (см. работы [3] и [4]). Фьюденберг и Маскин в [5] доказали аналогичное утверждение для совершенных подыгровых равновесий дисконтированных сверхигр. Для игр, где существует более чем одно равновесие Нэша, Бенуа и Кришна в работе [6] показали, что множество исходов совершенных подыгровых равновесий для T -кратного повторения исходной игры Γ стремится (в метрике Хаусдорфа) к тому же множеству при стремлении T к бесконечности. Последний вариант народной теоремы был получен в работах [7] , [8] и относится к решению по доминированию.

В общем случае конструкция устойчивого набора стратегий, который соответствует данному исходу, достаточно сложна, однако, в частном случае, который мы в дальнейшем обсуждаем, она имеет вполне наглядную интерпретацию.

Пусть в исходной игре желательный эффективный исход строго доминирует некоторый исход, отвечающий равновесию по Нэшу. Тогда можно предложить следующую конструкцию решения игры. В качестве примера рассмотрим повторяющуюся "дилемму заключенного". Соответствующие стратегии описываются довольно просто: каждый игрок должен использовать кооперативный вариант поведения до тех пор, пока его партнер также следует этому выбору. Как только один из игроков отклоняется, со следующего повторения каждый участник реализует эгоистичный вариант до конца игры. Соответствующая пара стратегий обеспечивает устойчивость кооперативного исхода для бесконечной повторяющейся игры в случае без дисконтирования или при коэффициенте дисконтирования, достаточно близком к единице. Для игры с конечным временем устойчивость обеспечивается, если ввести дополнительно возмущение в функцию выигрыша следующим образом. Согласно указанным стратегиям, каждый игрок после первого же отклонения должен постоянно использовать второй эгоистичный вариант поведения независимо от поведения партнера. Игрок, который последним к моменту окончания игры отклонился от этого правила, называется *"последним нарушителем"*. Возмущение его функции выигрыша состоит в том, что последний нарушитель наказывается штрафом. Нетрудно видеть, что за счет штрафа порядка выигрыша в одном повторении можно обеспечить превращение кооперативного исхода в исход, соответствующий решению по доминированию для повторяющейся игры (см. подробнее [8]).

Возмущения функции выигрыша повторяющейся игры обычно интерпретируются как штрафы или премии, выплачиваемые игрокам каким-то внешним координатором. Еще одна возможная интерпретация, особенно предпочтительная в случае, когда игроки сами стремятся обеспечивать устойчивость соглашения, это рассматривать финальные платежи как залоги, которые вносятся игроками до начала, а потом либо возвращаются им, если они соблюдали заключенное соглашение, либо же не возвращаются. При этом представляется разумной постановка вопроса о том, как обеспечить устой-чивость заключенного соглашения о реализации эффективного исхода при минимальной величине вносимых залогов.

Отметим, что указанная конструкция требует изменения в случае, когда желаемый исход, устраивающий всех игроков, не может быть реализован в одном повторении, а является результатом чередования различных ситуаций, выгодных разным участникам игры. Рассмотрим следующие примеры.

<u>Пример 1.</u> Рассматривается биматричная игра, похожая на "дилемму заключенного", с матрицами выигрышей

$$\begin{pmatrix} 5;5 & 2;9 \\ 9;2 & 3;3 \end{pmatrix}.$$

Отличие ее в том, что симметричный парето-оптимальный исход (5.5; 5.5) не реализуется в чистых стратегиях исходной игры, а получается в результате чередования исходов (9; 2) и (2; 9). В данном случае обобщение конструкции устойчивого решения очевидно: игроки должны чередовать указанные исходы, а в случае отклонения переходить на реализацию равновесия (3, 3).

Пример 2. Рассматривается похожая, но несимметричная игра с матрицами выигрышей

$$\begin{pmatrix} 5;5 & 1;11 \\ 15;-3 & 3;3 \end{pmatrix}.$$

Симметричный парето-оптимальный исход (6; 6) получается как выпуклая комбинация исходов (15; -3) и (1; 11) с весами 5/14 и 9/14 соответственно.
Уже в этом примере не вполне очевидно, как реализовать желательный исход таким образом, чтобы необходимый размер залога был минимальным. Проблема становится существенно сложнее, если число игроков больше двух.

Пример 3. Пусть три игрока (страны, региона, компании) способны совместно реализовать одну из трех альтернативных исследовательских программ в каждый период. Причем игрок с номером a заинтересован главным образом в реализации программы с таким же номером. Каждый из игроков распоряжается специфическим ресурсом, необходимым для осуществления любой из программ. Каждая программа может быть реализована лишь в том случае, если все игроки направят ресурсы на ее осуществление. Формально эти условия выражаются следующим образом: пусть φ_j^a – выигрыш (ожидаемая прибыль) игрока a от реализации программы j. Тогда для любого a и любого $j \neq a$ справедливо следующее неравенство: $\varphi_a^a > 0 > \varphi_j^a$. Кроме того, каждый игрок может направить свой ресурс на иные цели, не связанные с совместными программами. При этом он получает некоторый выигрыш, который назовем резервным и положим равным нулю.

Опишем игру в нормальной форме, соответствующую этому взаимодействию. Множество стратегий каждого игрока a $S^a = \{0,1,2,3\}$, где при $j = 1,2,3$ стратегия $s^a = j$ означает использование ресурса для реализации программы j, а стратегия $s^a = 0$ означает некооперативное использование ресурса. Функция выигрыша $U^a(s) = \varphi_j^a$, если $s^b = j, b = 1,2,3$; $U^a(s) = 0$, если $s^a = 0$; $U^a(s) < 0$, если для некоторого $j \in \{1,2,3\}$ и $b \neq a$ $s^a = j \neq s^b$.

Допустим, что граница Парето множества возможных исходов представляет собой выпуклую оболочку векторов $\varphi^a, \alpha = 1,2,3$. Эффективное устойчивое соглашение возможно на основе выбора исхода $w^* = \lambda_1\varphi^1 + \lambda_2\varphi^2 + \lambda_3\varphi^3 > 0$ из этого множества, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \lambda_i \geq 0$. Если игроки планируют сотрудничать в течение T периодов и договорились о желательном исходе w^*, то возникает задача его устойчивой реализации.

Одна из возможностей связана с добавочными платежами (трансфертами), которые игрок a выплачивает партнерам, если в данный период реализовался исход φ^a. Однако, трансферты связаны с издержками, которые могут быть особенно велики, если прибыль от реализации программ поступает с задержкой и партнеры не имеют свободных денежных средств. Поэтому далее мы рассматриваем задачу устойчивой реализации w^* с помощью залоговых платежей, стремясь минимизировать величину залога.

2. Общая постановка задачи.

Пусть исходная игра Γ задана множеством игроков $A = \{1,\dots,n\}$, множествами стратегий S^a и функциями выигрыша $u^a(s)$, определенными на $S = \underset{a}{\otimes} S^a$ при $a \in A$. Повторяющаяся игра Γ_T представляет собой последовательность T повторений данной игры Γ в моменты $t = 0,1,\dots,T-1$. Чтобы избежать путаницы между стратегиями в исходной и повторяющейся играх, первые далее будем называть альтернативами. На каждом шаге t каждый игрок знает альтернативы, выбранные всеми участниками на предыдущих шагах, то есть мы рассматриваем повторяющуюся игру с полной информацией.

Обозначим через $s(t) \in S$ набор альтернатив на шаге t, через $h^t = (s(0),\dots,s(t-1))$ – предысторию к данному шагу, через $(S)^t$ – t-кратное произведение S, через $H = \bigcup_{t=0}^{T-1} (S)^t$ – множество всех предысторий ($(S)^0 \overset{def}{=} \{0\}$). Стратегией игрока a является отображение $\mu^a : H \to S^a$, определяющее выбор альтернативы для каждого шага t в зависимости от предыстории h^t. Набор стратегий $\mu = (\mu^a, a \in A)$ определяет ход повторяющейся игры $h(\mu) = \{s(t,\mu)\}_{t=0}^{T}$, где $s(0,\mu) = \mu(0)$, $s(t,\mu) = \mu(s(0,\mu),\dots,s(t-1,\mu))$, $t = 1,\dots,T$.

Игра Γ_T – это T-кратное повторение игры Γ с функциями выигрыша, определенными средним значением выигрыша: $F^a{}_T(\mu) = \sum_{t=0}^{T-1} u^a(s(t,\mu))/T, a \in A$.

Пусть $W = \{u(s), s \in S\}$ – множество векторов выигрышей в исходной игре, CoW – выпуклая оболочка этого множества, и существует равновесие Нэша $\bar{s}$, такое что $\bar{w} = u(\bar{s}) = 0$. Множество CoW называют также множеством достижимых исходов игры. Эти исходы достижимы в том смысле, что игроки могут реализовать их, используя совместные смешанные стратегии. Согласно известной теореме Каратеодори, для каждого вектора w из множества CoW найдется выпуклая комбинация векторов выигрышей исходной игры, которая реализует его в следующем смысле: $w = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i u(s(i))$, где $\lambda_i \geq 0, i = 1,\dots,n+1$, $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Рассмотрим желаемый исход $w^* > \bar{w}$. Допустим, что он является парето-оптимальным. Из теоремы Каратеодори вытекает, что его можно реализовать в виде выпуклой комбинации не более чем n исходов первоначальной игры $u(s(i))$, где $i = 1,\dots,n$, с весами λ_i.

Сформулируем задачу об устойчивой реализации w^* с минимальным возмущением платежных функций. Примем следующее упрощающее предположение. Пусть $\lambda_i = k_i/r$ при $i = 1,\dots,n$ для некоторых натуральных k_i и r. Кроме того, $T = rm$, то есть желательный исход можно реализовать в чистых стратегиях за r повторений и T кратно r. Рассмотрим возмущение платежной функции игры Γ_T, которое обозначим через $\phi(h)$. Обозначим через $\Gamma_T(\phi)$ игру с возмущенной платежной функцией $F(h,\phi) = F_T(h) + \phi(h)$. Рассмотрим множество возмущений, удовлетворяющих следующему соотношению:

$$\begin{cases}\phi^a(h) \ge -D, \forall a \in A \text{ и } \forall h \in H, \\ \sum_a \phi^a(h) \le 0.\end{cases} \quad (1)$$

Это ограничение можно интерпретировать следующим образом: каждый игрок a вносит залог D и игроки оформляют договор о платежах в случае отклонения кого-либо от реализации желательного платежа. Тогда функция $\phi(h)$ определяет выплаты из общей суммы залогов в зависимости от окончательного результата повторяющейся игры. Обозначим через $G(\Gamma_T, D)$ множество игр с функцией выигрыша, удовлетворяющей условию (1). Нас интересует, при какой минимальной величине залога возможна устойчивая реализация исхода w^* в игре $\Gamma_T(\phi)$ с функцией ϕ из указанного множества. Устойчивая реализация w^* означает, что найдется набор стратегий μ^*, такой что: $F_T(h(\mu^*), \phi) = w^*$ и μ^* – решение по доминированию игры $\Gamma_T(\phi)$.

Определим понятие *решения по доминированию*, следуя работе [8]. Стратегия s^a *слабо доминирует* стратегию g^a на множестве $\overline{S} \subseteq S$, если для любого $z \in \overline{S}$ $u^a(z \| s^a) \ge u^a(z \| g^a)$. В отличие от стандартного определения (см. [9]) мы не требуем выполнения строгого неравенства хотя бы для одного $z \in \overline{S}$.

Стратегия s^* – *решение по слабому доминированию*, если оно может быть получено с помощью процедуры последовательного исключения по слабому доминированию, т. е. существует последовательность множеств $S = S_1 \supset S_2 \supset \ldots \supset S_k = \{s^*\}$, такая что для $\forall l = 1, \ldots, k-1, S_l = \bigotimes_a S_l^a$, для любого $g^a \in S_l^a \setminus S_{l+1}^a$ существует $s^a \in S_{l+1}^a$, которое слабо доминирует g^a на S_l.

Формально наша задача состоит в том, чтобы найти минимальное значение D, при котором существует игра $\Gamma_T(\phi) \in G(\Gamma_T, D)$, решение по доминированию которой μ^* реализует желаемый вектор w^*.

3. Верхняя оценка необходимой величины залога.

Рассмотрим произвольную последовательность $\{z(\tau) \in \{s(i), i = 1, \ldots, n\}\}_{\tau=1}^r$ ситуаций исходной игры, реализующую желательный исход w^*. Пусть $q_i(\tau)$ – число реализаций ситуации $s(i)$ в этой последовательности, начиная с номера $r - \tau + 1$ и до номера r. Тогда условие реализации w^* означает, что

$$q_i(r) = k_i, \quad i = 1, \ldots, n. \quad (2)$$

Порядок последовательности $z(\tau)$ однозначно определяется величинами $q_i(\tau)$, если они удовлетворяют также условиям

$$\forall i, \tau \quad q_i(\tau) \in N \cup \{0\}, \quad \sum_{i=1}^n q_i(\tau) = \tau. \quad (3)$$

Пусть $Q = \{\overline{q} = \{q_i(\tau)\}, i = 1, \ldots, n, \tau = 1, \ldots, r\}$ – множество последователь-ностей, удовлетворяющих условиям (2) и (3). Обозначим через $\{z(\overline{q}, \tau)\}_{\tau=1}^r$ соответствующую $\overline{q}$ последовательность ситуаций исходной игры. Каждой такой последовательности можно сопоставить набор стратегий $\mu(\overline{q})$, реализующий исход w^* следующим образом. Игроки повторяют эту последовательность до тех пор, пока кто-то из них от нее не отклонится. В этом случае они переходят на ситуацию $\bar{s}$ и реализуют ее вплоть до конца игры. Для определения возмущения платежных функций рассмотрим последнего нарушителя, т.е. того игрока (с минимальным номером), который последним не поддержал указанное правило поведения. Этому игроку залог не возвращается. Формально положим

$$\mu^a(\bar{q},h^t) = z^a(\bar{q},(t+1)_{\mathrm{mod}\,r}), \text{ если } \forall\tau < t \quad s(\tau) = z(\bar{q},(\tau+1)_{\mathrm{mod}\,r}),$$
$$\text{иначе } \mu^a(\bar{q},h^t) = \bar{s}^a. \tag{4}$$

Для любой траектории h^T определим $\tau(h^t) = \max\{\tau < t \mid s(\tau) \neq \mu(\bar{q},h^\tau)\}$ как последний до t момент отклонения и $a(h^t) = \min\{a \mid s^a(\tau(h^t)) \neq \mu^a(\bar{q},h^{\tau(h^t)})\}$ как последнего нарушителя к моменту t. Штраф за отклонение составляет D для игрока $a(h^T)$ и 0 для любого другого a. Таким образом, возмущенная платежная функция имеет вид

$$\hat{F}^a(\mu) = F^a{}_T(\mu) + \phi^a(h(\mu)), \quad a = 1,\dots,n, \quad \text{где} \quad \phi^{a(h^T)}(h^T) = -D, \quad \phi^a(h^T) = 0 \quad \text{при } a \neq a(h^T). \tag{5}$$

Найдем, при каком значении величины D набор стратегий μ будет решением по доминированию игры с возмущенной функцией выигрыша. Допустим, что до периода t все игроки следуют стратегиям $\mu(\bar{q})$. Для того, чтобы этот набор стратегий был решением по доминированию, а следовательно и ситуацией равновесия Нэша, необходимо, чтобы при отклонении в период t любой игрок a получал не больше, чем если бы он и дальше реализовывал стратегию $\mu^a(\bar{q})$. За счет отклонения в период t игрок может выиграть не более M/T, где

$$M = \max_{s,s' \in S,\, a \in A} \left|u^a(s) - u^a(s')\right|,$$

а в последующие периоды его выигрыш не превышает 0, поскольку остальные игроки придерживаются ситуации равновесия $\bar{s}$. Таким образом, разность средних выигрышей в случае отклонения и без отклонения не превосходит

$$\frac{1}{T}\left[M - \sum_{\tau=t+1}^{T} u^a(z(\bar{q},(\tau+1)_{\mathrm{mod}\,r}))\right] \le \frac{1}{T}\left[M - \min_{\tau=1,\dots,r-1} \sum_{i=1}^{n} q_i(\tau) u^a(s(i))\right],$$

поскольку $\sum_{i=1}^{n} q_i(r) u^a(s(i)) = w^{a*} > 0$. Отсюда получаем следующую оценку для величины залога $D(\bar{q})$, достаточной для устойчивой реализации w^*, если порядок чередования ситуаций $s(i), i = 1,\dots,n$, задан набором $\bar{q}$:

$$D(\bar{q}) \le \frac{1}{T}\left[M - \tau w^{a*} + \tau w^{a*} - \sum_{i=1}^{n} q_i(\tau) u^a(s(i))\right] \le \frac{1}{T}\left[M + \max_{\tau,a} \sum_{i=1}^{n} (\tau\lambda_i - q_i(\tau)) u^a(s(i))\right].$$

Рассмотрим следующее правило выбора последовательности $\bar{q}$. Обозначим $\bar{e}_i$ вектор с координатами $e_{ii} = 1$, $e_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Положим

$$i(\tau) = \arg\max_j (\tau\lambda_j - q_j(\tau-1)), \quad \vec{q}(\tau) = \vec{q}(\tau-1) + \bar{e}_{i(\tau)}. \tag{6}$$

Иначе говоря, в каждом r -цикле в период $r-\tau+1$ реализуется ситуация $s(i)$ для i, которому соответствует максимальное отклонение фактического коэффициента реализации $q_i(\tau-1)$ в последних $\tau-1$ повторениях от "правильного" коэффициента $\tau\lambda_i$.

Тогда величины $\tau\lambda_i - q_i(\tau) \stackrel{def}{=} c_i(\tau), i=1,\dots,n$ обладают следующим свойством: для любых i, τ $c_i(\tau)<1$, $\sum_{i=1}^{n} c_i(\tau)=0$. Положим

$I_+(\tau)=\{i \mid c_i(\tau)\geq 0\}$, $c(\tau)=\sum_{i\in I_+(\tau)} c_i(\tau)$. Тогда для любых τ, a

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(\tau)u^a(s(i)) = \left(\sum_{i\in I_+(\tau)} \frac{c_i(\tau)}{c(\tau)} u^a(s(i)) - \sum_{i\notin I_+(\tau)} \frac{|c_i(\tau)|}{c(\tau)} u^a(s(i))\right) c(\tau) \leq Mc(\tau). \quad \textbf{(7)}$$

Нетрудно проверить, что при данном правиле выбора $i(\tau)$ справедлива оценка $c(\tau)\leq n/2$ для любого τ. Таким образом, справедлива следующая теорема.

<u>Теорема 1.</u> Для указанной игры n лиц всякий парето-оптимальный исход $w^*\geq 0$ можно реализовать как решение по доминированию повторяющейся игры $\Gamma_T(\phi)$, где возмущение ϕ_i платежной функции каждого игрока определяется согласно (5) и не превосходит $M(n/2+1)/T$, а стратегии, образующие решение, определяются согласно (4) и (6).

В случае, когда w^* реализуется точно за T повторений, доказательство дано выше. Покажем, что основное утверждение теоремы остается справедливым и в том случае, когда это не так (например, λ_i–иррациональные или T не кратно r). Следует лишь несколько изменить конструкцию стратегий и возмущения функций выигрыша. Определим последовательность $\bar{q}$ подобно (6), но не с конца (от периода $T-1$), а от начала. Положим при $\tau=0,1,\dots,T-1$

$i(\tau)=\arg\max_j[\tau\lambda_j - q'_j(\tau)]$, где $q'_j(\tau)$ – число реализаций $s(i)$ до периода τ

$\mu^a(h^t)=s^a(i(t))$, если для $\forall\tau<t$ $s(\tau)=s(i(\tau))$, иначе $\mu^a(h^t)=\bar{s}^a$.

Возмущение функции выигрыша зададим согласно (4) и (5) с тем лишь отличием, что в отсутствие отклонений (при $a(h^T)=\phi$) положим

$$\phi^{a*}=\phi^a(h^T)=w^{a*}-\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n} q'_i(T)u^a(s(i)).$$

В случае отклонения в период τ разность выигрышей не превосходит

$$\frac{1}{T}\left[M-\sum_{i=1}^{n}(q'_i(T)-q'_i(\tau))u^a(s(i))\right]-\phi^{a*}=\frac{1}{T}\left[M+\sum_{i=1}^{n} q'_i(\tau)u^a(s(i))\right]-w^{a*}\leq\frac{1}{T}M(1+n/2)$$

согласно оценке (7).

Если же отклонения не происходит, то выплата игрока a остальным игрокам для реализации w^* составляет $-\phi^a(h^T)$, и для нее, очевидно, справедлива та же оценка. Мы доказали, что при указанном возмущении платежных функций отклонение от ситуации μ невыгодно любому игроку и в любой период. Для того, чтобы доказать, что μ является решением по доминированию, осталось проверить, что после любого числа отклонений по-прежнему выгодно следовать этим стратегиям.

Рассмотрим 1-ого игрока и любую стратегию $\mu^{1\prime}$, такую, что $\mu^{1\prime}(h^{T-1}) \neq \mu^1(h^{T-1})$ для некоторой истории h^{T-1}. Покажем, что стратегия $\overline{\mu}^1$, такая что $\overline{\mu}^1(h^t) = \mu^{1\prime}(h^t)$ для $t < T-1$ и $\overline{\mu}^1(h^{T-1}) = \mu^1(h^{T-1})$ для всякого h^{T-1}, слабо доминирует $\mu^{1\prime}$. Рассмотрим произвольный набор стратегий μ', содержащий $\mu^{1\prime}$. Если $h^{T-1}(\mu') = h^{T-1}(\mu)$, то отклонение от $\mu^1(h^{T-1}(\mu'))$ невыгодно, поскольку оно приводит к тому, что 1-ый игрок становится последним отклонившимся, и он должен заплатить штраф D, в то время как от отклонения он получит не более чем M/T. В противном случае предположим, что последнее отклонение имело место до $T-1$. Если $a(\mu', T-1) \neq 1$ или $(\mu^{j\prime}(h^{T-1}(\mu')) \neq \overline{s}^j$ для некоторого $j \neq 1$, тогда, отклоняясь, 1-ый игрок теряет возможность передать статус последнего отклонившегося другому игроку, и приходим к предыдущему случаю. В противном случае отклонение ничего не меняет, поскольку $\overline{s}$ – равновесие Нэша. Рассуждения повторяются по индукции для $a = 2,3,...,n$ при $t = T-2,...,0$.

Теорема доказана.

Возникает вопрос, насколько точной является полученная оценка. Рассмотрим следующий пример. Пусть $w^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u^a(s(i))$. Тогда при любом правиле выбора $i(\tau)$ справедлива оценка для $\tau = n/2$:

$$\sum_{i \in I_+(n/2)} c_i(n/2) \geq n/2 \cdot \frac{1}{n} \cdot n/2 = n/4,$$

которая соответствует последовательному выбору ситуаций $s(i), i = 1,\ldots,n$, в произвольном порядке. Таким образом, для правил реализации, не зависящих от конкретных векторов выигрышей $u(s(i))$, залог не может быть меньше $M(1+n/4)$.

Дадим также нижнюю оценку величины залога для произвольных правил выбора. Пусть $w^* = \sum_{i=1}^{2k} u(s(i))/2k$, то есть w^* является средним арифметическим $2k$ векторов выигрышей в игре Γ, число игроков равно числу сочетаний по k из $2k$: $n = C_{2k}^k = \frac{2k!}{(k!)^2}$. Каждому игроку a взаимооднозначно сопоставим сочетание $I(a) = \{i_1(a),\ldots,i_k(a)\}$ и положим для данного $\varepsilon > 0$

$$u^a(s(i)) = \begin{cases} M/2+\varepsilon, & i \in I(a), \\ -M/2+\varepsilon, & i \notin I(a). \end{cases}$$

Тогда оптимальное правило реализации w^* – по очереди выбирать $s(i), i = 1,\ldots,2k,$ в произвольном порядке. Для любой такой стратегии найдется игрок, который в последних k периодах должен получить $-M/2+\varepsilon$. Значит, размер залога не может быть меньше $kM/2$, поскольку ε может быть сколь угодно мало. В частности, при $k=3$ $n(k)=6$, при $k=4$ $n(k) = 20$ и т. д. Таким образом, нижняя оценка растет вместе с n, хотя и существенно медленнее, чем верхняя.

Литература.

1. Льюс Р., Райфа Х. Игры и решения, М.: ИЛ, 1961.
2. Aumann R.J. (1961) The Core of a Cooperative Game Without Side Payments. //Transactions of American Mathematical Society, Vol.98, P.535-552, 1961.
3. Friedman D. Noncooperative Equilibrium for Supergames. //Review of Economical Studies, Vol.38, P.1-12, 1971.
4. Buhler H. Zur Theorie Dynamisher Nichtcooperative Zwie-Personspile. //C.Oper.Res., A-17, N3, P.143-156, 1973.
5. Fudenberg D., Maskin, E. The Folk Theorem in Repeated Games with Discounting and with Incomplete Information. //Econometrica, Vol.54, P.533-554, 1986.
6. Benoit G-P., Krishna V. (1985) Finitely Repeated Games. //Econometrica, Vol.53, P.905-922, 1985.
7. Васин А.А. Эволюционная модель поведения в сверхигре. //Вестн. Моск. ун-та, сер. 15, Вычисл. матем. и киберн., №3, 1990.
8. Vasin A.A. The Folk theorem for dominance solutions. //Int J Game Theory, Vol.28, P.15-24, 1999.
9. Moulin H. Theorie des jeus pour l'Economie et la Politique. //Hhermann, Paris Collection Methodes, 1981.