С. Е. Бубнов, А. А. Вороненко, Д. В. Чистиков

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ДЛИН ТЕСТОВ ДЛЯ БЕСПОВТОРНЫХ ФУНКЦИЙ В БАЗИСЕ $\{\&, \vee\}$ *

Рассмотрим некоторый функциональный базис B в P_2, содержащий вместе с каждой функцией все ее остаточные подфункции, включая константы. Булеву функцию будем называть *бесповторной* в B, если она может быть выражена формулой над B, в которой каждая переменная встречается не более одного раза (*бесповторной* формулой). Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ существенно зависит от всех своих переменных и является бесповторной в B. Будем называть множество наборов *тестом относительно бесповторной альтернативы* (далее просто *тестом*) для функции f, если значения f на наборах этого множества отличают f от любой другой бесповторной в B функции, зависящей, не обязательно существенным образом, от переменных $x_1,\ldots,x_n$.

Задача тестирования относительно бесповторной альтернативы была поставлена в [1]. В той же работе было доказано, что функция Шеннона длины теста (количества наборов) в базисе всех функций двух переменных имеет квадратичный порядок роста относительно количества n существенных переменных. Впоследствии Л. В. Рябцу [2] удалось понизить верхнюю оценку $4\binom{n}{2}$ до полученной в [1] нижней $\binom{n}{2}+n+1$ и установить таким образом точное значение функции Шеннона. Получению индивидуальных оценок длины тестов функций посвящена работа [3].

Как несложно заметить, при рассмотрении бесповторных функций базис всех функций двух переменных оказывается, с учетом сделанной выше оговорки о подфункциях, эквивалентным базису $\{\&, \vee, \oplus, \neg\}$. Удаление из этого базиса суммы по модулю два дает элементарный базис $\{\&, \vee, \neg\}$. Задача тестирования в элементарном базисе изучалась в работе [4], где были получены линейные верхняя и нижняя оценки функции Шеннона — $3{,}5n$ и $n+1$ соответственно. В работе [5] верхняя оценка была понижена и было установлено, что величина $n+1$ является точным значением функции Шеннона в этом базисе.

В настоящей работе рассматривается базис $\{\&, \vee\}$. Вначале

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 07-01-00444, 09-01-00701, 09-01-00817).

доказывается нижняя оценка $2\sqrt{n}$ длины теста для всех бесповторных в этом базисе функций (результат С. Е. Бубнова, см. также [6]). После этого строится подпоследовательность функций n переменных, выразимых бесповторными КНФ и допускающих тест длины $3\sqrt{n}-1$ (доказательство А. А. Вороненко, см. также [7]). Затем для функций специального вида, в том числе и для КНФ, получаются индивидуальные нижние оценки длин тестов, которые, будучи применены к построенной ранее подпоследовательности, доказывают минимальность соответствующих тестов (результат Д. В. Чистикова).

Перейдем к доказательству первой из анонсированных оценок. Определим для всякой бесповторной в базисе $\{\&,\vee\}$ функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ граф G_f как граф с вершинами — переменными $x_1,\ldots,x_n$ и ребрами между теми и только теми парами (x_i,x_j), для которых в сокращенной ДНФ F функции f есть конъюнкция, содержащая обе эти переменные x_i и x_j. Отметим, что определение G_f совпадает с определением графа $R(f)$ в [8]. Любой бесповторной в $\{\&,\vee\}$ функции f граф G_f сопоставляется взаимно однозначно.

Сокращенная ДНФ F функции f содержит конъюнкции, каждая из которых соответствует *нижней единице* функции f. Пусть на некотором наборе $\tilde{\alpha}$ значение $f(\tilde{\alpha})=1$. Это равносильно тому, что в графе G_f множество вершин, соответствующих переменным со значениями $\alpha_i=1$, содержит вершины некоторой максимальной по включению вершин (далее просто *максимальной*) клики графа G_f. Точно так же равенство $f(\tilde{\alpha})=0$ равносильно тому, что множество вершин, соответствующих переменным со значениями $\alpha_i=0$, содержит максимальное независимое множество в G_f (оно соответствует некоторому *верхнему нулю* f).

В дальнейшем тесты, состоящие только из верхних нулей и нижних единиц тестируемой функции, будем называть *хорошими*.

Лемма 1. *Пусть f — бесповторная в базисе $\{\&,\vee\}$ функция. Тогда из произвольного ее теста t можно получить хороший тест, длина которого не превышает длины t.*

Доказательство. В силу монотонности все отличаемые от f на наборе $\tilde{\alpha}$ функции сохраняют свои значения на более высоких нулях f, если $f(\tilde{\alpha})=0$, или более низких единицах f, если $f(\tilde{\alpha})=1$. Поэтому замена каждого набора в тесте t на, соответственно, верхний ноль или нижнюю единицу сохраняет множество отличаемых функций неизменным. Лемма доказана.

Заметим, что в хорошем тесте каждому набору $\tilde{\alpha}$, на котором функция f принимает значение 1, соответствует в точности одна максимальная клика графа G_f. Никакие переменные, которыми помечены не содержащиеся в этой клике вершины, не равны 1 на этом наборе. Обозначим эту клику $k_{\tilde{\alpha}}$. Аналогично, в хорошем тесте набору $\tilde{\beta}$, на котором функция f равна 0, соответствует ровно одно максимальное независимое множество в G_f. Обозначим это независимое множество через $h_{\tilde{\beta}}$.

Лемма 2. *В каждом хорошем тесте T бесповторной в базисе $\{\&,\vee\}$ функции f существует хотя бы один набор $\tilde{\alpha}$ такой, что в G_f содержится максимальная клика $k_{\tilde{\alpha}}$, и хотя бы один набор $\tilde{\beta}$ такой, что в G_f содержится максимальное независимое множество $h_{\tilde{\beta}}$.*

Доказательство. В каждом тесте должны содержаться как наборы, на которых тестируемая функция принимает значение 0, так и наборы, на которых функция принимает значение 1, иначе на наборах из T функция f не отличается от одной из констант. Так как каждому набору в хорошем тесте сопоставляется максимальная клика или максимальное независимое множество, получаем утверждение леммы.

Будем обозначать символом K_T множество всех максимальных клик $k_{\tilde{\alpha}}$, соответствующих наборам некоторого наперед заданного хорошего теста T, а символом H_T — множество всех соответствующих максимальных независимых множеств $h_{\tilde{\beta}}$. Кроме того, функцию $f(x_1,\ldots,x_{i-1},\sigma,x_{i+1},\ldots,x_n)$ будем обозначать символом $f_\sigma^{x_i}$ (здесь σ — некоторая константа).

Лемма 3. *У произвольного хорошего теста T бесповторной в базисе $\{\&,\vee\}$ функции f объединение множеств вершин всех элементов из K_T (H_T) содержит все вершины графа G_f.*

Доказательство. Покажем, что в тесте T для каждой переменной x_i содержатся два набора $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ такие, что $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 1$ и

$$f(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},x_i,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n) = x_i,$$
$$f(\beta_1,\ldots,\beta_{i-1},x_i,\beta_{i+1},\ldots,\beta_n) = x_i.$$

Допустим, что в T отсутствует набор $\tilde{\alpha}$. Продемонстрируем, что f в этом случае неотличима от $f_1^{x_i}$. Действительно, возьмем произвольный набор $\tilde{\gamma}$ и рассмотрим его i-ю компоненту γ_i. Если $\gamma_i = 1$, равенство $f(\tilde{\gamma}) = f_1^{x_i}(\tilde{\gamma})$, очевидно, выполняется. На наборах же $\tilde{\gamma}$ с $\gamma_i = 0$ верно

$$f(\tilde{\gamma}) = f(\gamma_1,\ldots,\gamma_{i-1},0,\gamma_{i+1},\ldots,\gamma_n) = f(\gamma_1,\ldots,\gamma_{i-1},1,\gamma_{i+1},\ldots,\gamma_n) = f_1^{x_i}(\tilde{\gamma}).$$

Аналогично показывается $\tilde{\beta} \in T$, с той лишь разницей, что вместо функции $f_1^{x_i}$ берется функция $f_0^{x_i}$. Лемма доказана.

Лемма 4. *У произвольного хорошего теста T для бесповторной в базисе $\{\&, \vee\}$ функции f любые два элемента множеств K_T и H_T имеют ровно одну общую вершину.*

Доказательство. В [8] описан критерий бесповторности в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$. Из него следует, что если f^* — функция, двойственная к f, то графы G_f и G_{f^*} комплементарны, множество вершин любого максимального независимого множества в G_f совпадает с множеством вершин некоторой максимальной клики в G_{f^*}, а каждая максимальная клика в G_f имеет ровно одну общую вершину с любой максимальной кликой в G_{f^*}. Поэтому если функция f бесповторна в базисе $\{\&, \vee\}$, то любая максимальная клика и любое максимальное независимое множество в G_f имеют ровно одну общую вершину. Лемма доказана.

Лемма 5. *У произвольного хорошего теста T для бесповторной в базисе $\{\&, \vee\}$ функции f число вершин в любом элементе K_T (H_T) не превосходит числа элементов в H_T (K_T).*

Доказательство. Следует из леммы 4: одной вершине в элементе K_T соответствует не менее одного элемента H_T, при этом разным вершинам одного и того же элемента K_T соответствуют разные элементы H_T. Лемма доказана.

Лемма 6. *Для произвольного хорошего теста T бесповторной в базисе $\{\&, \vee\}$ функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ справедливо неравенство $|K_T| + |H_T| \geq 2\sqrt{n}$.*

Доказательство. Обозначим через m_r максимальное число вершин в одном элементе множества K_T. Согласно леммам 2 и 3, имеем $m_r \geq \dfrac{n}{|K_T|}$. Из леммы 5 следует, что $m_r \leq |H_T|$, откуда

$$|H_T| \geq m_r \geq \frac{n}{|K_T|},$$

а значит,

$$|K_T| \cdot |H_T| \geq n.$$

Из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим получаем $\dfrac{|K_T| + |H_T|}{2} \geq \sqrt{|K_T| \cdot |H_T|} \geq \sqrt{n}$. Лемма доказана.

Теорема 1. *У любой бесповторной в базисе* $\{\&,\vee\}$ *функции* n *переменных длина произвольного теста* t *относительно бесповторной альтернативы не меньше* $2\sqrt{n}$.

Доказательство. Так как по лемме 1 длина теста t не меньше длины полученного из t хорошего теста T, длина которого, в свою очередь, согласно предыдущей лемме, не меньше $2\sqrt{n}$, то получаем утверждение теоремы.

Замечание. Полученная оценка фактически является нижней оценкой длины проверяющего теста, отличающего исходную функцию от ее остаточных, полученных заменой одной из переменных константой. В. Н. Носков в работе [9] исследовал задачу проверки таких неисправностей на входах произвольных булевых функций и показал, что для почти всех функций длина минимального теста равна 3. Как видно, наличие у функции свойства бесповторности в базисе $\{\&,\vee\}$ приводит к резкому росту необходимой длины теста.

Построим теперь подпоследовательность функций n переменных, бесповторных в рассматриваемом базисе и допускающих тест длины $3\sqrt{n}-1$. Рассмотрим простое p и $n=p^2$. Занумеруем для удобства n переменных двумя индексами, пробегающими значения от 0 до $p-1$, и рассмотрим функцию

$$f(\mathbf{x}) = \mathop{\&}_{i=0}^{p-1} \bigvee_{i=0}^{p-1} x_{i,j}. \tag{1}$$

В дальнейшем будем использовать матричную запись аргументов $f(\mathbf{x})$. Пусть множество наборов T_f состоит из p наборов с одной нулевой и остальными единичными строками, p наборов с одним единичным и остальными нулевыми столбцами, а также $p-1$ наборов $\mathbf{e}^0,\ldots,\mathbf{e}^{p-2}$ с ровно p единицами по одной в каждой строке и каждом столбце, определяемыми соотношениями:

$$\mathbf{e}^q_{i,j} = 1 \Leftrightarrow j \equiv i + q \bmod p.$$

Лемма 7. *На первых* $p-1$ *наборах множества* T_f *функция* $f(\mathbf{x})$ *равна нулю, на остальных — единице. Все наборы множества* T_f *являются либо верхними нулями, либо нижними единицами функции* $f(\mathbf{x})$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из того, что на любом наборе с нулевой строкой $f(\mathbf{x})$ равна нулю, а на любом наборе с единичным столбцом — единице.

Справедлив следующий факт:

Утверждение (см. напр. [4]**).** *Для любой бесповторной в базисе* $\{\&,\vee\}$ *функции и любых двух ее существенных переменных остаточная* *функция этих переменных, существенно зависящая от обеих, не зависит от выбора значений остальных.*

Любая неконстантная булева функция, бесповторная в базисе $\{\&, \vee\}$, может быть представлена однозначным образом в виде дерева с листьями — переменными этой функции и чередующимися вершинами конъюнкций и дизъюнкций произвольной степени. Для такого дерева D определяется граф $\varphi(D)$ с множеством вершин — множеством листьев дерева D по следующему правилу: ребро (x_i, x_j) принадлежит множеству ребер графа $\varphi(D)$ тогда и только тогда, когда последняя общая вершина на пути в эти листья в дереве D — дизъюнкция. Любой порожденный не менее чем двумя вершинами подграф графа $\varphi(D)$ либо несвязен, либо обладает несвязным дополнением (см. напр. [4,8]). Отображение φ множества описанных деревьев на класс таких графов является взаимно однозначным. Отметим также, что построенный таким образом граф $\varphi(D)$ является дополнением определенного ранее графа G_f и, следовательно, совпадает с графом G_{f^*}.

Теорема 2. *Множество* T_f *является тестом для* $f(\mathbf{x})$.

Доказательство. Функция $f(\mathbf{x})$ реализуется деревом, в корне которого лежит конъюнкция, а p корневых поддеревьев представляют собой дизъюнкции p листьев-переменных.

Рассмотрим граф $\varphi(D)$ дерева D тестируемой функции и p его подграфов, порожденных множествами вершин $\{x_{i,0}, x_{i,1}, \ldots, x_{i,p-1}\}$, $i = 0, \ldots, p-1$. Для каждого i в тест входит верхний ноль с нулевой i-й строкой. Все остаточные функции переменных $x_{i,j'}$ и $x_{i,j''}$, существенно зависящие от них — дизъюнкции, так что рассматриваемые порожденные подграфы являются полными.

Рассмотрим теперь произвольный подграф G' графа $\varphi(D)$, порожденный множеством вершин

$$\{x_{i,0}, x_{i,1}, \ldots, x_{i,p-1}\} \cup \{x_{i+q,0}, x_{i+q,1}, \ldots, x_{i+q,p-1}\}.$$

Значения $f(\mathbf{x})$ в наборах из T_f показывают, что подграфы, порожденные множествами вершин

$$\{x_{i,0}, x_{i,1}, \ldots, x_{i,p-1}\},\ \{x_{i+q,0}, x_{i+q,1}, \ldots, x_{i+q,p-1}\},$$

являются полными и для доказательства связности графа G' не хватает произвольного ребра вида $(x_{i,s}, x_{i+q,t})$. С другой стороны, дополнение графа G' содержит всевозможные ребра вида $(x_{i,j}, x_{i+q,j})$ (p штук) и $(x_{i,j}, x_{i+q,j+q})$ ($p-1$ ребро). Так как p простое, а $q < p$, то эти ребра не образуют цикл, а значит, граф $\overline{G'}$ связен, откуда следует, что G' несвязен. Последнее доказывает отсутствие ребер между вершинами с различными первыми индексами. В силу произвольности i и q мы восстанавливаем $\varphi(D)$, а следовательно, и дерево D с функцией $f(\mathbf{x})$. Теорема доказана.

Докажем теперь минимальность построенного теста для $f(\mathbf{x})$. Получим для этого индивидуальные нижние оценки длин тестов для функций, представимых бесповторными КНФ. Докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 8. *Пусть функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ представима в виде*

$$f = g_1(x_{1,1},\ldots,x_{1,n_1})\cdot g_2(x_{2,1},\ldots,x_{2,n_2})\cdot\ldots\cdot g_r(x_{r,1},\ldots,x_{r,n_r}),$$

где $r\geq 1$, функции g_i — бесповторные в базисе $\{\&,\vee\}$ и существенно зависящие от всех своих $n_i\geq 1$ переменных. Тогда всякий тест для f содержит не менее r нулевых наборов этой функции.

Доказательство. Рассмотрим следующие альтернативы для f:

$$f_1 = 1\cdot g_2\cdot\ldots\cdot g_r,$$
$$f_2 = g_1\cdot 1\cdot\ldots\cdot g_r,$$
$$\ldots$$
$$f_r = g_1\cdot g_2\cdot\ldots\cdot 1.$$

Каждая функция f_i отличается от f на множестве наборов $\tilde{\alpha}^{(i)}$ таких, что $g_i(\tilde{\alpha}^{(i)})=0$ и $g_j(\tilde{\alpha}^{(i)})=1$ для всех $j\neq i$. Это означает, что наборы $\tilde{\alpha}^{(i)}$ и $\tilde{\alpha}^{(j)}$ не могут совпадать при $i\neq j$, что и доказывает утверждение леммы.

Лемма 9. *Пусть функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ представима в виде*

$$f = (x_1\vee\ldots\vee x_k)(x_{k+1}\vee\ldots\vee x_{k+m})\cdot h(x_{k+m+1},\ldots,x_n),$$

где функция h бесповторна в базисе $\{\&,\vee\}$, $k\geq 2$, $m\geq 2$, $k+m\leq n$ (если при этом $k+m=n$, то полагаем $h\equiv 1$). Тогда всякий тест для f содержит не менее $(k+m-1)$ единичного набора этой функции.

Доказательство. Выберем произвольные монотонные элементарные дизъюнкции P, Q, R, S, не имеющие общих существенных переменных и такие, что

$$\{P\vee Q, R\vee S\} = \{x_1\vee\ldots\vee x_k, x_{k+1}\vee\ldots\vee x_{k+m}\}.$$

Не ограничивая общности рассуждений, будем считать выполненными равенства

$$P\vee Q = x_1\vee\ldots\vee x_k,$$
$$R\vee S = x_{k+1}\vee\ldots\vee x_{k+m}.$$

Заметим, что для f при этом справедливо представление

$$f = (P\vee Q)(R\vee S)\cdot h.$$

Рассмотрим теперь для f и для фиксированных P, Q, R, S следующие функции:

$$f_1 = (P \vee Q)R \cdot h,$$
$$f_2 = (PR \vee QS) \cdot h.$$

Нетрудно видеть, что для обоих значений $i = 1, 2$ справедливо соотношение $f_i \le f$, так что всякий проверяющий тест для f должен включать хотя бы один набор $\tilde{\alpha}^{(i)}$ из множества $N_i = \{\tilde{\alpha} \in E_2^n : f(\tilde{\alpha}) = 1, f_i(\tilde{\alpha}) = 0\}$. Построив множества N_1 и N_2 для каждой допустимой четверки P, Q, R, S, образуем их семейства W_1 и W_2 соответственно. Множество наборов любого теста для функции f образует протыкающее множество для семейства $W = W_1 \cup W_2$ в булевом кубе E_2^n.

В силу того что $f_i \le f$ для $i = 1,2$, любой набор $\tilde{\alpha}$ из произвольного множества M семейства W имеет хотя бы по одной единице как среди компонент с номерами $1,\dots,k$, так и среди компонент с номерами $k+1,\dots,k+m$. В силу монотонности булевых конъюнкции и дизъюнкции набор $\tilde{\alpha}'$, получаемый из $\tilde{\alpha}$ заменой нулями всех остальных компонент из числа $(k+m)$ первых, также является элементом множества M. Данный факт означает, что при получении нижних оценок мощности протыкающих множеств для семейства W можно без ограничения общности считать, что все наборы таких множеств имеют ровно по одной единице среди компонент с номерами $1,\dots,k$ и $k+1,\dots,k+m$ (для доказательства этого факта можно также сослаться на лемму 1).

Пусть множество A является протыкающим для семейства W и удовлетворяет указанному условию. Построим двудольный граф $G(A) = (V_A, E_A)$ с долями $\{x_1,\dots,x_k\}$ и $\{x_{k+1},\dots,x_{k+m}\}$ такой, что ребро (x_i, x_j) принадлежит множеству ребер E_A в том и только в том случае, когда некоторый набор $\tilde{\alpha}$ из множества A имеет i-ю и j-ю единичные компоненты, и убедимся, что он связен. Действительно, отсутствие изолированных вершин в нем обеспечивается наличием в W множеств семейства W_1 для всевозможных функций f_1 с $S = x_i$ при $i = 1,\dots,k+m$, ибо для них выполнено

$$f \ne f_1 \Leftrightarrow (P \vee Q)\ \overline{R}S \cdot h = 1.$$

Следовательно, в силу двудольности $G(A)$ множество вершин никакой связной компоненты не может быть подмножеством ни одной из долей. Семейство же W_2 гарантирует невозможность наличия в $G(A)$ отличной от V_A связной компоненты с вершинами в разных долях, поскольку

$$f \ne f_2 \Leftrightarrow (P\overline{Q}\overline{R}S \vee \overline{P}QR\overline{S}) \cdot h = 1$$

и любой набор, различающий f и f_2, обеспечивает наличие ребра между множествами вершин — существенных переменных конъюнкций $P \cdot R$ и $Q \cdot S$. Наличие не менее $(k+m-1)$ вершины в произвольном $(k+m)$-вершинном связном графе завершает доказательство леммы.

Теорема 3. *Для функции*

$$f = \left(x_{1,1} \vee \ldots \vee x_{1,n_1}\right)\left(x_{2,1} \vee \ldots \vee x_{2,n_2}\right)\ldots\left(x_{l,1} \vee \ldots \vee x_{l,n_l}\right) y_1 \ldots y_t$$

при $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_l \geq 2$, $l \geq 0$, $t \geq 0$, $n = \sum_{i=1}^{l} n_i + t$ *длина минимального теста* T *удовлетворяет неравенству*

$$|T| \geq \begin{cases} n+1, & l = 0, 1, 2, \\ (l+t)+(n_1+n_2-1), & l > 2. \end{cases}$$

Доказательство. При $l = 0$ тестируемая функция является конъюнкцией $n = t$ переменных. Любой тест содержит, согласно лемме 8, не менее n нулевых наборов f, а также набор из n единиц (только на нем f отличается от константы 0). В случае $l = 1$ для различения f и $f_0^{x_{1,i}}$, $i = 1, \ldots, n_1$, в тест необходимо включить не менее n_1 единичных наборов f, так что с учетом не менее $(t+1)$ нулевого набора (лемма 8) длина теста, как и при $l = 0$, составляет не менее $(n+1)$. При $l \geq 2$ требуемая оценка вытекает из лемм 8 и 9, причем в случае $l = 2$ имеет место равенство $(l+t)+(n_1+n_2-1) = n+1$. Теорема доказана.

Замечание. Полученные нижние оценки при $l \leq 2$ неулучшаемы. Действительно, всякая монотонная булева функция однозначно определяется множествами ее верхних нулей и нижних единиц, поэтому сумма их мощностей составляет верхнюю оценку длины минимального теста, что и дает искомое при $l = 0,1$. В случае же $l = 2$ для восстановления тестируемой функции достаточно из множества ее нижних единиц выбрать какое-либо подмножество мощности $(n_1 + n_2 - 1)$, позволяющее, как и при рассуждениях из доказательства теоремы 2, убедиться в наличии у графа $\varphi(D)$ двух связных компонент — клик размеров n_1 и n_2 (см. подробное описание данной техники в [3]).

Следствие 1. *Для функции* $f(\mathbf{x})$, *задаваемой соотношением* (1), *построенное множество* T_f *является тестом минимальной длины.*

Следствие 2. *Для функции* $f(x_1, \ldots, x_n)$, *представимой в виде бесповторной нормальной формы (ДНФ или КНФ), длина минимального*

$$|T| \geq 2\sqrt{2}\sqrt{n} - 1.$$

теста T *удовлетворяет неравенству*

Доказательство. Принцип двойственности позволяет ограничиться рассмотрением КНФ (результаты вспомогательных лемм и теоремы легко переносятся на двойственный случай). Воспользуемся введенными выше обозначениями и положим $r = l + t$. Пусть вначале $l \geq 3$, тогда сразу и $r \geq 3$. Найдем наименьшее значение выражения

$$(l+t)+(n_1+n_2-1)=n_1+n_2+r-1.$$

Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $n_2 \geq n_1 - 1$, так что искомый минимум не меньше минимума

$$2n_1+r-2 \geq 2\frac{n}{r}+r-2.$$

Обозначим правую часть последнего соотношения символом $\tau(r)$. Исследование производной $\tau'(r)$ говорит о наличии минимума в точке $r = \sqrt{2n}$, поэтому оценка из утверждения теоремы не может оказаться меньше, чем

$$\tau\left(\sqrt{2n}\right)=2\sqrt{2}\sqrt{n}-2.$$

Если при этом $n_1 = n_2$, то последнее значение, очевидно, поднимается до требуемого, а если $n_1 = n_2 + 1$, то справедлива оценка

$$|T| \geq 2n_2+r \geq 2\cdot\frac{n-1}{r}+r=2\cdot\frac{n}{r}+r-\frac{2}{r}.$$

Предположив, что $|T| < 2\sqrt{2}\sqrt{n}-1$, получим неравенство для величины $\sqrt{n}$:

$$\mathbf{D}=8-4\cdot\frac{2}{r}\cdot\left(r-\frac{2}{r}+1\right)=8\cdot\left(1-\left(1-\frac{2}{r^2}+\frac{1}{r}\right)\right)=\frac{8(2-r)}{r^2}$$

Так как $r \neq 0$, то условие положительности дискриминанта

$$\frac{2}{r}\cdot\left(\sqrt{n}\right)^2-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{n}+\left(r-\frac{2}{r}+1\right)<0.$$

равносильно неравенству $r < 2$, которое противоречит посылке $r \geq 3$. Для завершения доказательства осталось отметить, что рассмотрение случая $l < 3$ приводит к неравенству

$$n+1<2\sqrt{2}\sqrt{n}-1,$$

которое также неразрешимо в натуральных числах, поскольку может быть переписано в виде

$$(\sqrt{n}-\sqrt{2})^2<0.$$

Замечание. При значениях параметров $n = 2k^2$, $r = 2k$, $n_1 = \ldots = n_r = k$ оценки теоремы 3 и следствия 2 совпадают и дают величину $4k-1$, так что результат следствия 2 является в этом смысле неулучшаемым.

Авторы выражают благодарность Романову Дмитрию Сергеевичу за ценные замечания.

Литература

1. *Вороненко А. А.* О проверяющих тестах для бесповторных функций // Математические вопросы кибернетики. Вып. 11. М.: Физматлит, 2002. С. 163–176.
2. *Рябец Л. В.* Сложность проверяющих тестов для бесповторных булевых функций // Серия: Дискретная математика и информатика. Вып. 18. Иркутск: Изд-во Ирк. гос. пед. ун-та, 2007. 30 с.
3. *Вороненко А. А., Чистиков Д. В.* Индивидуальное тестирование бесповторных функций // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2009. Т. 151, кн. 2. С. 36–44.
4. *Вороненко А. А.* О длине проверяющего теста для бесповторных функций в базисе $\{0,1,\&,\vee,\neg\}$ // Дискретная математика. **17**. № 2. 2005. С. 139–143.
5. *Бубнов С. Е.* Функция Шеннона длины проверяющих тестов функций, бесповторных в элементарном базисе // Сборник статей молодых ученых факультета ВМК МГУ. Вып. 6. М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2009. С. 47–57.
6. *Бубнов С. Е.* Нижняя оценка длины проверяющего теста для бесповторных функций в базисе $\{\&,\vee\}$ // Дискретные модели в теории управляющих систем: VIII Международная конференция, Москва, 6–9 апреля 2009 г.: Труды. М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2009. С. 40–43.
7. *Вороненко А. А.* Легко тестируемые бесповторные функции в базисе $\{\&,\vee\}$ // Дискретные модели в теории управляющих систем: VIII Международная конференция, Москва, 6–9 апреля 2009 г.: Труды. М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2009. С. 52–54.
8. *Гурвич В. А.* О бесповторных булевых функциях // Успехи матем. наук. 1977. **32**. № 1. С. 183–184.
9. *Носков В. Н.* О сложности тестов, контролирующих работу входов логических схем // Дискретный анализ. Вып. 27. Новосибирск: ИМ СО РАН СССР, 1975. С. 23–51.