Б. А. Будак, А. В. Ничипорчук

ДИСКРЕТНЫЙ ЭКСТРАГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД С ПЕРЕМЕННОЙ МЕТРИКОЙ ДЛЯ СЕДЛОВЫХ ЗАДАЧ *

1. Введение

Отыскание седловых точек — распространенная задача, возникающая в различных областях математики и экономики. Существует некоторое количество численных методов, решающих данную проблему, однако все они, как правило, предъявляют жесткие требования к целевой функции и предназначены для узкого класса задач. Попытки избавиться от требования сильной выпуклости-вогнутости приводят к рассмотрению методов экстраполяционного типа [1].

Схожий подход используется при решении задач равновесного программирования. Равновесная постановка, по сути, является универсальной, так как к ней сводится большое количество задач из различных областей оптимизации. Для равновесных задач разработаны разнообразные численные методы, в том числе экстраградиентные [2].

Особый интерес представляет возможность увеличения скорости сходимости без существенных вычислительных затрат. Для равновесных задач существует аналог метода Ньютона, обладающий теми же недостатками, что и классический оптимизационный метод Ньютона — локальная сходимость и сложные вычисления. Для устранения второй проблемы используются методы с переменной метрикой [3]. В сочетании с экстраполяционным подходом такие методы имеют достаточно высокую скорость сходимости, приемлемые вычислительные затраты, кроме того, они подходят для широкого класса целевых функций.

На настоящий момент разработан ряд экстраградиентных методов с переменной метрикой, но эти методы являются непрерывными, и их дискретных аналогов не существует. Известно, что задачи равновесного программирования тесно связаны с седловыми задачами — поиск точек равновесия путем замены переменных можно свести к поиску седловых точек [4]. В данной статье рассматривается дискретный метод экстраградиентного типа с переменной метрикой для седловых задач как частного случая равновесных задач.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 01-12-00783), программы поддержки ведущих научных школ (НШ-6512.2012.1)

2. Дискретный экстраградиентный метод с переменной метрикой для решения седловых задач

Будем рассматривать задачу поиска седловой точки (x_*, y^*) функции $f(x, y)$:

$$f(x_*, y) \leqslant f(x_*, y^*) \leqslant f(x, y^*) \quad \forall x \in X \subseteq \mathbb{R}^n,\ \forall y \in Y \subseteq \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Пусть заданы некоторые начальные приближения $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Далее будем строить последовательность $\{x_k, y_k\}$ по правилу

$$\bar{x}_k = P_X^{G(x_k)}(x_k - \alpha_k G(x_k)^{-1} f'_x(x_k, y_k)),\ k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

$$\bar{y}_k = P_Y^{G(y_k)}(y_k + \alpha_k G(y_k)^{-1} f'_y(x_k, y_k)),\ k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

$$x_{k+1} = P_X^{G(x_k)}(x_k - \alpha_k G(x_k)^{-1} f'_x(\bar{x}_k, \bar{y}_k)),\ k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

$$y_{k+1} = P_Y^{G(y_k)}(y_k + \alpha_k G(y_k)^{-1} f'_y(\bar{x}_k, \bar{y}_k)),\ k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

где $G(x_k)$ и $G(y_k)$ – симметричные положительно определенные матрицы размерности $n \times n$; α_k, $k = 0, 1, \ldots$ – положительные числа; $P_X^{G(x_k)}$ и $P_Y^{G(y_k)}$ – операторы G-проектирования на множества X и Y. Операция G-проектирования на некоторое множество X определяется следующим образом:

$$p = P_X^G(x_0), \text{ если } \langle G(p - x_0), p - x_0\rangle = \inf_{x \in X} \langle G(x - x_0), x - x_0\rangle,$$

то есть, фактически p минимизирует функцию

$$\rho_G(x; x_0) = \langle G(x - x_0), x - x_0\rangle$$

на множестве X. Приведем утверждение, описывающее свойства операции G-проектирования.

Лемма 1. *Пусть X – выпуклое замкнутое множество из $\mathbb{R}^n$, G – симметричная положительно определенная матрица, существуют такие положительные числа m и M, что $\forall x \in \mathbb{R}^n$ выполнено двойное неравенство $m\|x\|^2 \leqslant \langle Gx, x\rangle \leqslant M\|x\|^2$. Тогда:*

1. *для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существует, причем единственная его G-проекция $P_X^G(x_0)$ на множество X;*
2. *$p = P_X^G(x_0)$ тогда и только тогда, когда $\langle G(p - x_0), x - p\rangle \geqslant 0 \ \ \forall x \in X$;*
3. *если $p_1 = P_X^G(x_1)$, $p_2 = P_X^G(x_2)$, то $\|p_1 - p_2\| \leqslant \frac{M}{m}\|x_1 - x_2\|$.*

Для сокращения записи в дальнейших выкладках введем обозначение G-нормы $||x||_G = \langle Gx, x\rangle$. Матрицы в уравнениях (2)–(5) выбираются либо постоянными (то есть $G(x_k) \equiv G_x,\ G(y_k) \equiv G_y\ \forall k = 0, 1, \dots$), либо так, чтобы на каждом шаге выполнялись условия:

$$\|x\|^2_{G(x_k)} \geqslant \|x\|^2_{G(x_{k+1})}\ \forall x \in \mathbb{R}^n;\ \|y\|^2_{G(y_k)} \geqslant \|y\|^2_{G(y_{k+1})}\ \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Данные неравенства равносильны неотрицательной определенности разности матриц на соседних итерациях, что накладывает серьезные ограничения на способ их выбора. В этой статье не предлагается явных формул для $G(x_k)$ и $G(y_k)$. Существуют некоторые рекомендации по конструированию таких матриц (описаны в [5], параграф 9.2). Прибавляя к симметричной положительно определенной матрице некоторый довесок специального вида, можно добиться того, что результат также будет симметричным и положительно определенным. Используя данный факт, для рассматриваемого метода можно предложить следующий способ выбора матриц $G(x_k),\ G(y_k)$:

1. зафиксировать число итераций;
2. выбрать матрицу, которая будет применена на последней итерации;
3. построить последовательность матриц, следуя указанному в [5] способу.

При таком подходе решение будет получено, возможно, с неподходящей точностью. В этом случае стоит увеличить число итераций и заново построить последовательность матриц.

Перейдем к рассмотрению вопроса о сходимости последовательностей, генерируемых методом (2)–(5).

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. $X,\ Y$ *- выпуклые замкнутые подмножества пространства* $\mathbb{R}^n$*;*
2. *функция* $f(x,y)$ *выпукла по* x *на множестве* X *при любом фиксированном* $y \in Y$ *и вогнута по* y *на множестве* Y *при любом фиксированном* $x \in X$*;*
3. *частные производные* $f(x,y)$ *удовлетворяют условиям Липшица*

$$\|f'_x(x_1, y_1) - f'_x(x_2, y_2)\| \leqslant L_1(\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|),$$

$$\|f'_y(x_1, y_1) - f'_y(x_2, y_2)\| \leqslant L_2(\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|)$$

для любых $x_1, x_2 \in X,\ y_1, y_2 \in Y$*;*

4. *матрицы* $G(x_k)$, $G(y_k)$ *симметричны, существуют положительные числа* m_1, m_2, M_1, M_2 *такие, что при всех* $k = 0, 1, \dots$

$$m_1\|x\|^2 \leqslant \langle G(x_k)x, x\rangle \leqslant M_1\|x\|^2 \;\forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

$$m_2\|y\|^2 \leqslant \langle G(y_k)y, y\rangle \leqslant M_2\|y\|^2 \;\forall y \in \mathbb{R}^n;$$

и, кроме того,

$$\|x\|^2_{G(x_k)} \geqslant \|x\|^2_{G(x_{k+1})} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n;$$

$$\|y\|^2_{G(y_k)} \geqslant \|y\|^2_{G(y_{k+1})} \quad \forall y \in \mathbb{R}^n;$$

5. *существует число* $\varepsilon > 0$ *такое, что для любого номера* k *шаг метода* α_k *удовлетворяет условиям*

$$m_1 - 4\alpha_k L \geqslant \varepsilon,\; m_2 - 4\alpha_k L \geqslant \varepsilon, \tag{7}$$

где $L = \max(L_1, L_2)$.

Тогда при любом начальном приближении $(x_0, y_0) \in X \times Y$ *все предельные точки* (x_*, y^*) *последовательности* $\{(x_k, y_k)\}$*, порожденной методом (2)-(5), принадлежат множеству* $X_* \times Y^*$ *решений седловой задачи (1).*

Доказательство. Пользуясь приведенными в лемме 1 свойствами G-проекции, перепишем уравнения метода в форме вариационных неравенств:

$$\langle G(x_k)(\bar{x}_k - x_k + \alpha_k G(x_k)^{-1} f'_x(x_k, y_k)), x - \bar{x}_k\rangle \geqslant 0, \tag{8}$$

$$\langle G(x_k)(x_{k+1} - x_k + \alpha_k G(x_k)^{-1} f'_x(\bar{x}_k, \bar{y}_k)), x - x_{k+1}\rangle \geqslant 0, \tag{9}$$

$$\langle G(y_k)(\bar{y}_k - y_k - \alpha_k G(y_k)^{-1} f'_y(x_k, y_k)), y - \bar{y}_k\rangle \geqslant 0, \tag{10}$$

$$\langle G(y_k)(y_{k+1} - y_k - \alpha_k G(y_k)^{-1} f'_y(\bar{x}_k, \bar{y}_k)), y - y_{k+1}\rangle \geqslant 0. \tag{11}$$

Подставляя в (9) $x = x_*$ и проводя элементарные преобразования, получаем:

$$\begin{gathered}\langle G(x_k)(x_{k+1} - x_k), x_* - x_{k+1}\rangle + \alpha_k\langle f'_x(\bar{x}_k, \bar{y}_k), x_* - x_{k+1}\rangle \geqslant 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \langle G(x_k)(x_{k+1} - x_k), x_* - x_{k+1}\rangle + \alpha_k\langle f'_x(\bar{x}_k, \bar{y}_k), x_* - \bar{x}_k\rangle - \\ -\alpha_k\langle f'_x(x_k, y_k) - f'_x(\bar{x}_k, \bar{y}_k), \bar{x}_k - x_{k+1}\rangle + \alpha_k\langle f'_x(x_k, y_k), \bar{x}_k - x_{k+1}\rangle \geqslant 0.\end{gathered} \tag{12}$$

Функция $f(x, y)$ выпукла по x на множестве X, поэтому второе слагаемое из (12) можно оценить, пользуясь критерием выпуклости для дифференцируемых функций [3, стр.185, теорема 2]:

$$\alpha_k\langle f'_x(\bar{x}_k, \bar{y}_k), x_* - \bar{x}_k\rangle \leqslant \alpha_k(f(x_*, \bar{y}_k) - f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)).$$

Согласно неравенству Коши-Буняковского и условию Липшица, третье слагаемое неравенства (12) оценивается сверху следующим образом:

$$-\alpha_k\langle f'_x(x_k,y_k)-f'_x(\bar x_k,\bar y_k),\bar x_k-x_{k+1}\rangle\leqslant$$

$$\leqslant \alpha_k\|f'_x(x_k,y_k)-f'_x(\bar x_k,\bar y_k)\|\cdot\|\bar x_k-x_{k+1}\|\leqslant$$
$$\leqslant \alpha_k L(\|x_k-\bar x_k\|+\|y_k-\bar y_k\|)\cdot\|x_{k+1}-\bar x_k\|\leqslant\{2ab\leqslant a^2+b^2\}\leqslant$$
$$\leqslant \alpha_k L\cdot\frac{1}{2}(\|x_{k+1}-\bar x_k\|^2+(\|x_k-\bar x_k\|+\|y_k-\bar y_k\|)^2)\leqslant$$
$$\leqslant \alpha_k L(\frac{1}{2}\|x_{k+1}-\bar x_k\|^2+\|x_k-\bar x_k\|^2+\|y_k-\bar y_k\|^2).$$

С учетом этих преобразований неравенство (12) перепишется в виде

$$\begin{gathered}\langle G(x_k)(x_{k+1}-x_k),x_*-x_{k+1}\rangle+\alpha_k(f(x_*,\bar y_k)-f(\bar x_k,\bar y_k))+\\ +\alpha_k\langle f'_x(x_k,y_k),\bar x_k-x_{k+1}\rangle+\\ +\alpha_k L(\frac{1}{2}\|x_{k+1}-\bar x_k\|^2+\|x_k-\bar x_k\|^2+\|y_k-\bar y_k\|^2)\geqslant 0.\end{gathered}\tag{13}$$

Теперь, положив в неравенстве (8) $x=x_{k+1}$, имеем

$$\langle G(x_k)(\bar x_k-x_k),x_{k+1}-\bar x_k\rangle+\alpha_k\langle f'_x(x_k,y_k)),x_{k+1}-\bar x_k\rangle\geqslant 0,$$

и, складывая это неравенство с (13), получаем

$$\begin{gathered}\langle G(x_k)(x_{k+1}-x_k),x_*-x_{k+1}\rangle+\alpha_k(f(x_*,\bar y_k)-f(\bar x_k,\bar y_k))+\\ +\langle G(x_k)(\bar x_k-x_k),x_{k+1}-\bar x_k\rangle+\alpha_k L(\frac{1}{2}\|x_{k+1}-\bar x_k\|^2+\\ +\|x_k-\bar x_k\|^2+\|y_k-\bar y_k\|^2)\geqslant 0.\end{gathered}\tag{14}$$

Проведем аналогичные действия для основного и прогнозного шага по переменной y. В неравенстве (11) положим $y=y^*$:

$$\langle G(y_k)(y_{k+1}-y_k),y^*-y_{k+1}\rangle-\alpha_k\langle f'_y(\bar x_k,\bar y_k)),y^*-y_{k+1}\rangle\geqslant 0.$$

Представим получившееся неравенство в следующем виде:

$$\begin{gathered}\langle G(y_k)(y_{k+1}-y_k),y^*-y_{k+1}\rangle-\alpha_k\langle f'_y(\bar x_k,\bar y_k),y^*-\bar y_k\rangle-\\ -\alpha_k\langle f'_y(\bar x_k,\bar y_k)-f'_y(x_k,y_k),\bar y_k-y_{k+1}\rangle+\alpha_k\langle f'_y(x_k,y_k),\bar y_k-y_{k+1}\rangle\geqslant 0.\end{gathered}\tag{15}$$

Оценим второе слагаемое (15), используя вогнутость функции $f(x,y)$ по переменной y на множестве Y:

$$-\alpha_k\langle f'_y(\bar x_k,\bar y_k),y^*-\bar y_k\rangle\leqslant-\alpha_k(f(\bar x_k,y^*)-f(\bar x_k,\bar y_k)).$$

Третье слагаемое из (15) с помощью неравенства Коши-Буняковского и условия Липшица для производной оценивается так:

$$-\alpha_k\langle f'_y(\bar{x}_k,\bar{y}_k)-f'_y(x_k,y_k),\bar{y}_k-y_{k+1}\rangle\leqslant$$
$$\leqslant\alpha_k\|f'_y(\bar{x}_k,\bar{y}_k)-f'_y(x_k,y_k)\|\cdot\|\bar{y}_k-y_{k+1}\|\leqslant$$
$$\leqslant\alpha_k L(\|x_k-\bar{x}_k\|+\|y_k-\bar{y}_k\|)\cdot\|y_{k+1}-\bar{y}_k\|\leqslant\{2ab\leqslant a^2+b^2\}\leqslant$$
$$\leqslant\alpha_k L\cdot\frac{1}{2}(\|y_{k+1}-\bar{y}_k\|^2+(\|x_k-\bar{x}_k\|+\|y_k-\bar{y}_k\|)^2)\leqslant$$
$$\leqslant\alpha_k L(\frac{1}{2}\|y_{k+1}-\bar{y}_k\|^2+\|x_k-\bar{x}_k\|^2+\|y_k-\bar{y}_k\|^2).$$

С учетом полученных оценок неравенство (15) перепишется следующим образом:

$$\begin{gathered}\langle G(y_k)(y_{k+1}-y_k),y^*-y_{k+1}\rangle-\alpha_k(f(\bar{x}_k,y^*)-f(\bar{x}_k,\bar{y}_k))-\\-\alpha_k\langle f'_y(x_k,y_k),\bar{y}_k-y_{k+1}\rangle+\\+\alpha_k L(\frac{1}{2}\|y_{k+1}-\bar{y}_k\|^2+\|x_k-\bar{x}_k\|^2+\|y_k-\bar{y}_k\|^2)\geqslant 0.\end{gathered}\tag{16}$$

Положив в неравенстве (10) $y=y_{k+1}$, имеем

$$\langle G(y_k)(\bar{y}_k-y_k),y_{k+1}-\bar{y}_k\rangle-\alpha_k\langle f'_y(x_k,y_k)),y_{k+1}-\bar{y}_k\rangle\geqslant 0,$$

и, складывая это неравенство с (16), находим

$$\begin{gathered}\langle G(y_k)(y_{k+1}-y_k),y^*-y_{k+1}\rangle-\alpha_k(f(\bar{x}_k,y^*)-f(\bar{x}_k,\bar{y}_k))-\\-\alpha_k\langle f'_y(x_k,y_k),\bar{y}_k-y_{k+1}\rangle+\alpha_k L(\frac{1}{2}\|y_{k+1}-\bar{y}_k\|^2+\|x_k-\bar{x}_k\|^2+\\+\|y_k-\bar{y}_k\|^2)+\langle G(y_k)(\bar{y}_k-y_k,y_{k+1}-\bar{y}_k\rangle-\alpha_k\langle f'_y(x_k,y_k)),y_{k+1}-\bar{y}_k\rangle\geqslant 0.\end{gathered}\tag{17}$$

Для получения совместной оценки на невязки $\|x_k-x_*\|$ и $\|y_k-y^*\|$ сложим (14) и (17):

$$\begin{gathered}\langle G(x_k)(x_{k+1}-x_k),x_*-x_{k+1}\rangle+\langle G(x_k)(\bar{x}_k-x_k),x_{k+1}-\bar{x}_k\rangle+\\+\langle G(y_k)(y_{k+1}-y_k),y^*-y_{k+1}\rangle+\langle G(y_k)(\bar{y}_k-y_k),y_{k+1}-\bar{y}_k\rangle+\\+\alpha_k(f(x_*,\bar{y}_k)-f(\bar{x}_k,y^*))+\\+\alpha_k L(\frac{1}{2}\|x_{k+1}-\bar{x}_k\|^2+\frac{1}{2}\|y_{k+1}-\bar{y}_k\|^2+2\|x_k-\bar{x}_k\|^2+2\|y_k-\bar{y}_k\|^2)\geqslant 0.\end{gathered}\tag{18}$$

Рассмотрим подробнее пятое слагаемое (18):

$$\alpha_k(f(x_*,\bar{y}_k)-f(\bar{x}_k,y^*))=\alpha_k(f(x_*,\bar{y}_k)-f(\bar{x}_k,y^*))=\{\pm f(x_*,y^*)\}=$$
$$=\alpha_k(f(x_*,\bar{y}_k)-f(x_*,y^*)+f(x_*,y^*)-f(\bar{x}_k,y^*)).$$

Так как (x_*, y^*) – седловая точка функции $f(x,y)$, то справедливо соотношение

$$f(x_*, y) \leqslant f(x_*, y^*) \leqslant f(x, y^*) \quad \forall x \in X,\ \forall y \in Y.$$

Положив в этом соотношении $x = \bar{x}_k$, $y = \bar{y}_k$, имеем

$$f(x_*, \bar{y}_k) \leqslant f(x_*, y^*) \leqslant f(\bar{x}_k, y^*),$$

тогда $f(x_*, \bar{y}_k) - f(x_*, y^*) \leqslant 0$ и $f(x_*, y^*) - f(\bar{x}_k, y^*) \leqslant 0$. Следовательно, и их сумма $f(x_*, \bar{y}_k) - f(x_*, y^*) + f(x_*, y^*) - f(\bar{x}_k, y^*)$ также неположительна. Так как $\alpha_k > 0$, то оцениваемое нами пятое слагаемое неравенства (18) не превосходит нуля, и мы приходим к соотношению

$$\begin{gathered}\langle G(x_k)(x_{k+1} - x_k), x_* - x_{k+1}\rangle + \langle G(x_k)(\bar{x}_k - x_k), x_{k+1} - \bar{x}_k\rangle + \\ +\langle G(y_k)(y_{k+1} - y_k), y^* - y_{k+1}\rangle + \langle G(y_k)(\bar{y}_k - y_k), y_{k+1} - \bar{y}_k\rangle + \\ +\alpha_k L(\frac{1}{2}\|x_{k+1} - \bar{x}_k\|^2 + \frac{1}{2}\|y_{k+1} - \bar{y}_k\|^2 + 2\|x_k - \bar{x}_k\|^2 + 2\|y_k - \bar{y}_k\|^2) \geqslant 0.\end{gathered} \tag{19}$$

Используя тождество $2\langle Ga, b\rangle = \langle G(a+b), a+b\rangle - \langle Ga, a\rangle - \langle Gb, b\rangle$, преобразуем неравенство (19):

$$\begin{gathered}\langle G(x_k)(x_* - x_k), x_* - x_k\rangle - \langle G(x_k)(x_{k+1} - x_k), x_{k+1} - x_k\rangle - \\ -\langle G(x_k)(x_* - x_{k+1}), x_* - x_{k+1}\rangle + \langle G(x_k)(x_{k+1} - x_k), x_{k+1} - x_k\rangle - \\ -\langle G(x_k)(\bar{x}_k - x_k), \bar{x}_k - x_k\rangle - \langle G(x_k)(x_{k+1} - \bar{x}_k), x_{k+1} - \bar{x}_k\rangle + \\ +\langle G(y_k)(y^* - y_k), y^* - y_k\rangle - \langle G(y_k)(y_{k+1} - y_k), y_{k+1} - y_k\rangle - \\ -\langle G(y_k)(y^* - y_{k+1}), y^* - y_{k+1}\rangle + \langle G(y_k)(y_{k+1} - y_k), y_{k+1} - y_k\rangle - \\ -\langle G(y_k)(\bar{y}_k - y_k), \bar{y}_k - y_k\rangle - \langle G(y_k)(y_{k+1} - \bar{y}_k), y_{k+1} - \bar{y}_k\rangle + \\ +2\alpha_k L(\frac{1}{2}\|x_{k+1} - \bar{x}_k\|^2 + \frac{1}{2}\|y_{k+1} - \bar{y}_k\|^2 + 2\|x_k - \bar{x}_k\|^2 + 2\|y_k - \bar{y}_k\|^2) \geqslant 0.\end{gathered}$$

Сократив одинаковые слагаемые, получим

$$\begin{gathered}\langle G(x_k)(x_* - x_k), x_* - x_k\rangle - \langle G(x_k)(x_* - x_{k+1}), x_* - x_{k+1}\rangle - \\ -\langle G(x_k)(\bar{x}_k - x_k), \bar{x}_k - x_k\rangle - \langle G(x_k)(x_{k+1} - \bar{x}_k), x_{k+1} - \bar{x}_k\rangle + \\ +\langle G(y_k)(y^* - y_k), y^* - y_k\rangle - \langle G(y_k)(y^* - y_{k+1}), y^* - y_{k+1}\rangle - \\ -\langle G(y_k)(\bar{y}_k - y_k), \bar{y}_k - y_k\rangle - \langle G(y_k)(y_{k+1} - \bar{y}_k), y_{k+1} - \bar{y}_k\rangle + \\ +2\alpha_k L(\frac{1}{2}\|x_{k+1} - \bar{x}_k\|^2 + \frac{1}{2}\|y_{k+1} - \bar{y}_k\|^2 + 2\|x_k - \bar{x}_k\|^2 + 2\|y_k - \bar{y}_k\|^2) \geqslant 0.\end{gathered} \tag{20}$$

Перепишем неравенство (20) с использованием введенного ранее обозначения G-нормы:

$$\|x_* - x_k\|^2_{G(x_k)} - \|x_* - x_{k+1}\|^2_{G(x_k)} - \|\bar{x}_k - x_k\|^2_{G(x_k)} - \|\bar{x}_k - x_{k+1}\|^2_{G(x_k)} +$$

$$+\|y^* - y_k\|^2_{G(y_k)} - \|y^* - y_{k+1}\|^2_{G(y_k)} - \|\bar{y}_k - y_k\|^2_{G(y_k)} - \|\bar{y}_k - y_{k+1}\|^2_{G(y_k)} +$$

$$+\alpha_k L(\|x_{k+1} - \bar{x}_k\|^2 + \|y_{k+1} - \bar{y}_k\|^2 + 4\|x_k - \bar{x}_k\|^2 + 4\|y_k - \bar{y}_k\|^2) \geqslant 0.$$

Оставим в левой части неравенства нормы отклонений k-го шага метода от решения, а некоторые G-нормы в правой части оценим с использованием пункта 3 из условия теоремы:

$$\|x_* - x_k\|^2_{G(x_k)} + \|y^* - y_k\|^2_{G(y_k)} \geqslant \|x_* - x_{k+1}\|^2_{G(x_k)} + \|y^* - y_{k+1}\|^2_{G(y_k)} +$$

$$+m_1\|\bar{x}_k - x_k\|^2 + m_2\|\bar{y}_k - y_k\|^2 + m_1\|\bar{x}_k - x_{k+1}\|^2 + m_2\|\bar{y}_k - y_{k+1}\|^2 -$$

$$-\alpha_k L(\|x_{k+1} - \bar{x}_k\|^2 + \|y_{k+1} - \bar{y}_k\|^2 + 4\|x_k - \bar{x}_k\|^2 + 4\|y_k - \bar{y}_k\|^2).$$

Согласно условию выбора матриц, справедливо неравенство:

$$\|x_* - x_{k+1}\|^2_{G(x_k)} + \|y^* - y_{k+1}\|^2_{G(y_k)} \geqslant \|x_* - x_{k+1}\|^2_{G(x_{k+1})} + \|y^* - y_{k+1}\|^2_{G(y_{k+1})}.$$

Кроме того, применим пункт 5 условия теоремы для оценки констант в правой части. Окончательно имеем

$$\|x_* - x_k\|^2_{G(x_k)} + \|y^* - y_k\|^2_{G(y_k)} \geqslant \|x_* - x_{k+1}\|^2_{G(x_{k+1})} + \|y^* - y_{k+1}\|^2_{G(y_{k+1})} +$$

$$+\varepsilon\left(\|\bar{x}_k - x_k\|^2 + \|\bar{y}_k - y_k\|^2 + \|\bar{x}_k - x_{k+1}\|^2 + \|\bar{y}_k - y_{k+1}\|^2\right). \tag{21}$$

Просуммируем неравенство (21) от $k = 0$ до $k = N$:

$$\|x_0 - x_*\|^2_{G(x_0)} + \|y_0 - y^*\|^2_{G(y_0)} \geqslant \|x_{N+1} - x_*\|^2_{G(x_{N+1})} +$$

$$+\|y_{N+1} - y^*\|^2_{G(y_{N+1})} + \varepsilon\Big(\sum_{k=0}^{N}\|\bar{x}_k - x_{k+1}\|^2 + \sum_{k=0}^{N}\|\bar{y}_k - y_{k+1}\|^2 + \tag{22}$$

$$+\sum_{k=0}^{N}\|\bar{x}_k - x_k\|^2 + \sum_{k=0}^{N}\|\bar{y}_k - y_k\|^2\Big).$$

Из полученного неравенства (22) следует ограниченность траекторий

$$\|x_{N+1} - x_*\|^2_{G(x_{N+1})} + \|y_{N+1} - y^*\|^2_{G(y_{N+1})} \leqslant \|x_0 - x_*\|^2_{G(x_0)} + \|y_0 - y^*\|^2_{G(y_0)},$$

а также сходимость рядов

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\|\bar{x}_k - x_{k+1}\|^2 < \infty,\ \sum_{k=0}^{+\infty}\|\bar{x}_k - x_k\|^2 < \infty,$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\|\bar{y}_k - y_{k+1}\|^2 < \infty, \sum_{k=0}^{+\infty}\|\bar{y}_k - y_k\|^2 < \infty.$$

Тогда, в силу необходимого условия сходимости ряда,

$$\|\bar{x}_k - x_{k+1}\|^2 \to 0,\ \|\bar{x}_k - x_k\|^2 \to 0,\ \|\bar{y}_k - y_{k+1}\|^2 \to 0, \|\bar{y}_k - y_k\|^2 \to 0$$

при $k \to +\infty$. Так как последовательности $\{(x_k, y_k)\}$ и $\{\alpha_k\}$ ограничены, то существуют элементы $\{(x', y')\}$ и α' такие, что

$$x_{k_i} \to x',\ y_{k_i} \to y',\ \alpha_{k_i} \to \alpha'$$

при $k_i \to +\infty$, при этом

$$\|\bar{x}_{k_i} - x_{k_i+1}\|^2 \to 0,\ \|\bar{x}_{k_i} - x_{k_i}\|^2 \to 0,\ \|\bar{y}_{k_i} - y_{k_i+1}\|^2 \to 0, \|\bar{y}_{k_i} - y_{k_i}\|^2 \to 0.$$

Перейдем к пределу в уравнениях метода (2)-(5), тогда для всех $k_i \to +\infty$ получим:

$$x' = P_X^{G(x')}(x' - \alpha' G(x')^{-1} f'_x(x', y')),$$
$$y' = P_Y^{G(y')}(y' + \alpha' G(y')^{-1} f'_y(x', y')).$$

Эти соотношения соответствуют проекционной форме критерия оптимальности, следовательно, $x' = x_* \in X_*$, $y' = y^* \in Y^*$, то есть любая предельная точка последовательности $\{(x_k, y_k\}$ является решением задачи (1). Величина $\|x_k - x_*\| + \|y_k - y^*\|$ убывает, что обеспечивает единственность найденного решения, то есть сходимость $x_k \to x_*$, $y_k \to y^*$ при $k \to +\infty$. □

Список литературы

1. *Корпелевич Г. М.* Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач. Экономика и математические методы. 1976, т.12, вып. 4, 747-756.

2. *Антипин А. С., Артемьева Л. А., Васильев Ф. П.* Многокритериальное равновесное программирование: экстраградиентный метод. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 50:2 (2010), 234–241.

3. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. - М.: Издательство “Факториал Пресс“, 2002.

4. *Антипин А. С.* Равновесное программирование: методы градиентного типа. Автоматика и телемеханика. 1997. No.8. С.125-137.

5. *Дж. Деннис мл., Р. Шнабель* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений; - М.: Мир, 1988.