В.В. Лысиков, Б.В. Чокаев

О СИММЕТРИЯХ ТЕНЗОРНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ КОММУТАТОРА МАТРИЦ РАЗМЕРА 2 X 2*

Введение

В теории сложности алгебраических вычислений тензоры и их разложения изучаются в связи со сложностью мультилинейных отображений. Основная задача в этой области — задача о сложности умножения матриц.

Умножение матриц является билинейным отображением, и для изучения сложности билинейных отображений естественно рассматривать разложения вида

$$\varphi(x,y) = \sum_{p=1}^{r} f_p(x) g_p(y) z_p. \quad (1)$$

По такому разложению легко построить алгоритм вычисления φ, использующий r умножений. Алгоритмы такого вида называются *билинейными*, а число r — билинейной сложностью. Оказывается, что при изучении умножения матриц оптимальное количество умножений и общее количество арифметических операций в оптимальном алгоритме отличаются множителем, полилогарифмическим относительно размера перемножаемых матриц. Это позволяет ограничиться изучением разложений вида (1) при изучении асимптотического поведения сложности умножения матриц.

При изучении билинейных алгоритмов пользуются языком тензоров. Каждому билинейному отображению соответствует тензор, а разложения вида (1) соответствуют разложениям тензоров, которые называются полиадическими. Мы рассмотрим основные понятия, связанные с тензорами, в следующем разделе. В качестве более полного рассмотрения этой области теории сложности вычислений мы рекомендуем книги [1,5].

Несколько недавно появившихся работ посвящены изучению симметрий тензорных разложений, связанных с билинейными алгоритмами умножения матриц. Предполагается, что изучение симметричных разложений позволит эффективнее искать быстрые алгоритмы умножения матриц бо́льших размеров. В [11] изучаются симметрии разложения, на котором основан алгоритм Штрассена [7]. Это

---

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты № 18–31–00044-мол-а и № 17–01–00782-а

разложение с 7 слагаемыми для тензора, соответствующего умножению матриц размера 2×2. Также симметричные разложения этого тензора изучались в [8]. В [9] приведены симметричные разложения тензора умножения матриц 3×3 с 21 слагаемыми (на настоящий момент неизвестно, является ли это количество слагаемых оптимальным). В [4] рассматривается построение алгоритмов умножения квадратных матриц произвольного размера на основе теоретико-групповых конструкций, но сложность полученных алгоритмов велика.

В данной работе мы рассмотрим симметрии разложений для другого билинейного отображения, связанного с умножением матриц — коммутатора матриц размера 2×2.

Тензоры и полиадические разложения

Здесь и далее символы U, V и W означают конечномерные линейные пространства над некоторым полем F.

Тензорное произведение $U \otimes V \otimes W$ — это линейное пространство, состоящее из формальных сумм вида

$$\sum_{p=1}^{r} c_p(u_p \otimes v_p \otimes w_p), \quad \text{где } c_p \in F,\ u_p \in U,\ v_p \in V,\ w_p \in W,$$

причем символ $\otimes$ мультилинеен, то есть

$$(\sum_{i=1}^{\ell} a_i u_i) \otimes (\sum_{j=1}^{m} b_j v_j) \otimes (\sum_{k=1}^{n} c_k w_k) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_i b_j c_k (u_i \otimes v_j \otimes w_k). \qquad (2)$$

Два элемента $U \otimes V \otimes W$ равны тогда и только тогда, когда они могут быть получены друг из друга с помощью соотношения (2). Элементы тензорного произведения называются *тензорами*. Тензоры вида $u \otimes v \otimes w$ называются *элементарными*.

Из соотношения (2) следует, что для для любых линейных форм $f \in U^*$, $g \in V^*$, $h \in W^*$ равные тензоры $\sum_p c_p(u_p \otimes v_p \otimes w_p)$ имеют равные значения $\sum_p c_p f(u_p) g(v_p) h(w_p)$. Это позволяет доказать следующее простое утверждение:

Лемма 1. *Пусть $u_1, u_2 \in U$, $v_1, v_2 \in V$, $w_1, w_2 \in W$ — ненулевые векторы. Два элементарных тензора $u_1 \otimes v_1 \otimes w_1$ и $u_2 \otimes v_2 \otimes w_2$ равны тогда и только тогда, когда $u_1 = au_2$, $v_1 = bv_2$, $w_1 = cw_2$ и $abc = 1$.*

Доказательство. Докажем от противного, что $u_1 = au_2$. Если u_1 и u_2 линейно независимы, то существует линейная форма f, равная 0 на u_1 и 1 на u_2. Выберем g и h так, чтобы $g(v_2) \neq 0$ и $h(w_2) \neq 0$. Тогда $f(u_1)g(v_1)h(w_1) = 0 \neq f(u_2)g(u_2)h(u_2)$ и $u_1 \otimes v_1 \otimes w_1 \neq u_2 \otimes v_2 \otimes w_2$.

Аналогично, $v_1 = bv_2$ и $w_1 = cw_2$. Сравнивая значения $f(u_i)g(v_i)h(w_i)$ для произвольных ненулевых f, g, h, получаем $abc = 1$.

Заметим, что аналог этой леммы не верен при рассмотрении тензорных произведений модулей над кольцом.

Каждому тензору $T \in U^* \otimes V^* \otimes W$ можно поставить в соответствие билинейное отображение $U \times V \to W$: элементарному тензору $f \otimes g \otimes w$ соответствует отображение $\varphi(x,y) = f(x)g(y)w$, а линейной комбинации элементарных тензоров — соответствующая линейная комбинация билинейных отображений. Это соответствие взаимно однозначно — для каждого билинейного отображения φ существует представляющий его тензор, который называется *структурным тензором* φ.

Разложения вида (1) соответствуют представлениям тензоров в виде суммы элементарных тензоров

$$T = \sum_{p=1}^{r} f_p \otimes g_p \otimes w_p. \tag{3}$$

Такое разложение называется *полиадическим разложением* тензора T. Минимальное количество слагаемых в полиадическом разложении T называется *рангом* T. Таким образом, элементарные тензоры можно также называть тензорами ранга 1.

Аналогично, трилинейные формы $\psi: U \times V \times W \to F$ соответствуют тензорам из $U^* \otimes V^* \otimes W^*$, а полиадические разложения таких тензоров соответствуют разложениям вида

$$\psi(x,y,z) = \sum_{p=1}^{r} f_p(x) g_p(y) h_p(z).$$

Пусть даны линейные отображения $A: U \to U'$, $B: V \to V'$ и $C: W \to W'$. Тогда можно определить отображение

$$A \otimes B \otimes C: U \otimes V \otimes W \to U' \otimes V' \otimes W',$$

переводящее $u \otimes v \otimes w$ в $Au \otimes Bv \otimes Cw$. Два тензора называются эквивалентными, если существуют отображения вида $A \otimes B \otimes C$, переводящие их друг в друга. Так как отображения $A \otimes B \otimes C$ переводят полиадические разложения аргумента в полиадические разложения образа, ранги эквивалентных тензоров равны.

Симметрии тензоров и полиадических разложений

Для рассмотрения симметрий тензоров и их разложений введем несколько групп, действующих на пространстве тензоров.

Линейный оператор на пространстве $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ называется *Сегре-автоморфизмом*, если он переводит элементарные тензоры в элементарные. Известно [10], что если $\dim V_i > 1$ для всех i, то любой Сегре-автоморфизм задается перестановкой $\pi \in S_3$ такой, что $\dim V_i = \dim V_{\pi i}$ и набором обратимых линейных операторов $A_i: V_i \to V_{\pi i}$. Соответствующий Сегре-автоморфизм является композицией оператора $A_1 \otimes A_2 \otimes A_3$ и оператора

$$P_{\pi^{-1}}: V_{\pi 1} \otimes V_{\pi 2} \otimes V_{\pi 3} \to V_1 \otimes V_2 \otimes V_3,$$

переставляющего сомножители тензора:

$$P_{\pi^{-1}}(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = v_{\pi^{-1}1} \otimes v_{\pi^{-1}2} \otimes v_{\pi^{-1}3}.$$

Мы будем обозначать такой Сегре-автоморфизм символом $[A_1\otimes A_2\otimes A_3]_\pi$.

Все Сегре-автоморфизмы пространства $V_1\otimes V_2\otimes V_3$ образуют группу, которую мы будем обозначим $G(V_1\otimes V_2\otimes V_3)$. В ней выделим подгруппу Сегре-автоморфизмов с тождественной перестановкой π, то есть отображений вида $A_1\otimes A_2\otimes A_3$ с $A_i\colon V_i\to V_i$, которую мы будем называть *малой группой Сегре-автоморфизмов* и обозначать $G^0(V_1\otimes V_2\otimes V_3)$.

Отображение $(A_1,A_2,A_3)\mapsto A_1\otimes A_2\otimes A_3$ задает сюрьективный гомоморфизм $\mathrm{GL}(V_1)\times\mathrm{GL}(V_2)\times\mathrm{GL}(V_3)\to G^0(V_1\otimes V_2\otimes V_3)$. Из леммы 1 следует, что ядро этого гомоморфизма состоит из отображений вида $(a_1\,\mathrm{id},a_2\,\mathrm{id},a_3\,\mathrm{id})$ с $a_1a_2a_3=1$. Обозначим это ядро $K(V_1,V_2,V_3)$. Таким образом,

$$G^0(V_1\otimes V_2\otimes V_3)\cong\mathrm{GL}(V_1)\times\mathrm{GL}(V_2)\times\mathrm{GL}(V_3)/K(V_1,V_2,V_3).$$

Для заданного тензора $T\in U\otimes V\otimes W$ рассмотрим его стабилизатор в группе $G(U,V,W)$, то есть множество всех элементов $A\in G(U,V,W)$ таких, что $AT=T$. Стабилизатор является подгруппой $G(U,V,W)$. Мы будем называть эту подгруппу *группой изотропий* тензора T и обозначать ее $\Gamma(T)$. Аналогично определим *малую группу изотропий* $\Gamma^0(T)$ как стабилизатор T в $G^0(U\otimes V\otimes W)$. Имеем $\Gamma^0(T)=\Gamma(T)\cap G^0(U\otimes V\otimes W)$.

Для любого полиадического разложения $T=\sum_{p=1}^r u_p\otimes v_p\otimes w_p$ и любого элемента $A\in\Gamma(T)$ можно получить другое полиадическое разложение $T=\sum_{p=1}^r A(u_p\otimes v_p\otimes w_p)$ (здесь слагаемые являются элементарными тензорами, так как A — Сегре-автоморфизм). Таким образом, группа $\Gamma(T)$ действует на множестве всех полиадических разложений тензора T. Это действие впервые изучалось в работах де Гроота [2].

Для фиксированного разложения $T=\sum_{p=1}^r u_p\otimes v_p\otimes w_p$ можно рассмотреть его стабилизатор в группе $\Gamma(T)$, то есть подгруппу, состоящую из всех элементов $\Gamma(T)$, сохраняющих множество $D=\{u_p\otimes v_p\otimes w_p | 1\leqslant p\leqslant r\}$. Эту подгруппу будем называть *группой симметрии разложения* $P(D)$. Аналогично определим *малую группу симметрии разложения* $P^0(D)$ как подгруппу $\Gamma^0(T)$, оставляющую множество слагаемых неизменным. Вновь справедливо соотношение $P^0(D)=P(D)\cap G^0(U\otimes V\otimes W)$.

Таким образом определенная группа симметрий может быть бесконечной, например, для разложения $\sum_{p=1}^n e_p\otimes e_p\otimes e_p\in F^n\otimes F^n\otimes F^n$ группа симметрий содержит все отображений вида $\mathrm{diag}(a_1,\dots,a_n)\otimes\mathrm{diag}(b_1,\dots,b_n)\otimes\mathrm{diag}(c_1,\dots,c_n)$ где $a_ib_ic_i=1$ для всех i. Однако более типична ситуация, когда группа симметрий является конечной.

Определение 1. Будем говорить, что $n+1$ векторов в n-мерном векторном пространстве находятся в общем положении, если никакие n из них не являются линейно зависимыми.

Утверждение 1 ([3, Ex. 10.5])**.** *Пусть* $u_1, \dots, u_{n+1}$ *и* $v_1, \dots, v_{n+1}$ *— наборы векторов в общем положении в* n*-мерных пространствах* U *и* V *соответственно. Обратимый оператор* $A\colon U \to V$*, переводящий каждый вектор* u_i *в вектор, пропорциональный* v_i*, определен однозначно с точностью до умножения на константу.*

Теорема 1. *Пусть* $T \in V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ *— некоторый тензор и* $T = \sum_{p=1}^{r} v_{1p} \otimes v_{2p} \otimes v_{3p}$ *— полиадическое разложение* T*, причем для любого* i *среди векторов* v_{ip} *найдется набор из* $\dim V_i + 1$ *векторов в общем положении. Группа симметрии такого разложения есть конечная группа, изоморфная подгруппе* $S_r \times S_3$*.*

Доказательство. Любой оператор из группы симметрии разложения переставляет r слагаемых разложения. Пусть задана перестановка r слагаемых $\sigma \in S_r$ и перестановка $\pi \in S_3$. Докажем, что существует не более одного оператора вида $[A_1 \otimes A_2 \otimes A_3]_\pi$, осуществляющего перестановку σ.

Пусть
$$[A_1 \otimes A_2 \otimes A_3]_\pi(v_{1p} \otimes v_{2p} \otimes v_{3p}) = v_{1,\sigma p} \otimes v_{2,\sigma p} \otimes v_{3,\sigma p},$$
то есть
$$A_1 v_{1p} \otimes A_2 v_{2p} \otimes A_3 v_{3p} = v_{\pi 1,\sigma p} \otimes v_{\pi 2,\sigma p} \otimes v_{\pi 3,\sigma p}.$$
По лемме 1 получаем, что $A_i v_{ip}$ пропорционален $v_{\pi i,\sigma p}$. Взяв подмножество векторов v_{ip} в общем положении и зная векторы, пропорциональные их образам, мы можем определить A_i с точностью до константы. Это определяет с точностью до константы оператор $[A_1 \otimes A_2 \otimes A_3]_\pi$. Константа затем может быть найдена подстановкой одного из слагаемых в полученный оператор.

Таким образом, если перестановка σ осуществима оператором вида $[A_1 \otimes A_2 \otimes A_3]_\pi$ из группы $\Gamma(T)$, то этот оператор определен однозначно. Обозначим его $A_{\sigma,\pi}$. Легко видеть, что $A_{\sigma_2,\pi_2} A_{\sigma_1,\pi_1}$ осуществляет перестановку $\sigma_2 \circ \sigma_1$ и имеет вид $[A]_{\pi_2 \circ \pi_1}$. Следовательно, все реализуемые пары (σ, π) образуют подгруппу в $S_r \times S_3$.

Коммутатор матриц размера 2×2

Рассмотрим билинейное отображение, сопоставляющее двум матрицам X и Y размера 2×2 их коммутатор. Так как матрицы, кратные единичной, коммутируют с любой матрицей, достаточно рассматривать это отображение на пространстве матриц со следом 0. Коммутатор задает на этом пространстве структуру алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$.

Билинейные алгоритмы для этой задачи изучались Мирвальдом [6]. Структурный тензор алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ эквивалентен структурному тензору векторного умножения трехмерных векторов. Этот тензор, в свою очередь, эквивалентен структурному тензору смешанного произведения, который получается из него применением оператора $\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes D$, где

$D\colon F^3 \to (F^3)^*$ переводит вектор x в линейную форму $(x,-)$. Смешанное произведение сопоставляет трем векторам $x_1,x_2,x_3 \in F^3$ определитель $\det(x_1,x_2,x_3)$ матрицы, составленной из этих векторов.

Еще один эквивалентный тензор - это полностью антисимметричный тензор.

$$T_{alt} = \sum_{\pi\in S_3} (-1)^{\operatorname{sgn}\pi} e_{\pi 1}\otimes e_{\pi 2}\otimes e_{\pi 3} \in F^3\otimes F^3\otimes F^3,$$

Симметрии этого тензора — это следствия простейших свойств определителя — антисимметричности и соотношения $\det(AX) = \det A \det X$, которое в данном случае имеет вид $(A\otimes A\otimes A)T_{alt} = \det A\cdot T_{alt}$. Малая группа изотропий $\Gamma^0(T_{alt})$ состоит из отображений вида $\frac{1}{\det A}(A\otimes A\otimes A)$ [6]. Полная группа изотропий $\Gamma(\det_3)$ также учитывает антисимметричность и изоморфна $\Gamma^0(T_{alt}) \rtimes S_3$, где перестановка $\pi\in S_3$ действует перестановкой тензорных сомножителей и умножением на $(-1)^{\operatorname{sgn}\pi}$.

Ранг этого тензора равен 5. Мирвальд доказал, что все полиадические разложения ранга 5 эквивалентны относительно действия группы $\Gamma^0(T_{alt})$. Таким образом, достаточно рассмотреть симметрии одного из них

$$\begin{aligned} T_{alt} = {} & (e_2+e_3)\otimes(e_1+e_3)\otimes(e_1+e_2)+ \\ & +e_1\otimes e_2\otimes e_3- \\ & -e_2\otimes e_1\otimes(e_1+e_2+e_3)- \\ & -e_3\otimes(e_1+e_2+e_3)\otimes e_1- \\ & -(e_1+e_2+e_3)\otimes e_3\otimes e_2. \end{aligned} \tag{4}$$

Это разложение удовлетворяет условиям теоремы 1. Таким образом, для того, чтобы определить группу симметрий, достаточно указать, какие из перестановок 5 слагаемых реализуемы преобразованием из $\Gamma(T_{alt})$.

Лемма 2. *Группа $\Gamma(T_{alt})$, действующая на множестве всех элементарных тензоров, сохраняет инвариант $d(v_1\otimes v_2\otimes v_3) = \det(v_1,v_2,v_3)$.*

Доказательство.

$$d\left(\frac{1}{\det A}(A\otimes A\otimes A)(v_1\otimes v_2\otimes v_3)\right) = \frac{1}{\det A}\det(Av_1,Av_2,Av_3) = \\ = \det(v_1,v_2,v_3) = d(v_1\otimes v_2\otimes v_3).$$

$$d((-1)^{\operatorname{sgn}\pi} v_{\pi 1}\otimes v_{\pi 2}\otimes v_{\pi 3}) = (-1)^{\operatorname{sgn}\pi}\det(v_{\pi 1},v_{\pi 2},v_{\pi 3}) = \\ = \det(v_1,v_2,v_3) = d(v_1\otimes v_2\otimes v_3).$$

Теорема 2. *Группа симметрий разложения* (4) *изоморфна S_4. Малая группа симметрий — четверная группа Клейна $V\subset S_4$ (изоморфная $Z_2\times Z_2$).*

Доказательство. Значение инвариантного определителя для первого слагаемого разложения (4) равно 2, а для остальных — 1. Таким образом, любой элемент группы симметрий должен оставлять первое слагаемое на месте, переставляя 4 оставшихся. Введем обозначение $e_4 = -(e_1 + e_2 + e_3)$, которое позволяет переписать (4) в более симметричной форме

$$\begin{aligned} T_{alt} = {} & (e_2+e_3)\otimes(e_1+e_3)\otimes(e_1+e_2)+ \\ & +e_1\otimes e_2\otimes e_3+ \\ & +e_2\otimes e_1\otimes e_4+ \\ & +e_3\otimes e_4\otimes e_1+ \\ & +e_4\otimes e_3\otimes e_2. \end{aligned}$$

В каждом из трех сомножителей интересующие нас 4 слагаемых содержат векторы e_1, e_2, e_3, e_4, находящиеся в общем положении. Так как $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 0$, то любая перестановка $\sigma \in S_4$ задает линейный оператор $A_\sigma\colon F^3 \to F^3$, переводящий e_i в $e_{\sigma i}$. Для транспозиций (12), (13) и (14), порождающих группу S_4 верно $\det A_{(1i)} = -1$, откуда $\det A_\sigma = (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma}$.

Докажем, что для каждой перестановки $\sigma \in S_4$ найдется единственная перестановка $\pi \in S_3$ такая, что существует оператор $[(-1)^{\operatorname{sgn}\sigma}(-1)^{\operatorname{sgn}\pi}A_\sigma\otimes A_\sigma\otimes A_\sigma]_\pi \in \Gamma(T_{alt})$, лежащий в группе симметрий разложения (4).

Искомый оператор $[\pm A_\sigma^{\otimes 3}]_\pi$ должен переводить первое слагаемое в себя. Заметим, что $e_2 + e_3 = -(e_1 + e_4)$, $e_1 + e_3 = -(e_2 + e_4)$, $e_1 + e_2 = -(e_3 + e_4)$, так что первое слагаемое может быть записано в разных формах. Каждому индексу i сопоставим пары $\{a,b\}$ такие, что первое слагаемое может содержать сумму $e_a + e_b$ в i-м сомножителе, то есть индексу 1 соответствуют пары $\{1,4\}$ и $\{2,3\}$, индексу 2 — $\{1,3\}$ и $\{2,4\}$, а индексу 3 — $\{1,2\}$ и $\{3,4\}$. Так как для каждого индекса две соответствующие пары образуют разбиение множества $\{1,2,3,4\}$, любая перестановка $\sigma \in S_4$ переводит пары, соответствующие одному индексу также в пары, соответствующие одному индексу. Полученное отображение индексов задает перестановку $\pi \in S_3$, например, перестановке $\sigma = (14)$ соответствует $\pi = (23)$, так как σ переводит $\{1,4\}$ и $\{2,3\}$ в себя и меняет местами $\{1,3\} \leftrightarrow \{3,4\}$, $\{2,4\} \leftrightarrow \{1,2\}$.

Таким образом, условие сохранения первого слагаемого определяет перестановку $\pi \in S_3$ по перестановке $\sigma \in S_4$ однозначно. Более того, полученное отображение задает гомоморфизм $S_4 \to S_3$. Осталось проверить, что полученные операторы действительно являются симметриями разложения (4). Это достаточно сделать для трех транспозиций (12), (13) и (14), порождающих группу S_4.

Малая группа симметрий — ядро полученного гомоморфизма $S_4 \to S_3$. Это четверная группа Клейна, состоящая из тождественной перестановки и перестановок $(12)(34)$, $(13)(24)$, $(14)(23)$.

Можно дать геометрическую интерпретацию этих симметрий. Группа S_4 — это группа движений тетраэдра e_1, e_2, e_3, e_4. Четыре последних слагаемых разложения соответствуют вершинам тетраэдра, а сомножители первого слагаемого — осям, проходящим через вершины противоположных ребер.

Литература

1. *Bürgisser P., Clausen M., Shokroollahi M.A.* Algebraic Complexity Theory. Berlin: Springer, 1997. XXIII+618 P.
2. *De Groote H.F.* On varieties of optimal algorithms for the computation of bilinear mappings I. // Theoretical Computer Science. 1978. Vol. 7, Iss. 1. P. 1–24.
3. *Harris J.* Algebraic Geometry : A First Course. New York: Springer, 1992. XIX+330 P.
4. *Grochow J.A., Moore C.* Matrix multiplication algorithms from group orbits. 2016. Arxiv preprint 1612.01527. 16 P.
5. *Landsberg J.M.* Geometry and Complexity Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. XI+339 P.
6. *Mirwald R.* The Algorithmic Structure of sl(2,k) // Proceedings of the 3rd International Conference on Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes. Berlin: Springer, 1986. P. 274–287.
7. *Strassen V.* Gaussian elimination is not optimal. // Numerische Mathematik. 1969. Vol. 5, Iss. 4. P. 354–356.
8. The geometry of rank decompositions of matrix multiplication I: 2×2 matrices. / *Chiantini L., Ikenmeyer C., Landsberg J.M., Ottaviani G.* // Experimental Mathematics. 2017. Advance online publication. URL: `https://doi.org/10.1080/10586458.2017.1403981`
9. The geometry of rank decompositions of matrix multiplication II: 3×3 matrices. / *Ballard G., Ikenmeyer C., Landsberg J.M., Ryder N.* 2018. Arxiv preprint 1801.00843. 29 P.
10. *Westwick R.* Transformations on tensor spaces. // Pacific Journal of Mathematics. 1967. Vol. 23, Iss. 3. P. 613–620.
11. *Буриченко В.П.* Симметрии алгоритмов матричного умножения // Международная научная конференция «Дискретная математика, алгебра и их приложения» : Тезисы докладов. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2015. С. 7–8.