Чуркина С.Ю.

ПОИСК ЭФФЕКТИВНЫХ РЕШЕНИЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ЦЕЛЕВЫХ УРОВНЕЙ

I. Среди задач исследования операций часто встречаются такие, в которых качество принимаемого решения не удается оценить одним показателем. Принимать решение приходится в ситуации со многими критериями оценки качества имеющихся альтернатив, т.е. при наличии вектора критериев ([1],[2]).

В качестве оптимальных вариантов лицу, принимающему решение (ЛПР), предлагаются эффективные (оптимальные по Парето) или слабо эффективные (оптимальные по Слейтеру) значения вектора критериев. Для описания эффективного и слабо эффективного множеств традиционно используется метод сверток (см., например, [3]-[5], [6]), в котором все частные критерии свертываются в один глобальный путем приписывания им весовых коэффициентов. В данной работе предлагается другой метод, позволяющий задать параметризацию и аппроксимацию множеств Парето и Слейтера. Вместо весовых коэффициентов, которым реально не всегда удается придать содержательный смысл, используются целевые значения критериев (те значения критериев, которые ЛПР хотел бы получить, принимая во внимание реальную ситуацию) ([2], [5]-[7]).

II. Пусть $f(x)=(f_1(x),f_2(x),...,f_n(x))$ - векторный критерий оценки качества альтернатив, определенный на непустом и компактном множестве допустимых альтернатив $X\subset R^m$; непрерывные числовые функции $f_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, - частные критерии, которые максимизируются на множестве X; $F=\{y=f(x) \mid x\in X\}$ – множество векторных оценок.

Определение 1. Векторная оценка $y^0\in F$ называется *слабоэффективной (оптимальной по Слейтеру, s-оптимальной)*, если во множестве F не существует оценки y такой, что $y_i>y_i^0$, $\forall i=\overline{1,n}$. Любая альтернатива x^0, соответствующая оценке $y^0=f(x^0)$, называется слабоэффективной.

Множество всех оптимальных по Слейтеру оценок называется *множеством Слейтера* или *слабоэффективным множеством*. Обозначим его *sF*. Множество всех s-оптимальных альтернатив обозначим $S_F(X)$.

Рассмотрим следующую процедуру принятия решений. ЛПР назначает вектор целевых уровней $t=(t_1,t_2,...,t_n)$, где t_i - целевой уровень для значения i-го критерия (значение i-го критерия, которое ЛПР хотел бы получить). Далее во множестве F ищется точка, ближайшая к t в чебышевской метрике, т.е. решается задача:

$$\max_{i=\overline{1,n}} |\ t_i - f_i(x)\ | \to \min_{x\in X} \qquad (1)$$

Если найденная точка не устраивает ЛПР, он задает другой вектор целевых уровней, для которого опять решается задача (1).

Рассмотрим множество $T=\{t\in R^n |\ t_i \geq \max_{y\in F} y_i\ \forall i=\overline{1,n}\}$ и функцию $\varphi(t,y)=\max_{i=\overline{1,n}}(t_i-y_i)$, определенную на T. Поскольку функция $\varphi(t,y)$ непрерывна по y, то в силу компактности F при каждом $t\in T$ существует решение задачи $\varphi(t,y)\to\min_{y\in F}$. Введем множества $F_1(t)=\operatorname{Arg}\min_{y\in F}\varphi(t,y)$, непустые $\forall t\in T$. Справедливы следующие условия слабой эффективности векторных оценок.

Утверждение 1. Векторная оценка $y^0\in F$ является слабоэффективной тогда и только тогда, когда существует вектор $t\in T$ такой, что $y^0\in F_1(t)$.

Доказательство.

Достаточность доказана, например, в [7].

Докажем необходимость.

Пусть $y^0\in sF$. Докажем, что найдется такое $t\in T$, при котором функция $\varphi(t,y)$ достигает минимума в точке y^0 на множестве F.

Так как $y^0\in sF$, то для любой векторной оценки у из множества F существует такой номер i_1, что $y^0_{i_1}\geq y_{i_1}$.

Возьмем t^0 такой, что $t^0_i=y^0_i+c$, $i=\overline{1,n}$, где $c\geq\max_{i=\overline{1,n}}\{(\max_{y\in F} y_i)-y^0_i\}$, тогда $t^0\in T$ и $t^0_1-y^0_1=...=t^0_{i_1}-y^0_{i_1}=...=t^0_n-y^o_n=c$. Приняв за $\max_{i=\overline{1,n}}(t^0_i-y^0_i)$ величину $t^0_{i_1}-y^0_{i_1}$ и прибавив к обеим частям неравенства $-y^0_{i_1}\leq -y_{i_1}$ величину $t^0_{i_1}$, получим следующее:

$$\varphi(t^0,y^0)=\max_{i=\overline{1,n}}(t^0_i-y^0_i)=t^0_{i_1}-y^0_{i_1}\leq t^0_{i_1}-y_{i_1}\leq\max_{i=\overline{1,n}}(t^0_i-y_i)=\varphi(t^0,y)$$

$\forall y\in F$, т.е. $y^0\in F_1(t)$. Утверждение доказано.

Замечания. 1. Условия эффективности оценок можно легко переформулировать в условия эффективности альтернатив. А именно, альтернатива $x^0\in X$ является слабо эффективной тогда и только тогда, когда существует вектор $t \in T$ такой, что $x^0 \in X_1(t) = \operatorname{Arg}\min\limits_{x \in X} \varphi(t, f(x))$, где $\varphi(t, f(x)) = \max\limits_{i=\overline{1,n}}(t_i - f_i(x))$.

2. Пусть ЛПР указал целевую точку $t' \in R^n \setminus T$. Возьмем такое t'', что $t_i'' = t_i' + d$, где $d \ge \max\limits_{i=\overline{1,n}}\{(\max\limits_{y \in F} y_i) - t_i'\}$, $i = \overline{1,n}$, и, применив утверждение 1, найдем соответствующую оценку $y^0 \in sF$. Очевидно, для y^0 и t'' справедливы равенства $t_1'' - y_1^0 = t_2'' - y_2^0 = \ldots = t_n'' - y_n^0$. Учитывая, что $t_i'' = t_i' + d$, получаем для y^0 и t': $t_1' - y_1^0 = t_2' - y_2^0 = \ldots = t_n' - y_n^0$. Следовательно, t'' и t' принадлежат прямой $y_1 - y_1^0 = y_2 - y_2^0 = \ldots = y_n - y_n^o$, т.е. им соответствует одна и та же векторная оценка y^0, причем эта оценка не зависит от выбора d. Таким образом для любой точки целевых уровней можно найти соответствующую слабоэффективную векторную оценку.

3. Факт существования решения задачи $\varphi(t, y) \to \min\limits_{y \in F}$ $\forall t \in T$ позволяет ввести функцию $\theta(t) = \min\limits_{y \in F} \varphi(t, y) = \min\limits_{x \in X} \varphi(t, f(x))$, определенную на множестве $T'' = \{t \in R^n \mid \max\limits_{x \in X} f_i(x) \le t_i \le 2\max\limits_{x \in X} f_i(x) - \min\limits_{x \in X} f_i(x) \;\; \forall i = \overline{1,n}\}$. Из утверждения 1 (очевидно, оно останется справедливым, если T заменить на T'') и замечания 1 следует, что множества $S_F(X)$ и sF можно представить следующим образом:

1. $S_F(X) = \bigcup\limits_{t \in T''} X_1(t)$,
2. $sF = \bigcup\limits_{t \in T''} F_1(t)$, где $F_1(t) = \{y = f(x) \in F \mid x \in X_1(t)\}$,
3. $sF = \bigcup\limits_{t \in \hat{T}''} y(t)$ для
   $\hat{T}'' = \{t \in T \mid y(t) \in F_1(t)$, где $y_i(t) = t_i - \theta(t) \;\; \forall i = \overline{1,n}\}$,
4. $sF = \bigcup\limits_{t \in T''} \tilde{y}(t)$, где $\tilde{y}_i(t) = t_i - \theta(t)$ $\forall i = \overline{1,n}$, если оболочка Эджворта-Парето множества F – выпуклое множество.

<u>Определение 2</u>. *Оболочкой Эджворта-Парето* множества векторных оценок F в многокритериальной задаче максимизации называется множество $F_* = F - R^n_{\ge}$, где $R^n_{\ge} = \{y \in R^n \mid y_i \ge 0 \;\; \forall i = \overline{1,n}\}$.

Докажем третье представление. Четвертое доказывается аналогично, поскольку в силу выпуклости оболочки Эджворта-Парето все оценки вида $\tilde{y}(t)$ принадлежат F. Итак, если $y^0 \in sF$, то из доказательства необходимости в утверждении 1 следует существование такого $t^0 \in \hat{T}''$, что

$\min\limits_{y\in F}\varphi(t^0,y)=\varphi(t^0,y^0)=t_1^0-y_1^0=\ldots=t_n^0-y_n^0$. С другой стороны $\min\limits_{y\in F}\varphi(t^0,y)=\theta(t^0)$, т.е. для оценки y^0 справедливо представление: $y_i^0=t_i^0-\theta(t^0)$. Включение $\bigcup\limits_{t\in\hat{T}''}y(t)\subset sF$ доказывается рассмотрением указанных фактов в обратном порядке.

Пункты 3) и 4) замечания 3 позволяют значительно сократить число решаемых оптимизационных задач для описания слабо эффективного множества. В общем случае для каждой заданной ЛПР целевой точки t нужно найти $\theta(t)$ и проверить, принадлежит ли множеству F оценка $y(t)$ такая, что $y_i(t)=t_i-\theta(t)$. В случае же выпуклости оболочки Эджворта-Парето достаточно лишь найти $\theta(t)$ и вычислить $y(t)$.

Из непрерывности функции $\varphi(t,y)$ на произведении компактов T'', F следует

Утверждение 2. Функция $\theta(t)$ непрерывна на T''.

III. Рассмотрим точечно-множественное отображение $F_1(t)$ и его свойства.

Определение 2. Точечно-множественное отображение *B(x)* называется *полунепрерывным сверху* в точке $x^0\in X$, если из того, что $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=x^0$, $x^n\in X$, $\lim\limits_{n\to\infty}y^n=y^0$, $y^n\in B(x^n)$, следует, что $y^0\in B(x^0)$.

Определение 3: Точечно-множественное отображение *B(x)* называется *полунепрерывным снизу* в точке $x^0\in X$, если из того, что $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=x^0$, $x^n\in X$, $y^0\in B(x^0)$, вытекает существование последовательности $y^n\in B(x^n)$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty}y^n=y^0$.

Полунепрерывное сверху и снизу точечно-множественное отображение *B(x)*: $X\to 2^Y$ в случае, когда Y -- компакт, является *непрерывным по Хаусдорфу*.

Утверждение 2 имеет ряд следствий.

Следствие 1. Точечно–множественное отображение $F_1(t)$ полунепрерывно сверху на T''.

Доказательство.

Пусть $\lim_{n\to\infty} t^n = t^0$, $t^n, t^0 \in T''$ и $\lim_{n\to\infty} y^n = y^0$, $y^n \in F_1(t^n)$. Из справедливости $\forall y \in F$ неравенства $\varphi(t^n, y^n) \le \varphi(t^n, y)$ и непрерывности функции $\varphi(t, y)$ на произведении компактов T'', F следует, что $\varphi(t^0, y^0) = \lim_{n\to\infty} \varphi(t^n, y^n) \le \lim_{n\to\infty} \varphi(t^n, y) = \varphi(t^0, y)$ $\forall y \in F$, т.е. $y^0 \in F_1(t^0)$.

Рассмотрим теперь отображение $F_1(t)$ в тех точках $t \in T''$, в которых оно однозначно, а именно $F_1(t) = \{y(t)\}$, где $y_i = t_i - \theta(t)$, $i = \overline{1,n}$. Пусть $F_1(t^0) = \{y(t^0)\} = \{y^0\}$. Возьмем последовательность целевых точек $\{t^n\}_{n=1}^{\infty}$, $t^n \in T''$ такую, что $\lim_{n\to\infty} t^n = t^0$, и соответствующую последовательность векторных оценок $\{y^n\}_{n=1}^{\infty}$, такую, что $y_i^n = t_i^n - \theta(t^n)$. Тогда $\lim_{n\to\infty} y^n = y^0$ и $y^n \in F_1(t^n)$ (см. доказательство замечания 3). Таким образом, доказано

Следствие 2. Отображение $F_1(t)$ полунепрерывно снизу в тех точках $t \in T''$, в которых оно однозначно.

Следствие 3. Точечно-множественное отображение $F_1(t)$ непрерывно по Хаусдорфу в тех точках $t \in T''$, в которых оно однозначно.

Определение 2. Векторная оценка $y^0 \in F$ называется *эффективной (оптимальной по Парето, π-оптимальной)*, если во множестве F не существует оценки y такой, что $y_i \ge y_i^0$, $i = \overline{1,n}$, и хотя бы одно неравенство строгое. Любая альтернатива x^0, соответствующая оценке y^0, называется эффективной.

Множество всех оптимальных по Парето оценок называется *множеством Парето* или *эффективным множеством*. Обозначим его πF. Множество всех эффективных альтернатив обозначим $\Pi_F(X)$.

Утверждение 3. $\pi F = \bigcup_{t\in\hat{T}} y(t)$, где $\hat{T} = \{t \in T \mid F_1(t) = \{y(t)\}$, где $y_i(t) = t_i - \theta(t)$ $\forall i = \overline{1,n}\}$.

Доказательство.

1. В [7] показано, что если $F_1(t)$ однозначно, т.е. $F_1(t) = \{y(t)\}$, то $y(t) \in \pi F$. Отсюда и из замечания 3в) следует, что $\pi F \supset \bigcup_{t\in\hat{T}} y(t)$.

2. Докажем, что $\pi F \subset \bigcup_{t\in\hat{T}} y(t)$.

Из замечания 3в) следует, что $\forall y \in \pi F$ найдется такое $t \in \hat{T}$, что $y_i(t) = t_i - \theta(t)$ $\forall i = \overline{1,n}$. На самом деле $t \in \hat{T}$, поскольку $F_1(t)$ однозначно для $y \in \pi F$. Действительно, если предположить, что $F_1(t)=\{y,z\}$, то из π-оптимальности y следует, что найдется такой номер i_1, что $y_{i_1} > z_{i_1}$. Аналогично п.3 доказательства утверждения 1 получаем, что $\max\limits_{i=\overline{1,n}}(t_i - y_i) = t_{i_1} - y_{i_1} < t_{i_1} - z_{i_1} \le \max\limits_{i=\overline{1,n}}(t_i - z_i)$. А это противоречит тому, что $z \in F_1(t)$.

IV. Как следует из утверждения 1, точки максимума функции $\varphi(t, f(x))$ являются, вообще говоря, лишь слейтеровскими. Для выделения паретовских точек, следуя, например [2], будем максимизировать сумму критериев на множестве $X_1(t)$.

Определим множества

$$X_2(t)=\mathrm{Arg}\max_{x\in X_1(t)}\sum_{i=1}^{n} f_i(x) \text{ и } F_2(t)=\{y=f(x) \mid x\in X_2(t)\}.$$

<u>Утверждение 4</u>.

1) $\Pi_F(X)=\bigcup\limits_{t\in T''} X_2(t)$; 2) $\pi F=\bigcup\limits_{t\in T''} F_2(t)$.

<u>Доказательство.</u>

1. Возьмем произвольное $t\in T''$. Тогда $X_2(t)\subset \Pi_F(X)$ и $F_2(t)\subset \pi F$. Действительно, если предположить, что некая произвольная альтернатива x^0 из $X_2(t)$ не является π-оптимальной, а является лишь оптимальной по Слейтеру, то в множестве $X_1(t)$ существует альтернатива $\tilde{x}$ такая, что $f_i(\tilde{x})\ge f_i(x^0)$, $i=\overline{1,n}$, где хотя бы одно неравенство строгое. Сложив все эти неравенства, получаем противоречие с тем, что $x^0\in X_2(t)$.

3. Докажем теперь справедливость включений

$$\Pi_F(X)\subset\bigcup_{t\in T} X_2(t),\ \ \pi F\subset\bigcup_{t\in T} F_2(t).$$

По утверждению 1 $\forall x^0\in S_F(X)$ (а следовательно и $\Pi_F(X)$) существует вектор целевых уровней $t^0\in T''$ такой, что $t_i^0=y_i^0+c$, $\max\limits_{i=\overline{1,n}}\{(\max\limits_{y\in F} y_i)-t_i'\}\le c_i$, $i=\overline{1,n}$, и $x^0\in X_1(t^0)$. Пусть $y^0=f(x^0)$, $y^0\in\pi F$.

Выше доказано, что $F_1(t^0)=\{y^0\}$. Отсюда $F_2(t^0)=\{y^0\}$, что доказывает справедливость включения $\pi F\subset\bigcup\limits_{t\in T} F_2(t)$.

Пусть точка x^0, принадлежащая множеству $X_1(t^0)$, не принадлежит множеству $X_2(t^0)$, тогда функция $\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$ достигает максимума в какой-то другой точке x' множества $X_1(t^0)$. Согласно п.1 доказательства $x' \in \Pi_F(X)$, значит, по п.2 $f(x^0) = f(x') = y^0$, откуда $\sum_{i=1}^{n} f_i(x^0) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x') = \max_{x \in X_1(t^0)} \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$ и x^0 все-таки принадлежит $X_2(t^0)$.

V. В непрерывных задачах многокритериальной оптимизации множество Слейтера обычно состоит из бесконечного числа элементов. Чтобы его найти, ЛПР надо перебрать бесконечное число векторов целевых уровней. В реальной ситуации такое невозможно, поэтому возникает вопрос о возможности аппроксимировать слабоэффективное и эффективное множества конечными множествами. Следующее утверждение показывает, что, взяв конечную сеть целевых точек на множестве T'', получим аппроксимацию эффективного множества конечной сетью векторных оценок.

Определение 3. Конечной δ-сетью во множестве P называется конечное число точек $P^\delta \subset P$ таких, что $\forall p \in P$ найдется точка $p^\delta \in P^\delta$, для которой $\left\| p - p^\delta \right\| < \delta$.

Здесь и далее под расстоянием между элементами будет пониматься расстояние между ними в Чебышевской метрике.

Пусть X - выпуклый компакт, f непрерывна и строго квазивогнута, тогда согласно [3] множество πF - компакт. Пусть, кроме того, оболочка Эджворта-Парето множества F - выпуклое множество.

Утверждение 5. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta^* > 0$ такое, что для любой конечной δ-сети $T^\delta \subset T''$ $(0 < \delta \le \delta^*)$ множество $\bigcup_{t \in T^\delta} \{y(t)\}$, $y(t) \in F_2(t)$, образует ε-сеть во множестве πF.

Доказательство.

Предположим, что множество $\bigcup_{t \in T^\delta} \{y(t)\}$ не образует ε-сети во множестве πF. Это означает, что найдется такое $\varepsilon^0 > 0$, что для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ существует δ^0-сеть $T^{\delta^0} \subset T''$ $(0 < \delta^0 \le \delta)$, для которой выполняется следующее: во множестве πF существует оценка $y'(\delta^0)$ такая, что $\forall y \in \bigcup_{t \in T^{\delta^0}} \{y(t)\}$ $\left\| y - y'(\delta^0) \right\| \ge \varepsilon^0$.

Рассмотрим последовательность $\{(\delta^0)^k\}_{k=1}^{\infty}=\{\delta^k\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что $\lim\limits_{k\to\infty}\delta^k=0$, и соответствующую ей последовательность векторных оценок $y'(\delta^k)\in\pi F$ таких, что $\forall y\in\bigcup\limits_{t\in T^{\delta^k}}\{y(t)\}$ $\left\|y-y'(\delta^k)\right\|\ge\varepsilon^0$. Из последовательности $\{y'(\delta^k)\}_{k=1}^{\infty}$ выделим сходящуюся к некоторой точке $y^*\in\pi F$ подпоследовательность $\{y'(\delta^{k_m})\}_{k_m=1}^{\infty}=\{y'(\delta^m)\}_{m=1}^{\infty}$ (это возможно вследствие компактности множества πF).

Последовательности векторных оценок $\{y'(\delta^m)\}_{m=1}^{\infty}$ соответствует последовательность целевых точек $\{t'^m\}_{m=1}^{\infty}$, $t'^m\in T''$, таких, что $y'_i(\delta^m)=t'^m_i-\theta(t'^m)$, а оценке y^*- целевая точка $t^*\in T''$, $y^*_i=t^*_i-\theta(t^*)$. При этом $\lim\limits_{m\to\infty}t'^m=t^*$. Действительно, если допустить, что существует подпоследовательность элементов $t'^{m_l}\in T''$, сходящаяся к некоторому элементу $\hat{t}\in T''$, то в силу непрерывности функции $\theta(t)$ на множестве T'' последовательность элементов $\theta(t'^{m_l})$ сходится к $\theta(\hat{t})$, и в силу того, что $\lim\limits_{m_l\to\infty}y'_i(\delta^{m_l})=y^*_i$, получаем, что $t^*_i=\hat{t}_i$.

Для каждого δ^m и соответствующего $t'^m\in\tilde{T}$ рассмотрим элемент t^m из δ^m-сети T^{δ^m} такой, что $\left\|t^m-t'^m\right\|<\delta^m$ (такой элемент существует по определению δ^m-сети). Тогда с учетом того, что $\lim\limits_{m\to\infty}t'^m=t^*$, получаем, что $\lim\limits_{m\to\infty}t^m=t^*$.

Для $y(t^m)\in F_1(t^m)$, $y(t^m)\in\bigcup\limits_{t\in T^{\delta^m}}\{y(t)\}$ в силу выпуклости оболочки Эджворта-Парето множества F справедливо (см. п.4 замечания 3), что $y(t^m)=t^m_i-\theta(t^m)$. Тогда $\{y(t^m)\}=F_1(t^m)=F_2(t^m)$.

Для $y(t^m)$ и $y'(\delta^m)$ по допущению должно выполняться: $\left\|y(t^m)-y'(\delta^m)\right\|\ge\varepsilon^0$ для некоторого $\varepsilon^0>0$, что невозможно, т.к. вследствие непрерывности по Хаусдорфу отображения $F_2(t)$ $\lim\limits_{m\to\infty}y(t^m)=y(t^*)=y^*$, и тогда $\lim\limits_{m\to\infty}\left\|y(t^m)-y'(\delta^m)\right\|=y^*-y^*=0$.

Литература:

1. Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций. - М.: Наука, 1971.
2. Charnes A., Cooper W.W. Management Models and Industrial Applications of Linear Programming. – Wiley, New York, 1961.
3. Дубов Ю. А., Травкин С.И., Якимец В.Н. Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. – М.: Наука, 1986.
4. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982.
5. Штойер Р. Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения. – М.: Радио и связь, 1992.
6. Miettinen K. Nonlinear Multiobjective Optimization. – Kluwer Academic Publishers, Boston, 1999
7. Wierzbicki A. A. Mathematical Basis for Satisficing Decision Making. // Mathematical Modelling 3, №5, 1982, 391-405.