

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета ВМК МГУ  
имени М.В. Ломоносова

академик



Е.И.Моисеев

» \_\_\_\_\_ 2017 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

**«Спектральная теория самосопряженных операторов»**

Уровень высшего образования – подготовка научно-педагогических кадров в аспирантуре

Направление подготовки – 01.06.01 «Математика и механика»

Направленность (профиль) – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» (01.01.02)

2017 г.

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

### 1. НАИМЕНОВАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Спектральная теория самосопряженных операторов

### 2. УРОВЕНЬ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Подготовка научно-педагогических кадров в аспирантуре

### 3. НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ, НАПРАВЛЕННОСТЬ (ПРОФИЛЬ) ПОДГОТОВКИ

Направление подготовки – 01.06.01 «Математика и механика»

Направленность (профиль) – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» (01.01.02)

### 4. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина относится к специальным дисциплинам вариативной части образовательной программы и является дисциплиной по выбору.

### 5. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ

Дисциплина участвует в формировании следующих компетенций образовательной программы:

| Формируемые компетенции   | Планируемые результаты обучения   |
|---|---|
| <b>ПК-1: владение современными методами построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также методами разработки и реализации алгоритмов их решения на основе фундаментальных знаний в области математики и информатики</b> | ЗНАТЬ: классические методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также базовые методы разработки и реализации алгоритмов их решения;<br>УМЕТЬ: применять классические методы построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также базовые методы разработки и реализации алгоритмов их решения;<br>ВЛАДЕТЬ: базовыми навыками выбора методов построения и анализа математических моделей, возникающих при решении естественнонаучных задач, а также методов разработки и реализации алгоритмов их решения. |

|   |  |
|---|--|
| <p><b>ОПК-1: способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий</b></p> | <p>ЗНАТЬ: основные методы математического анализа классических задач в области естественных наук;</p> <p>УМЕТЬ: применять классические методы построения математических моделей, а также стандартные аналитические и численные методы их анализа;</p> <p>ВЛАДЕТЬ: базовыми навыками определения границ применимости математических моделей и интерпретации результатов их анализа.</p> |
|---|--|

Оценочные средства для промежуточной аттестации приведены в Приложении.

## 6. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

Объем дисциплины составляет 3 зачетных единицы, всего 108 часов.

Из них 36 часа составляет контактная работа студента с преподавателем (32 часа занятия лекционного типа, 2 часа мероприятия текущего контроля успеваемости, 2 часа мероприятия итоговой аттестации).

72 часа составляет самостоятельная работа аспиранта.

## 7. ВХОДНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Учащиеся должны владеть знаниями по курсам обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений математической физики и функционального анализа в объеме, соответствующем основным образовательным программам бакалавриата и магистратуры по укрупненным группам направлений и специальности 01.00.00 «Математика и механика».

## 8. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Электронное обучение и дистанционные технологии не применяются. Процесс изложения учебного материала может сопровождаться презентациями с использованием мультимедийного проектора.

## 9. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Спецкурс посвящен исследованию спектральных свойств операторов Штурма-Лиувилля и Дирака на конечных и бесконечных интервалах, а также оператора Лапласа в ограниченной области. Кроме того, изучаются различные функциональные пространства и вопросы спектральной теории для абстрактных самосопряженных операторов.

| Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины, форма промежуточной аттестации по дисциплине   | Всего (часы)              | В том числе   |                             |   |       |                             |  |       |    |           |
|---|---------------------------|---|-----------------------------|---|-------|-----------------------------|--|-------|----|-----------|
|   |                           | Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы |                             |   |       |                             | Самостоятельная работа учащегося, часы |       |    |           |
|   |                           | из них  |                             |   |       |                             | из них                                 |       |    |           |
| Занятия лекционного типа  | Занятия семинарского типа | Групповые консультации  | Индивидуальные консультации | Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости: коллоквиумы, практические контрольные занятия и др. | Всего | Выполнение домашних заданий | Подготовка рефератов и т.п..           | Всего |    |           |
| <b>Тема 1.Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля на полупрямой</b><br><br>Теорема о разложении в интеграл Фурье.<br>Круг и точка Вейля для оператора Штурма-Лиувилля на полупрямой, достаточные условия.<br>Теоремы Исмагилова.<br>Индексы дефекта.<br>Спектральная мера и функция Вейля- | <b>10</b>                 | 10  | -                           | -   | -     | -                           | <b>10</b>                              | -     | 20 | <b>20</b> |

|   |           |    |   |   |   |   |           |   |    |           |
|---|-----------|----|---|---|---|---|-----------|---|----|-----------|
| Титчмарша. Достаточные условия дискретности спектра.  |           |    |   |   |   |   |           |   |    |           |
| <b>Тема 2. Одномерная система Дирака</b><br>Основные свойства, подобие общей системы внедиагональной. Асимптотика собственных значений и собственных функций. Оценки функции Грина. Полнота и базисность системы СПФ. | <b>6</b>  | 6  | - | - | - | - | <b>6</b>  | - | 16 | <b>16</b> |
| <b>Промежуточная аттестация: устный опрос</b>   | <b>2</b>  | -  | - | - | - | - | <b>2</b>  | - | -  | -         |
| <b>Тема 3. Пространства Соболева и Лиувилля</b><br>Теоремы вложения для функций из пространств Соболева и Лиувилля. Неравенства Фридрикса и Пуанкаре. Основные краевые задачи для оператора Лапласа.                  | <b>10</b> | 10 | - | - | - | - | <b>10</b> | - | 20 | <b>20</b> |
| <b>Тема 4. Разложения по собственным функциям оператора Лапласа.</b>  | <b>6</b>  | 6  | - | - | - | - | <b>6</b>  | - | 16 | <b>16</b> |

|   |            |   |   |   |   |   |           |           |   |   |  |
|---|------------|---|---|---|---|---|-----------|-----------|---|---|--|
| <b>Теорема В.А.Ильина</b><br>Фундаментальные системы функций и их свойства. Устройство спектра произвольной ФСФ. Точные условия локализации и равномерной сходимости разложений по ФСФ в классах Соболева-Лиувилля. |            |   |   |   |   |   |           |           |   |   |  |
| <b>Итоговая аттестация:<br/>Экзамен</b>   | 2          | - | - | - | - | - | 2         | -         | - | - |  |
| <b>Итого</b>  | <b>108</b> |   |   |   |   |   | <b>36</b> | <b>72</b> |   |   |  |

## 10.УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ УЧАЩИХСЯ

Самостоятельная работа учащихся состоит в изучении лекционного материала, учебно-методической литературы, подготовки к экзамену и промежуточной аттестации.

## 11.РЕСУРСНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

### Основная учебно-методическая литература

1. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака, Москва: Мир, 1988.
2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы, Москва: Наука, 1969.
3. М.Рид. Б.Саймон. Методы математической физики. Москва, Мир, том 2, 1978.
4. В.А.Ильин. Спектральная теория дифференциальных операторов. Москва, Наука, 1991.

### **Дополнительная учебно-методическая литература**

1. Лидский В.Б. Несамосопряженный оператор типа Штурма-Лиувилля с дискретным спектром // Труды ММО, т.9, №45, стр. 45-79, 1960.
2. Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ: Университетский курс. РХД, 2009. - 724 стр.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики, Москва: Наука, 1988. – 512 стр.
4. Савчук А.М., Шкалик А.А. Операторы Штурма-Лиувилля с потенциалами - распределениями, Труды ММО, Т. 64, 2003, с. 159-219.
5. Садовнича И.В. О равносходимости разложений в ряды по собственным функциям операторов Штурма—Лиувилля с потенциалами-распределениями, Мат. сборник, Т. 201, № 9, 2010, стр. 61-76.
6. Смирнов В.И. Курс высшей математики. т. 5, Москва, 1959г.
7. У.Еgorov, V.Kondratiev. On spectral theory of elliptic operator. Basel. Boston. Berlin.Birkhauser. 1996.
8. С.Л.Соболев Некоторые применения функционального анализа в математической физике., Москва, Наука, 1988.
9. С.М. Никольский. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. Москва, Наука, 1969.
10. Г.Н.,Ватсон. Теория бесселевых функций, том. 1, Москва, ИЛ, 1949.

### **Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»**

1. [www.arxiv.org](http://www.arxiv.org)
2. [www.mathnet.ru](http://www.mathnet.ru)

### **Информационные технологии**

1. Программное обеспечение для подготовки слайдов лекций MS PowerPoint
2. Программное обеспечение для создания и просмотра pdf-документов Adobe Reader
3. Издательская система LaTeX.

## **12. ЯЗЫК ПРЕПОДАВАНИЯ**

Русский

## **13. РАЗРАБОТЧИК ПРОГРАММЫ**

Разработчики – д.ф.-м.н., профессор Денисов Василий Николаевич; д.ф.-м.н., профессор Садовнича Инна Викторовна.

**ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

**«Спектральная теория самосопряженных операторов»**

Средства для оценивания планируемых результатов обучения, критерии и показатели оценивания приведены ниже.

| РЕЗУЛЬТАТ ОБУЧЕНИЯ по дисциплине (модулю)  | КРИТЕРИИ и ПОКАЗАТЕЛИ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТА ОБУЧЕНИЯ по дисциплине из соответствующих Карт компетенций |  |   |  |   | ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА |
|--|--|--|---|--|---|--------------------|
|  | 1  | 2  | 3   | 4  | 5   |                    |
|  | <i>Неудовлетворительно</i>   | <i>Неудовлетворительно</i>   | <i>Удовлетворительно</i>  | <i>Хорошо</i>  | <i>Отлично</i>  |                    |
| <i>Знать</i> основные понятия, возникающие в спектральной теории дифференциальных операторов<br><b>Код 31 (ПК-1)</b> | отсутствие знаний  | фрагментарные представления об основных понятиях спектральной теории                           | сформированные представления об основных понятиях спектральной теории                           | сформированные представления об основных понятиях спектральной теории дифференциальных операторов, знание различных примеров | Систематизированные знания об основных понятиях спектральной теории дифференциальных операторов и глубокое понимание их свойств           | Устный опрос       |
| <i>Знать</i> основные принципы исследования спектральных свойств операторов<br><b>Код 31 (ПК-1)</b>                  | отсутствие знаний  | фрагментарные представления об основных принципах исследования спектральных свойств операторов | сформированные представления об основных принципах исследования спектральных свойств операторов | сформированные представления об основных принципах исследования спектральных свойств операторов, с примерами                 | Системные знания об основных принципах исследования спектральных свойств операторов, понимание их взаимосвязи с другими областями анализа | Устный экзамен     |
| <i>Уметь</i> устанавливать   | отсутствие уме-  | фрагментарные  | умение выяснить   | умение изучать вопросы   | умение устанавли-   | Устный опрос       |



|  |                          |   |   |   |   |                       |
|--|--------------------------|---|---|---|---|-----------------------|
| <p>вать факты полноты и базисности систем и наличия сходимости, опираясь на теоретические знания</p> <p><b>Код У1 (ОПК-1)</b></p>            | <p>ний</p>               | <p>представления о методах исследования вопросов полноты, базисности и сходимости</p> | <p>асимптотическое поведение систем корневых функций операторов</p>     | <p>сходимости, опираясь на асимптотическое поведение функций системы</p>  | <p>вать факты полноты и базисности системы функций, опираясь на ее свойства и основные принципы спектральной теории</p> |                       |
| <p><i>Уметь</i> применять методы исследования спектральных свойств к конкретным дифференциальным операторам</p> <p><b>Код У1 (ОПК-1)</b></p> | <p>отсутствие умений</p> | <p>фрагментарные представления о методах исследования спектральных свойств</p>        | <p>умение описать основные свойства некоторых конкретных операторов</p> | <p>умение исследовать поведение собственных значений и собственных функций конкретных дифференциальных операторов</p> | <p>Умение полностью исследовать спектральные свойства конкретных дифференциальных операторов</p>                        | <p>Устный экзамен</p> |

## ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ

*Вопросы к экзамену.*

1. Оператор Штурма-Лиувилля на полупрямой. Теорема о разложении в интеграл Фурье.
2. Круг и точка Вейля для оператора Штурма-Лиувилля на полупрямой.
3. Достаточные условия для случаев круга и точки Вейля. Теоремы Исмагилова.
4. Индексы дефекта.
5. Спектральная мера и функция Вейля-Титчмарша. Достаточные условия дискретности спектра.
6. Определение и основные свойства одномерной системы Дирака.
7. Подобие общей системы внедиагональной.
8. Асимптотика собственных значений и собственных функций оператора Дирака.
9. Оценки функции Грина.
10. Полнота и базисность системы СПФ оператора Дирака с суммируемым потенциалом.
11. Формула среднего значения для функций из ФСФ оператора Лапласа.
12. Оценки суммы квадратов фундаментальных функций и следствия из них.

13. Устройство спектра произвольной ФСФ оператора Лапласа.
14. Ядра дробного порядка.
15. Оценка спектральной функции в метрике  $L_2$ .
16. Условия локализации и равномерной сходимости разложений по ФСФ оператора Лапласа в классах Соболева-Лиувилля.
17. Энергетические теоремы о проблеме собственных чисел.
18. Задача Дирихле для эллиптического оператора второго порядка.
19. Основные краевые задачи для неоднородного уравнения Лапласа.
20. Процесс Ритца и теоремы о приближении собственных значений положительного определенного оператора.

### **Методические материалы для проведения процедур оценивания результатов обучения**

#### **Особенности организации процесса обучения**

Для эффективного освоения курса рекомендуется перед каждым занятием привести в порядок конспекты лекций. После каждого занятия рекомендуется найти и прочитать дополнительную литературу по теме лекции и прочитать свои конспекты.

#### **Система контроля и оценивания**

По итогам каждого устного опроса выставляются баллы (максимум 10 баллов за каждый вид работы). Пусть  $M$  – максимальное число баллов, которое может набрать студент. В конце семестра баллы конвертируются в оценку  $O_1$  следующим образом:

меньше  $M/2$  баллов –  $O_1=2$ ;

больше или равно  $M/2$  баллов, но меньше  $2M/3$  –  $O_1=3$ ;

больше или равно  $2M/3$  баллов, но меньше  $5M/6$  –  $O_1=4$ ;

больше или равно  $5M/6$  баллов –  $O_1=5$ .

На экзамене оценка  $O_1$  является стартовой. Окончательная оценка определяется исходя из оценки устного ответа студента, при этом она не может быть меньше предварительной оценки и не может быть больше её более чем на 1 балл.

#### **Структура и график контрольных мероприятий**

Устные опросы на 3-й, 8-й и 14-й неделях; устный экзамен в конце семестра.