

А.Г. Давыдов, Е.В. Захаров, Ю.В. Пименов

О ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ОДНОРОДНЫХ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТЕЛАХ

В цикле работ [1-3] были разработаны алгоритмы численного решения гиперсингулярных интегральных уравнений, возникающих в плоских и векторных задачах дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих незамкнутых поверхностях.

На основе этих алгоритмов в течение ряда лет были получены решения большого числа задач (см., напр., обзоры в [4,5]). Разработан комплекс программ «ЭДЭМ» [6], представляющий собой систему для автоматизированного исследования на персональной ЭВМ электродинамических свойств проводящих структур сложной конфигурации.

В настоящей работе показывается, что гиперсингулярные интегральные уравнения можно с успехом использовать и для численного решения задач дифракции электромагнитных волн на магнитодиэлектрических телах, причем в этом случае задача допускает сведение к поверхностным уравнениям с простыми по структуре ядрами, позволяющим использовать уже разработанные вычислительные схемы.

Рассмотрим задачу дифракции монохроматического электромагнитного поля на однородном магнитодиэлектрическом теле, ограниченном поверхностью S . Область пространства, которую занимает тело, обозначим через V_2 , остальную часть через V_1 (рис.1). Относительные диэлектрические и магнитные проницаемости окружающей среды и тела обозначим соответственно через ϵ_1, μ_1 и ϵ_2, μ_2 .

Векторы возбуждающего электромагнитного поля обозначим через \vec{E}_1^0, \vec{H}_1^0 и \vec{E}_2^0, \vec{H}_2^0 в областях V_1 и V_2 соответственно. Это поле обусловлено сторонними источниками $\vec{j}_{cm1}^o, j_{cm1}^m$, находящимися в области V_1 , и сторонними источниками $\vec{j}_{cm2}^o, j_{cm2}^m$ в области V_2 . Зависимость полей от времени дается множителем $e^{i\omega t}$, который для краткости далее всюду опущен.

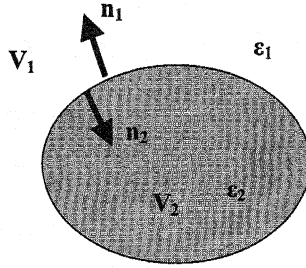


Рис. 1

Требуется найти векторы \vec{E}_1, \vec{H}_1 и \vec{E}_2, \vec{H}_2 полного электромагнитного поля в областях V_1 и V_2 соответственно. Искомое поле в точке M вне поверхности S должно удовлетворять уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H}_i &= i\omega \vec{E}_i + \vec{j}_{si}^{cm}, \\ \text{rot } \vec{E}_i &= -i\omega \mu \vec{H}_i - \vec{j}_{mi}^{cm}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $i=1$ при $M \in V_1$ и $i=2$ при $M \in V_2$. На самой поверхности S должны выполняться условия непрерывности касательных составляющих векторов поля

$$[\vec{E}_1, \vec{n}_1] = [\vec{E}_2, \vec{n}_1], \quad [\vec{H}_1, \vec{n}_1] = [\vec{H}_2, \vec{n}_1], \quad (2)$$

где \vec{n}_1 - нормаль к поверхности S , направленная в сторону V_1 . Кроме того, поле \vec{E}_1, \vec{H}_1 в области V_1 должно удовлетворять условиям излучения.

В соответствии с теоремой эквивалентности поле в области V_1 можно представить в виде

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= -\frac{i}{\omega \epsilon_0 \epsilon_1} \text{grad div} \int_S \vec{j}_1^s G(k_1 L) dS - \\ &\quad - i\omega \mu_0 \mu_1 \int_S \vec{j}_1^m G(k_1 L) dS - \text{rot} \int_S \vec{j}_1^m G(k_1 L) dS + \vec{E}_1^0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_1 &= -\frac{i}{\omega \mu_0 \mu} \text{grad div} \int_S \vec{j}_1^m G(k_1 L) dS - \\ &\quad - i\omega \epsilon_0 \epsilon_1 \int_S \vec{j}_1^m G(k_1 L) dS + \text{rot} \int_S \vec{j}_1^s G(k_1 L) dS + \vec{H}_1^0, \end{aligned} \quad (4)$$

где эквивалентные электрические \vec{j}_1° и магнитные \vec{j}_1^M токи определяются соотношениями

$$\vec{j}_1^{\circ} = \vec{n}_1 \times \vec{H}_1 \Big|_S, \quad \vec{j}_1^M = -\vec{n}_1 \times \vec{E}_1 \Big|_S. \quad (5)$$

В выражениях (3), (4) через ε_0 и μ_0 обозначены электрическая и магнитная постоянные, $G(kL) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ikL}}{L}$, L -расстояние между точкой интегрирования Q и точкой наблюдения M , $k_1 = \sqrt{\varepsilon_1} k$, $k = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$, ω - круговая частота.

Аналогично для области V_2

$$\begin{aligned} \vec{E}_2 = & -\frac{i}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_2} \text{grad div} \int_S \vec{j}_2^{\circ} G(k_2 L) dS - \\ & - i \omega \mu_0 \mu_2 \int_S \vec{j}_2^M G(k_2 L) dS - \text{rot} \int_S \vec{j}_2^M G(k_2 L) dS + \vec{E}_2^0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_2 = & -\frac{i}{\omega \mu_0 \mu_2} \text{grad div} \int_S \vec{j}_2^M G(k_2 L) dS - \\ & - i \omega \varepsilon_0 \varepsilon_2 \int_S \vec{j}_2^{\circ} G(k_2 L) dS + \text{rot} \int_S \vec{j}_2^{\circ} G(k_2 L) dS + \vec{H}_2^0, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\vec{j}_2^{\circ} = \vec{n}_2 \times \vec{H}_2 \Big|_S, \quad \vec{j}_2^M = -\vec{n}_2 \times \vec{E}_2 \Big|_S. \quad (8)$$

Представленное таким образом поле удовлетворяет уравнениям Максвелла и условиям излучения в области V_1 .

Осталось удовлетворить граничным условиям (2). В силу (5) и (8) это можно сделать, положив

$$\vec{j}_1^{\circ} = -\vec{j}_2^{\circ}, \quad \vec{j}_1^M = -\vec{j}_2^M.$$

Обозначив

$$\vec{j}^{\circ} = \vec{j}_1^{\circ} = -\vec{j}_2^{\circ}, \quad \vec{j}^M = \vec{j}_1^M = -\vec{j}_2^M, \quad (9)$$

приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 = & -\frac{i}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1} \text{grad div} \int_S \vec{j}^{\circ} G(k_1 L) dS - \\ & - i \omega \mu_0 \mu \int_S \vec{j}^{\circ} G(k_1 L) dS - \text{rot} \int_S \vec{j}^M G(k_1 L) dS + \vec{E}_1^0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_1 = & -\frac{i}{\omega\mu_0\mu} \text{grad div} \int_S \vec{j}^m G(k_1 L) dS - \\ & - i\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1 \int_S \vec{j}^m G(k_1 L) dS + \text{rot} \int_S \vec{j}^0 G(k_1 L) dS + \vec{H}_1^0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_2 = & -\frac{i}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_2} \text{grad div} \int_S \vec{j}^0 G(k_2 L) dS - \\ & - i\omega\mu_0\mu \int_S \vec{j}^0 G(k_2 L) dS - \text{rot} \int_S \vec{j}^m G(k_2 L) dS + \vec{E}_2^0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_2 = & -\frac{i}{\omega\mu_0\mu} \text{grad div} \int_S \vec{j}^m G(k_2 L) dS - \\ & - i\omega \varepsilon_0 \varepsilon_2 \int_S \vec{j}^m G(k_2 L) dS + \text{rot} \int_S \vec{j}^0 G(k_2 L) dS + \vec{H}_2^0. \end{aligned} \quad (13)$$

При известных эквивалентных токах \vec{j}^0 , \vec{j}^m выражения (10) и (11) дают значения полного электромагнитного поля в области V_1 в точках вне поверхности S , а выражения (12), (13) – в области V_2 .

Если точка наблюдения M находится на самой поверхности S , в подынтегральных выражениях интегралов, входящих в (10)-(13), появляются особенности. При этом первый интеграл становится гиперсингулярным. В соответствии с описанным подходом в качестве его значения на анализируемой поверхности рассматривается его предел при стремлении точки наблюдения к этой поверхности. Этот предел совпадает со значением конечной части в смысле Адамара этого интеграла [7]. Второй интеграл в этих выражениях содержит слабую особенность. Значение такого интеграла непрерывно при переходе через S . Предел третьего интеграла при стремлении точки наблюдения к S может быть представлен, как известно, в виде суммы прямого значения этого интеграла на S и внеинтегрального члена.

Устремляя точку наблюдения к S снаружи в (10) и (11), изнутри в (12) и (13) и учитывая (5), (8) и (9), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \vec{j}^m = & -\frac{i}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_1} \vec{n}_1 \times \lim_{M \rightarrow S} [\text{grad div} \int_S \vec{j}^0 G_1 dS_Q] - \\ & - i\omega\mu_0\mu_1 \vec{n}_1 \times \int_S \vec{j}^0 G_1 dS_Q - \vec{n}_1 \times \int_S \text{rot} \vec{j}^m G_1 dS_Q + \vec{E}_1^0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{1}{2} \vec{j}^s = -\frac{i}{\omega \mu_0 \mu_1} \vec{n}_1 \times \lim_{M \rightarrow S} [\text{grad div} \int_S \vec{j}^M G_1 dS_Q] -$$

$$- i \omega \varepsilon_0 \varepsilon_1 \vec{n}_1 \times \int_S \vec{j}^s G_1 dS_Q + \vec{n}_1 \times \int_S \text{rot} \vec{j}^s G_1 dS_Q + \vec{H}_1^0, \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \vec{j}^M = \frac{i}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_2} \vec{n}_1 \times \text{grad div} \left[\int_S \vec{j}^s G_2 dS_Q \right] +$$

$$+ i \omega \mu_0 \mu_2 \vec{n}_1 \times \int_S \vec{j}^s G_2 dS_Q + \vec{n}_1 \times \int_S \text{rot} \vec{j}^s G_2 dS_Q + \vec{E}_2^0, \quad (16)$$

$$\frac{1}{2} \vec{j}^s = \frac{i}{\omega \mu_0 \mu_2} \vec{n}_1 \times \lim_{M \rightarrow S} [\text{grad div} \int_S \vec{j}^M G_2 dS_Q] +$$

$$+ i \omega \varepsilon_0 \varepsilon_2 \vec{n}_1 \times \int_S \vec{j}^M G_2 dS_Q - \vec{n}_1 \times \int_S \text{rot} \vec{j}^s G_2 dS_Q + \vec{H}_2^0, \quad (17)$$

где $G_1 = G(k_1 L)$, $G_2 = G(k_2 L)$.

Эти соотношения можно использовать для составления интегральных уравнений для неизвестных функций \vec{j}^s и \vec{j}^M . При этом возможно получение систем уравнений различного типа.

Из соотношений (14)-(17) можно получить систему интегральных уравнений второго рода, для которой справедливы теоремы Фредгольма. Одно уравнение такой системы получается, если умножить (14) на ε_2 , (16) на ε_1 и сложить полученные выражения, а второе – если умножить (15) на μ_2 , (17) на μ_1 и также сложить полученные выражения. Такая система была впервые получена в [8] и использована для доказательства теорем единственности и существования.

В [9] был предложен иной подход, в соответствии с которым задача сводится к системе интегральных уравнений 1 рода, содержащих гиперсингулярные интегралы. Идея этого подхода сходна с предыдущим, но рассматривается не сумма, а разность интегралов.

Однако для определения неизвестных функций \vec{j}^s и \vec{j}^M можно использовать только два из четырех уравнений (14)-(17). При этом получаются более простые ядра, приводящие к более простым алгоритмам численного решения. Используя представление [1] гиперсингулярных интегралов, из (14) и (16) получаем систему, имеющую физический смысл граничных условий для электрического поля:

$$\frac{1}{2} \vec{j}^M = -\frac{i}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1} \vec{n}_1 \times \lim_{M \rightarrow S} \left[\int_S \text{grad}_M (\vec{j}^s \cdot \text{grad}_Q G_1) dS_Q \right] -$$

$$- i \omega \mu_0 \mu_1 \vec{n}_1 \times \int_S \vec{j}^s G_1 dS_Q - \vec{n}_1 \times \int_S \text{rot}_M (\vec{j}^M G_1) dS_Q + \vec{E}_1^0, \quad (18)$$

$$\frac{1}{2} \vec{j}^m = \frac{i}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_2} \vec{n}_1 \times \lim_{M \rightarrow S} \left[\int_S \text{grad}_M (\vec{j}^s \cdot \text{grad}_Q G_2) dS_Q \right] +$$

$$+ i\omega \mu_0 \mu_2 \vec{n}_1 \times \int_S \vec{j}^s G(k_2 L) dS_Q + \vec{n}_1 \times \int_S \text{rot}_M (\vec{j}^m G_2) dS_Q + \vec{E}_2^0. \quad (19)$$

Индексы M и Q у операторов показывают, по какой точке (наблюдения либо истока соответственно) производится дифференцирование.

Из (15) и (17) получается система, имеющая смысл граничных условий для магнитного поля:

$$\frac{1}{2} \vec{j}^s = -\frac{i}{\omega \mu_0 \mu_1} \vec{n}_1 \times \lim_{M \rightarrow S} \left[\int_S \text{grad}_M (\vec{j}^m \cdot \text{grad}_Q G_1) dS_Q \right] -$$

$$- i\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1 \vec{n}_1 \times \int_S \vec{j}^m G k_1 dS_Q + \vec{n}_1 \times \int_S \text{rot}_M (\vec{j}^s G_1) dS_Q + \vec{H}_1^0, \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} \vec{j}^s = \frac{i}{\omega \mu_0 \mu_2} \vec{n}_1 \times \lim_{M \rightarrow S} \left[\int_S \text{grad}_M (\vec{j}^m \cdot \text{grad}_Q G_1) dS_Q \right] +$$

$$+ i\omega \varepsilon_0 \varepsilon_2 \vec{n}_1 \times \int_S \vec{j}^m G k_2 dS_Q - \vec{n}_1 \times \int_S \text{rot}(\vec{j}^s G_2) dS_Q + \vec{H}_2^0. \quad (21)$$

В общем случае каждое уравнение этих систем содержит гиперсингулярный интеграл (первый интеграл в уравнениях (18)-(21)). В соответствии с подходом авторов в качестве значения такого интеграла на анализируемой поверхности рассматривается его предел при стремлении точки наблюдения к этой поверхности. Этот предел совпадает [6] со значением конечной части гиперсингулярного интеграла в смысле Адамара. Разрешимость систем (18), (19) и (20),(21) следует из разрешимости исходной краевой задачи.

Рассмотрим некоторые аспекты использования полученных систем гиперсингулярных уравнений для численного решения задач дифракции на примере плоской задачи о падении плоской электромагнитной волны на диэлектрический цилиндр, когда оси цилиндра параллелен вектор \vec{E}^0 плоской волны.

Система (15) и (17) в этом случае приобретает вид

$$\frac{1}{2} \vec{j}^s = -\frac{1}{4k} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \vec{n}^0 \times \lim_{M \rightarrow S} \int_{\Gamma} \text{grad}_M (\vec{j}^m \cdot \text{grad}_Q H_0^{(2)}(k_1 L)) d\Gamma_Q -$$

$$-\frac{k}{4} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \varepsilon_1 \vec{n}^0 \times \int_{\Gamma} \vec{j}^m H_0^{(2)}(k_1 L) d\Gamma_Q -$$

$$-\frac{i}{4} \vec{n}^0 \times \text{rot} \int_{\Gamma} \vec{j}^s H_0^{(2)}(k_1 L) d\Gamma_Q + \vec{n}^0 \times \vec{H}_1^0, \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \vec{j}^3 = & -\frac{1}{4k} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \vec{n}^0 \times \lim_{M \rightarrow S} \int_{\Gamma} \text{grad}_M (\vec{j}^M \cdot \text{grad}_Q H_0^{(2)}(k_2 L)) d\Gamma_Q - \\
& -\frac{k}{4} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \varepsilon_2 \vec{n}^0 \times \int_{\Gamma} \vec{j}^M H_0^{(2)}(k_2 L) d\Gamma_Q - \\
& -\frac{i}{4} \vec{n}^0 \times \text{rot} \int_{\Gamma} \vec{j}^3 H_0^{(2)}(k_2 L) d\Gamma_Q,
\end{aligned} \quad (23)$$

где Γ – контур сечения цилиндра. Из системы (18), (19) получаем

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \vec{j}^M = & -\frac{i}{4} \omega \mu_a \mu_1 \vec{n}_1 \times \int_{\Gamma} \vec{j}^3 H_0^{(2)}(k_1 L) d\Gamma_Q - \\
& -\frac{i}{4} \vec{n}_1 \times \int_{\Gamma} \text{rot}_M \vec{j}^M H_0^{(2)}(k_1 L) d\Gamma_Q + \vec{E}_1^0,
\end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \vec{j}^M = & -\frac{i}{4} \omega \mu_a \mu_2 \vec{n}_1 \times \int_{\Gamma} \vec{j}^3 H_0^{(2)}(k_2 L) d\Gamma_Q - \\
& -\frac{i}{4} \vec{n}_1 \times \int_{\Gamma} \text{rot}_M \vec{j}^M H_0^{(2)}(k_2 L) d\Gamma_Q.
\end{aligned} \quad (25)$$

Поскольку единственная отличная от нуля составляющая электрического поля в данном случае не изменяется вдоль оси цилиндра, гиперсингулярные члены в (24), (25) обратились в ноль.

Рассмотрим кратко алгоритм решения этих систем. Используя метод Галеркина, перейдем к системе линейных алгебраических уравнений. При определении коэффициентов системы встает вопрос о вычислении вклада от гиперсингулярных интегралов (первых интегралов в (22) и (23)). Использование приведенной записи позволяет представить первый интеграл в этих уравнениях в виде

$$\vec{n}_1 \times \int_{\Gamma} \text{grad}_M (\vec{j}^M \cdot \text{grad}_Q H_0^{(2)}(k_2 L)) d\Gamma_Q = \lim_{M \rightarrow \Gamma} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\Gamma} j^M \frac{\partial}{\partial t} H_0^{(2)}(k_2 L) dt, \quad (26)$$

где τ и t – касательные к контуру Γ координаты, относящиеся к точке наблюдения и истока соответственно. Как видно из (26), при использовании, например, кусочно-постоянной аппроксимации для неизвестных j^M интеграл (26) вычисляется аналитически, после чего можно осуществить аналитическое дифференцирование по τ и переход к пределу.

В качестве примера на рис.2 приведены результаты численного решения для кругового цилиндра диаметром $kd=7$ и цилиндра квадратного сечения со стороной $ka=kd$ с диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon = 4$.

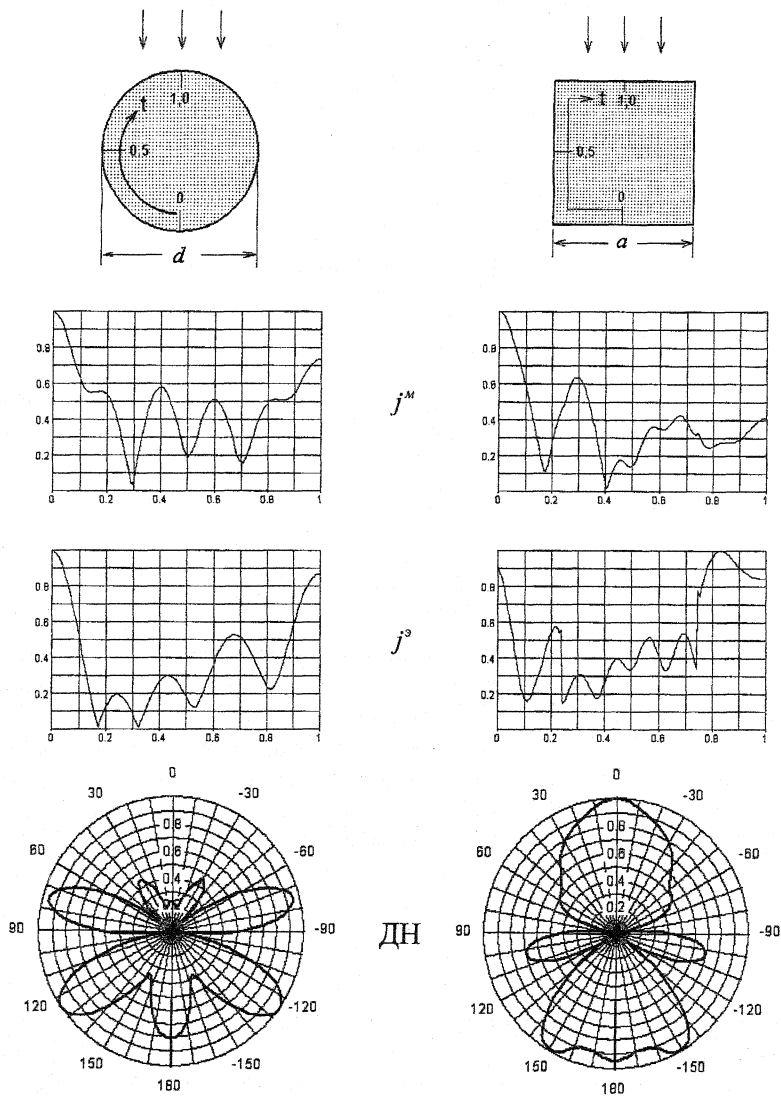


Рис. 2. $kd=ka=7$, $\varepsilon = 4$

Как и следовало ожидать, результаты решения систем (24), (25) и (22), (23) при достаточно большом количестве элементов расчетной сетки совпадают друг с другом. Результаты расчета диаграмм рассеяния для кругового цилиндра совпали также с результатами известного строго решения в виде рядов по цилиндрическим функциям.

Распределение эквивалентных токов приведено для половины контура сечения, начиная с теневой стороны. Угол на графиках для ДН отсчитывается от направления прихода плоской волны.

Скорость сходимости систем (24), (25) и (22), (23) зависит от параметров конкретной задачи. На рис.3 приведены кривые, иллюстрирующие оценку числа обусловленности систем линейных алгебраических уравнений, получающихся из (24), (25) и (22), (23) для задачи дифракции на диэлектрическом круговом цилиндре с $\epsilon = 4$ в диапазоне изменения kr от 2 до 4. Для оценки числа обусловленности вычислялась величина

$$C_{\text{cond}} = (\| A \|_1 * \| A^{-1} \|_1),$$

где

$$\| A \|_1 = \max_{j=1, \dots, N} (| a_{1j} | + | a_{2j} | + \dots + | a_{Nj} |).$$

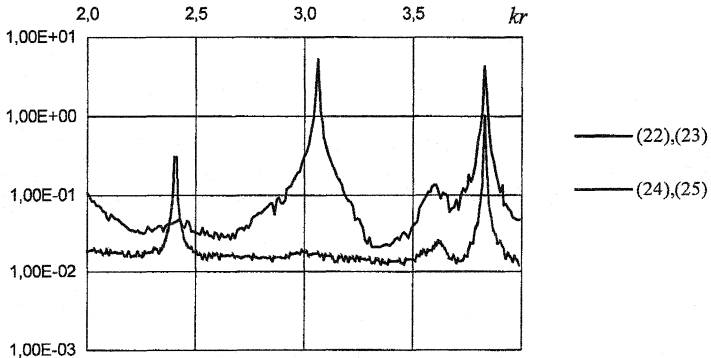


Рис. 3

Как видно, в зависимости от значений исходных параметров возможно ухудшение обусловленности либо одной системы, либо другой, что приводит к снижению скорости сходимости соответствующего численного решения.

На рис.4 показана зависимость от числа элементов расчетной сетки

относительной среднеквадратичной погрешности решения (функций распределения эквивалентных токов) при использовании систем (24), (25) и (22), (23) для $kr=2.405$. В качестве эталона в данном случае использовалось решение, полученное при большом значении элементов расчетной сетки ($3^7=2187$). Как видно, в данном случае скорость сходимости решения системы (22), (23), содержащей гиперсингулярные уравнения, лучше. Разумеется, при других значениях kr возможна обратная ситуация.

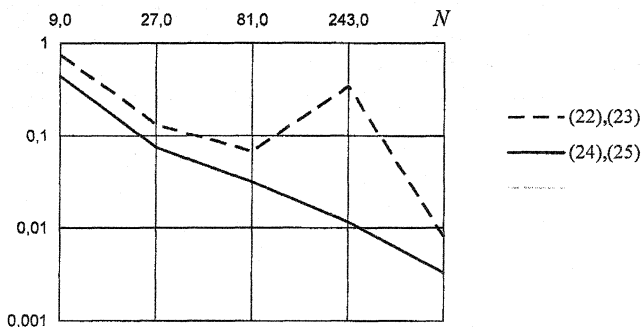


Рис. 4

В заключение авторы выражают благодарность А.П. Анютину и В.И. Калиничеву за предоставленные результаты строго решения задачи дифракции плоской волны на диэлектрическом круговом цилиндре.

Литература

1. Давыдов А.Г., Захаров Е.В., Пименов Ю.В. Метод решения задач дифракции электромагнитных волн на бесконечно тонких цилиндрических экранах. Доклады АН СССР, 1981, т.261, в.2, с.338-341.
2. Давыдов А.Г., Захаров Е.В., Пименов Ю.В. Метод численного решения задач дифракции электромагнитных волн на незамкнутых поверхностях вращения. Доклады АН СССР, 1983, т.269, в.2, с.329-333.

3. Давыдов А.Г., Захаров Е.В., Пименов Ю.В. Метод численного решения задач дифракции электромагнитных волн на незамкнутых поверхностях произвольной формы. Доклады АН СССР, 1984, т.276, в.1, с.96-100.
4. Давыдов А.Г., Захаров Е.В., Пименов Ю.В. Гиперсингулярные интегральные уравнения в вычислительной электродинамике. В кн. Прикладная математика и информатика, М., Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова, изд-во МАКС Пресс, 2001, №9, с.5-22.
5. Davydov A.G., Zakharov E.V., Pimenov Yu.V. Numerical Analysis of Fields in the Case of Electromagnetic Excitation of Unclosed Surfaces. Journal of Communications Technology and Electronics, Vol.45, Suppl.2, 2000, pp.S247-S259.
6. Давыдов А.Г., Пименов Ю.В. Программный комплекс EDEM3D для исследования электродинамических характеристик идеально проводящих трехмерных объектов. Электродинамика СВЧ и КВЧ, 1992, т.7, №2, с.24-26.
7. Захаров Е.В., Давыдов А.Г., Халеева И.В. Интегральные уравнения с ядрами типа Адамара в задачах дифракции. В кн.: Актуальные вопросы прикладной математики. М., Изд-во Московского университета, 1989, с.118-127.
8. Muller C. Grundprobleme der mathematischen Theorie elektromagnetischer Schwingungen. - В.-Г.-Н.: Springer, 1957. -344 s.
9. Захаров Е.В. Гиперсингулярные интегральные уравнения в задачах дифракции электромагнитных волн на диэлектрических телах. Прямые и обратные задачи математической физики: Сборник/Под ред. А.Н.Тихонова, А.А. Самарского.-М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991.