

О НЕКОТОРЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ АСПЕКТАХ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Метод гиперсингулярных интегральных уравнений, впервые сформулированный для задач дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих поверхностях произвольной формы в [1], в течении ряда лет успешно используется для численного решения большого количества задач (см. обзор [2]). На его основе разработана универсальная программа EDEM [3,4] для анализа на персональном компьютере прикладных задач электродинамики для объектов произвольной конфигурации. Метод показал себя мощным и универсальным инструментом при решении задач для объектов, чьи размеры сравнимы с длиной волны либо превышают ее – в этом случае возможности метода ограничены только возможностями используемого компьютера.

Когда размеры объекта оказываются малыми по сравнению с длиной волны, использование этого метода может быть связано со специфическими особенностями.

Рассмотрим интегральное уравнение задачи дифракции поля \vec{E}^0, \vec{H}^0 на идеально проводящем бесконечно тонком экране S , которое может быть записано относительно наведенных на S токов \vec{j} в виде

$$\begin{aligned} \frac{i}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \vec{n}^0(M_0) \times \lim_{M \rightarrow M_0} \left\{ \iint_S \nabla_M(\vec{j}, \nabla_P G) ds_P - k^2 \iint_S \vec{j} G ds_P \right\} = \\ = -\vec{n}^0(M_0) \times \vec{E}^0(M_0), \quad M_0 \in S \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$G = \frac{e^{-ikR(M,P)}}{kR(M,P)},$$

$R(M,P)$ – расстояние между точкой M наблюдения и точкой P истока (интегрирования), $\vec{n}^0(M_0)$ – орт нормали к точке M_0 , находящейся на поверхности S .

Это уравнение эквивалентно [5] гиперсингулярному интегральному уравнению с несобственным интегралом в смысле конечной части по Адамару

$$\frac{i}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \vec{n}^0 \times \left\{ \iint_S \nabla_M(\vec{j}, \nabla_P G) ds_P - k^2 \iint_S \vec{j} G ds_P \right\} = -\vec{n}^0 \times \vec{E}^0, \quad M_0 \in S,$$

где значок «*» над знаком интеграла указывает, что этот интеграл следует понимать в смысле конечной части по Адамару.

Запись гиперсингулярного интегрального уравнения в форме (1) позволяет представить получающиеся после его дискретизации выражения в таком виде, что указанный предел вычисляется аналитически. Это позволяет уменьшить количество вычислений и разработать эффективные алгоритмы численного решения.

Наиболее простой алгоритм решения получается в случае использования кусочно-постоянной аппроксимации искомого решения и метода коллокации.

Если размер экрана становится малым по сравнению с длиной волны, численные результаты, полученные при непосредственном использовании такого подхода, теряют точность. Анализ показывает, что причиной этого является специфика поведения гиперсингулярной части оператора (первый двойной интеграл в (1)) на низких частотах.

В литературе известен (напр., [6]) подход к решению такого рода проблем, заключающийся в использовании эквивалентных электрических и магнитных диполей и основанный на предварительном вычислении тензоров поляризуемости рассматриваемого объекта с помощью решения ряда статических задач. При использовании этого подхода переход к новой форме отверстия может потребовать решения до шести задач (электростатических и для постоянного тока), что делает этот подход громоздким и зачастую неудобным с практической точки зрения.

Численное решение задачи в рассматриваемом случае, однако, может быть успешно проведено и на основе уравнений (1), (2) с помощью различных приемов.

Численные эксперименты показали, что с использованием методов регуляризации [7] можно получить численное решение и при кусочно-постоянной аппроксимации.

В простейшем случае вместо (1) решается уравнение

$$\alpha \vec{j} + \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \vec{n}^o(M_o) \times \lim_{M \rightarrow M_o} \left\{ \iint_S \nabla_M(\vec{j}, \nabla_P G) ds_P - k^2 \iint_S \vec{j} G ds_P \right\} = -\vec{n}^o(M_o) \times {}^o(M_o), \quad M_o \in S \quad (2)$$

причем выбор параметра α зависит от частоты ω .

Возможен также иной подход, основанный на физических соображениях.

При численном решении уравнения (1) на с использованием кусочно-постоянной аппроксимации и метода коллокации характерная величина отношения длины волны к размеру рассеивателя, с превышения которой начинается потеря точности, оказывается порядка 10.

В то же время граничные условия для электрического поля в точках

коллокации продолжают выполняться с той точностью, с которой находится решение полученной в результате дискретизации СЛАУ (при использовании прямых методов решения СЛАУ до 12-14 знаков после запятой). Однако граничные условия для других компонент электромагнитного поля начинают нарушаться. Так, вычисленная на основе полученного решения нормальная составляющая напряженности магнитного поля в точках коллокации оказывается отличной от нуля.

Уравнение (1) можно дополнить требованием выполнения граничных условий для нормальной составляющей напряженности магнитного поля:

$$\frac{1}{4\pi} \vec{n}^o(M_o) \cdot \iint_S \vec{j} \nabla_M \times G ds_p = -\vec{n}^o(M_o) \cdot \vec{H}^o(M_o), M_o \in S, \quad (3)$$

и решать затем совместно уравнения (1) и (3). В общем случае при переходе от уравнений (1) и (2) к системе одно из них (для определенности (3)) следует брать умноженным на некоторую константу C . В результате дискретизации такой системы получается СЛАУ с прямоугольной матрицей размера $3N \times 2N$, где N – количество точек коллокации. Эту систему можно решать с использованием, например, метода вращений. Полученное нормальное псевдорешение этой СЛАУ имеет физический смысл плотности наведенных на диске токов. Как показал численный эксперимент, такой подход позволяет получить достаточно точное решение рассматриваемой задачи при уменьшении отношения длины волны к размеру рассеивателя до величины порядка 10^4 .

На результаты полученного таким путем решения влияет значение константы C , причем выбор оптимального значения C зависит от частоты ω . Однако зависимость оптимального значения C от ω оказывается гораздо более слабой, чем значения α , входящего в уравнение (2). Таким образом, при переходе от (1) к системе из (1) и (3) мы имеем дело с своеобразным способом регуляризации уравнения (1) для малых частот, более эффективным, чем при замене (1) уравнением (2). Обусловлено это тем, что при переходе от (1) к системе из (1), (3) изменяются свойства получающегося оператора на низких частотах, и в то же время этот результирующий оператор продолжает полностью соответствовать физическому смыслу задачи.

Кардинально решить проблему потери точности при уменьшении частоты позволяет снижение порядка особенности гиперсингулярной части оператора. Это возможно сделать, например, с помощью метода интегрирования граничных условий, идея которого была впервые высказана в [8]. При решении трехмерных задач весьма эффективной показала себя практическая реализация алгоритма численного решения (1) с использованием метода Бубнова-Галеркина и выбором в качестве базисных и проекционных функций Уилтона-Глиссона-Рао [9]. Естественной платой в

этом случае является усложнение алгоритма по сравнению с использованием кусочно-постоянной аппроксимации и метода коллокации.

В качестве примера рассмотрим задачу о касательном падении на плоский идеально проводящий экран плоской волны, вектор напряженности электрического поля которой направлен по касательной к поверхности экрана.

Специфика этой задачи – наличие двух слагаемых решения, амплитуда одной из которых с уменьшением частоты возбуждения ω падает пропорционально значению ω , а амплитуда второй от этого значения ω не зависит. В диаграмму направленности же эти слагаемые вносят вклады, зависящие от величины ω одинаковым образом. В результате потеря точности, затрагивая лишь меньшее по ω слагаемое, может оказаться незаметной при анализе численных данных для самого решения, но сразу же проявляется в изменении формы диаграмм направленности. Такая задача является весьма «жестким» тестом для оценки точности численного решения.

В случае, когда экран представляет собой диск, первая составляющая совпадает с пространственной Фурье-амплитудой первой гармоники наведенных токов, а вторая – с амплитудой нулевой гармоники. Для этого случая имеются низкочастотные асимптотические представления для токов [10] и диаграмм направленности [11], которые можно использовать для сравнения результатов численного решения при малых волновых размерах экрана.

На рис.1 показаны распределения векторов плотности наведенных на диске токов, соответствующих указанным первой и второй составляющим. От частоты возбуждения вид приведенных на рис.1 и 2 рисунков не зависит, если величина отношения длины волны к размеру рассеивателя превышает величину порядка 10. Выделить первую составляющую, небольшую по сравнению со второй, в этом случае нетрудно благодаря тому, что эти составляющие сдвинуты по фазе на π . Эти данные полностью соответствуют результатам [10].

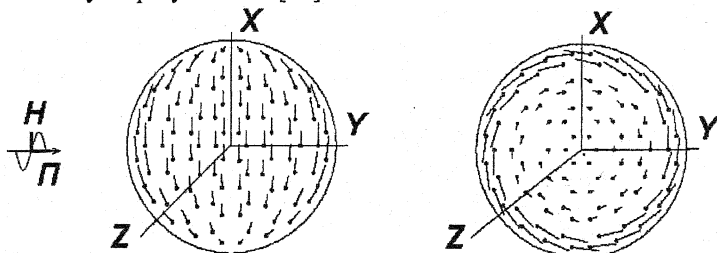


Рис. 1

На рис.2 приведены распределения векторов плотности токов для экранов иной формы.

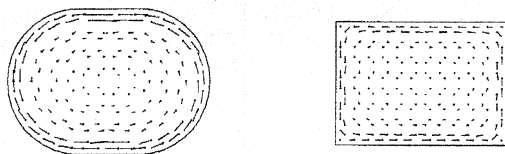


Рис. 2

На рис.4 показаны диаграммы направленности овальных экранов с различным отношением ν поперечных и продольных размеров. Сплошная линия соответствует составляющей E_θ на рис.3 а, пунктир – составляющей E_φ на рис.3 б, штрих-пунктир – составляющей E_θ на рис.3 в. По оси абсцисс отложен угол θ .

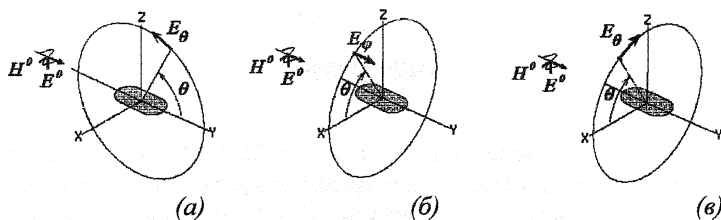


Рис. 3

Как и в случае плотности токов, от частоты возбуждения вид приведенных на рис. 3 рисунков не зависит, если величина отношения длины волны к размеру рассеивателя превышает величину порядка 10. При $\nu=1$ (диск) результаты полностью совпадают с [10]. Как видно, вид диаграмм направленности овального экрана даже электрически малых размеров при изменении его формы существенно меняется.

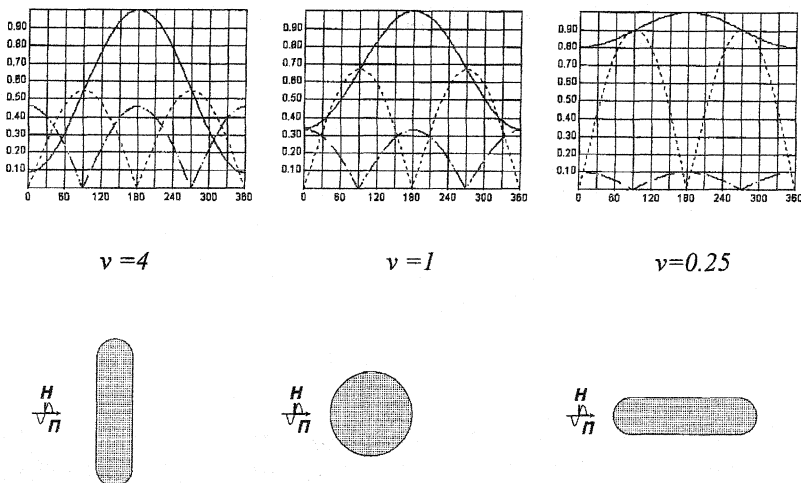


Рис. 4

Литература

1. Давыдов А.Г., Захаров Е.В., Пименов Ю.В. Метод численного решения задач дифракции электромагнитных волн на незамкнутых поверхностях произвольной формы. Доклады АН СССР, 1984, т.276, в.1, с.96-100.

2. Numerical Analysis of Fields in the Case of Electromagnetic Excitation of Unclosed Surfaces. Davydvov A.G., Zakharov E.V., Pimenov Yu.V. Journal of Communications Technology and Electronics, Vol.45, Suppl.2, 2000, pp.S247-S259

3. Давыдов А.Г., Пименов Ю.В. Программный комплекс EDEM3D для исследования электродинамических характеристик идеально проводящих трехмерных объектов. Электродинамика СВЧ и КВЧ, 1999, т.7, №2, с.24-26.

4. Давыдов А.Г., Пименов Ю.В. О возможностях новой версии программного комплекса EDEM. В кн.: Тезисы докладов и сообщений I Международной научно-технической конференции «Физика и технические приложения волновых процессов», Самара, 10 – 16 сентября 2001 г., т.1, с.21-26.

5. Захаров Е.В., Давыдов А.Г., Халесва И.В. Интегральные уравнения с ядрами типа Адамара в задачах дифракции. В кн.: Актуальные вопросы прикладной математики. М., Изд-во Московского ун-та, 1989, с.118-127.
6. Bouwkamp. Diffraction theory. Rep. Prog. Phys., vol.17, 1954, pp.35-100.
7. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – Москва, «Наука», 1979.
8. Давыдов А.Г., Захаров Е.В., Пименов Ю.В. Об интегральных уравнениях в задачах дифракции электромагнитных волн на незамкнутых цилиндрических поверхностях. Доклады АН СССР, 1980, т.253, в.1, с.82-84.
9. Rao S.M., Wilton D.R., Glisson A.W. Electromagnetic Scattering by Surfaces of Arbitrary Shape. IEEE Trans. on Antennas and Propagation, vol. AP-30, No 3, May 1982.
10. В.Н. Курицын. Произвольное падение плоской электромагнитной волны на проводящий диск. ЖТФ, 1960, т.XXX, вып.7, с.790.
11. W.H. Eggiman. Higher-Order Evaluation of Electromagnetic Diffraction by Circular Disks. IRE Trans. MTT-9, 1961, p.408.