А.М. Денисов, С.И. Соловьева

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ*

В работе [1] доказана теорема существования и единственности решения обратной задачи для квазилинейного гиперболического уравнения. Доказательство основано на сведении обратной задачи к нелинейному операторному уравнению и последующем применении принципа сжимающих отображений. В настоящей работе мы используем некоторые результаты работы [1] для построения итерационного метода решения обратной задачи.

При исследовании математической модели динамики сорбции с кинетическим коэффициентом, зависящим от концентрации, возникает следующая задача для квазилинейного гиперболического уравнения

$$u_{xt} + \left(\gamma(u) - (\ln \gamma(u))_t\right) u_x + \gamma(u)(\varphi(u))_t = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u(0,t) = \mu(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l. \tag{3}$$

Здесь $u(x,t)$ – концентрация вещества, $\varphi(s)$ – изотерма сорбции, $\gamma(s)$ – кинетический коэффициент, $\mu(t)$ – входная концентрация вещества, множество $Q_T = \{(x,t) : 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$.

Пусть функции $\mu(t), \gamma(s), \varphi(s)$ удовлетворяют следующим условиям

$$\mu \in C^1[0,T],\ \mu(0) = 0,\ \mu'(t) > 0,\ t \in [0,T], \tag{4}$$

$$\gamma \in C^1(R),\ 0 < \gamma(s) \le d_1,\ |\gamma'(s)| \le d_2,\ s \in R, \tag{5}$$

$$\varphi \in C^1(R),\ \varphi(0) = 0,\ 0 < \varphi'(s) \le d_3, \quad s \in R, \tag{6}$$

где d_1, d_2, d_3 — положительные постоянные.

Если условия (4)-(6) выполнены, то задача (1)-(3) имеет единственное решение $u \in C^1[Q_T]$ и для любого $\tau \in (0,T]$ справедливо неравенство

$$0 \le u(x,t) \le \mu(\tau), \quad (x,t) \in Q_\tau. \tag{7}$$

Доказательство данного утверждения приведено в работе [1]. Там же показано, что функция $u(x,t)$ является решением интегрального

---

* Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (код проекта 02-01-0344)

уравнения

$$u(x,t) = \mu(t) - \int_0^x \gamma(u(s,t))\varphi(u(s,t))ds +$$

$$+ \int_0^x \gamma(u(s,t)) \int_0^t \gamma(u(s,\tau))\varphi(u(s,\tau))\exp\left\{-\int_\tau^t \gamma(u(s,\theta))d\theta\right\} d\tau\, ds, \quad (x,t) \in Q_T, \quad (8)$$

а для производной $u_x(x,t)$ справедливо представление

$$u_x(x,t) = \gamma(u(x,t)) \int_0^t \gamma(u(x,\tau))\varphi(u(x,\tau)) \exp\left\{-\int_\tau^t \gamma(u(x,\theta))d\theta\right\} d\tau - \quad (9)$$

$$-\gamma(u(x,t))\varphi(u(x,t)), \qquad (x,t) \in Q_T$$

Сформулируем обратную задачу. Требуется определить функцию $\gamma(s)$ в предположении, что известны функции $\mu(t), \varphi(s)$ и задано условие

$$u(l,t) = g(t), \quad 0 \le t \le T, \qquad (10)$$

где $u(x,t)$ – решение задачи (1)-(3), а $g(t)$ – известная функция.

Так как при неизвестной функции $\gamma(s)$ неизвестно также и решение задачи (1)-(3) $u(x,t)$, то под решением обратной задачи (1)-(3), (10) будем подразумевать пару функций $\gamma(s), u(x,t)$. Кроме того, в дальнейшем мы будем обозначать решение задачи (1)-(3), соответствующее некоторой функции $\gamma(s)$ через $u(x,t;\gamma)$.

Перейдем к построению численного метода решения обратной задачи. Следуя [1] выведем операторное уравнение для неизвестной функции $\gamma(s)$. Пусть $u(x,t;\gamma)$ – решение задачи (1)-(3) для функции $\gamma(s)$. Из неравенства (7) следует, что функция $u(x,t;\gamma)$ определяется в Q_T однозначно значениями $\gamma(s)$ только для $s \in [0, \mu(\tau)]$ и не зависит от значений $\gamma(s)$ вне этого отрезка.

Поделив уравнение (9) на $\gamma(u(x,t;\gamma))$ и проинтегрировав от 0 до x, получим

$$\int_{\mu(t)}^{u(x,t)} \frac{1}{\gamma(s)} ds = -\int_0^x \varphi(u(s,t;\gamma))ds +$$

$$+ \int_0^x \int_0^t \gamma(u(s,\tau;\gamma))\varphi(u(s,\tau;\gamma))\exp\left\{-\int_\tau^t \gamma(u(s,\theta;\gamma))d\theta\right\} d\tau\, ds.$$

Дифференцируя это уравнение по t и используя уравнение (9), имеем

$$\frac{u_t(x,y;\gamma)}{\gamma(u(x,y;\gamma))} = \frac{\mu'(t)}{\gamma(\mu(t))} - \int_0^x \varphi'(u(s,t;\gamma))u_t(s,t;\gamma)ds - \int_0^x u_x(s,t;\gamma)ds.$$

Решив это интегральное уравнение относительно производной $u_t(x,t;\gamma)$, получим

$$u_t(x,t;\gamma) = \mu'(t)\frac{\gamma(u(x,t;\gamma))}{\gamma(\mu(t))}\exp\left\{-\int_0^x \varphi'(u(z,t;\gamma))\gamma(u(z,t;\gamma))dz\right\} -$$

$$-\gamma(u(x,t;\gamma))\int_0^x \exp\left\{-\int_s^x \varphi'(u(z,t;\gamma))\gamma(u(z,t;\gamma))dz\right\} u_x(s,t;\gamma)ds. \quad (x,t)\in Q_T$$

Положив здесь $x = l$ и использовав условие (10), имеем

$$g'(t) = \mu'(t)\frac{\gamma(g(t))}{\gamma(\mu(t))}\exp\left\{-\int_0^l \varphi'(u(z,t;\gamma))\gamma(u(z,t;\gamma))dz\right\} -$$

$$-\gamma(g(t))\int_0^l \exp\left\{-\int_s^l \varphi'(u(z,t;\gamma))\gamma(u(z,t;\gamma))dz\right\} u_x(s,t;\gamma)ds, \quad 0\le t\le T.$$

Решив это уравнение относительно $\gamma(\mu(t))$, получим

$$\gamma(\mu(t)) = \frac{\mu'(t)\gamma(g(t))\cdot\exp\left\{-\int_0^l \varphi'(u(z,t;\gamma))\gamma(u(z,t;\gamma))dz\right\}}{g'(t)+\gamma(g(t))\int_0^l \exp\left\{-\int_s^l \varphi'(u(z,t;\gamma))\gamma(u(z,t;\gamma))dz\right\}u_x(s,t;\gamma)ds}, \tag{11}$$

$$0\le t\le T.$$

Это уравнение представляет собой нелинейное операторное уравнение относительно неизвестной функции $\gamma(s)$. Итерационный метод для его решения записывается следующим образом

$$\gamma_{n+1}(\mu(t)) = \mu'(t)\gamma_n(g(t))\exp\left\{-\int_0^l \varphi'(u(z,t;\gamma_n))\gamma_n(u(z,t;\gamma_n))dz\right\}\times$$

$$\times\left(g'(t)+\gamma_n(g(t))\int_0^l u_x(s,t;\gamma_n)\exp\left\{-\int_s^l \varphi'(u(z,t;\gamma_n))\gamma_n(u(z,t;\gamma_n))dz\right\}ds\right)^{-1} \tag{12}$$

Для вычисления функции $u(x,t;\gamma_n)$ строится другой итерационный процесс на основании уравнения (8)

$$u_k(x,t;\gamma_n) = \mu(t) - \int_0^x \gamma_n(u_{k-1}(s,t;\gamma_n))\varphi(u_{k-1}(s,t;\gamma_n))ds +$$
$$+ \int_0^x \gamma_n(u_{k-1}(s,t;\gamma_n)) \int_0^t \gamma_n(u_{k-1}(s,\tau;\gamma_n)) \times$$
$$\times \varphi(u_{k-1}(s,\tau;\gamma_n)) \exp\left\{ - \int_\tau^t \gamma_n(u_{k-1}(s,\theta;\gamma_n))d\theta \right\} d\tau\, ds$$

и $u(x,t;\gamma_n) = \lim\limits_{k\to\infty} u_k(x,t;\gamma_n)$.

Производная $u_x(x,t;\gamma_n)$ в соответствии с уравнением (9) вычисляется так

$$u_x(x,t;\gamma_n) = \gamma_n(u(x,t;\gamma_n)) \cdot \left\{ \int_0^t \gamma_n(u(x,\tau;\gamma_n)) \times \right.$$
$$\left. \times \varphi(u(x,\tau;\gamma_n)) \exp\left\{ - \int_\tau^t \gamma_n(u(x,\theta;\gamma_n))d\theta \right\} d\tau - \varphi(u(x,t;\gamma_n)) \right\}$$

Остановимся на вопросе выбора начального приближения для итерационного процесса (12). Положив в уравнении (11) $t = 0$ и, разрешив уравнение относительно $\gamma(0)$, получим

$$\gamma(0) = \frac{1}{\varphi'(0)l} \ln \frac{\mu'(0)}{g'(0)}. \tag{13}$$

Следовательно, в качестве начального приближения можно брать

$$\gamma_0(s) = \frac{1}{\varphi'(0)l} \ln \frac{\mu'(0)}{g'(0)}.$$

Перейдем к описанию результатов вычислительных экспериментов. Они проводились следующим образом. Для известных функций $\mu(t), \gamma(s), \varphi(s)$ решалась задача (1)-(3) и определялась функция $g(t) = u(l,t)$. Далее эта функция использовалась в качестве исходной информации для решения обратной задачи, т.е. восстановления функции $\gamma(s)$ предложенным выше итерационным методом.

Все расчеты проводились при фиксированных функциях $\varphi(s)=0.1\cdot s$, $\mu(t)=10\cdot t$ и числах $l=0.5, T=0.5$.

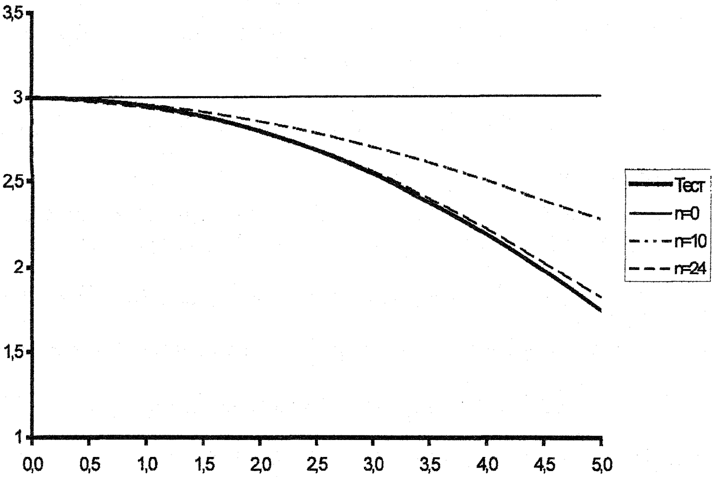
На рис. 1 приведены точное решение $\gamma(s)=3-\frac{s^2}{20}$ и некоторые итерации, полученные при решении обратной задачи. Значение $\gamma(0)=3$ предполагалось известным и не изменялось в процессе итераций. Начальное приближение $\gamma_0(s)=\gamma(0)=3$. Аналогичные результаты для функции $\gamma(s)=\frac{5}{2s+1}$, $\gamma(0)=5$ и $\gamma_0(s)=\gamma(0)=5$ изображены на рис. 2.

На рис. 3 представлены результаты работы итерационного процесса в случае $\gamma(s)=3-\frac{s^2}{20}$. Значение $\gamma_{np}(s)$ вычислялось по формуле (13) с использованием разностной производной для вычисления $g'(0)$ и затем не изменялось в процессе вычислений. Начальное приближение $\gamma_0(s)=\gamma_{np}(0)$. Точность вычисления $\gamma_{np}(0)$ возрастает с уменьшением шага разностной сетки.

На рис. 4 приведены точное решение $\gamma(s)=\frac{5}{2s+1}$ и некоторые итерации для итерационного процесса, в котором $\gamma_0(s)=2$ и значение $\gamma_n(0)$ вычислялось из итерационного процесса (12).

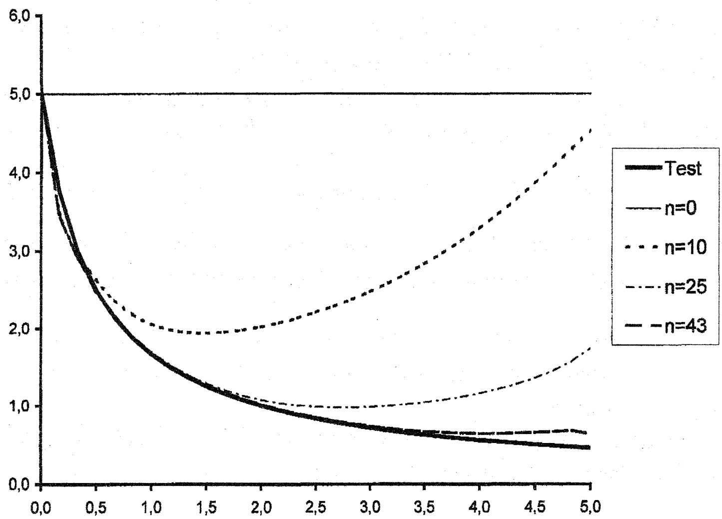
На рис. 5 изображены результаты работы итерационного процесса для случая, когда функция $g(t)$ известна с погрешностью. Для функции $\gamma(s)=3-\frac{s^2}{20}$ решалась задача (1)-(3) и вычислялась $g(t)=u(0,t)$. Затем в нее вносилась погрешность и получалась $g_\delta(t)$ такая, что $\max\limits_{t\in[0,T]}|g_\delta(t)-g(t)|\le\delta$ (величина погрешности $\delta=0{,}005$). Далее функция $g_\delta(t)$ использовалась при построении итерационного процесса с $\gamma_0(s)=3$. При вычислении производной от $g_\delta(t)$ предварительно проводилась процедура сглаживания.

Проведенные вычислительные эксперименты подтвердили эффективность предложенного итерационного метода.



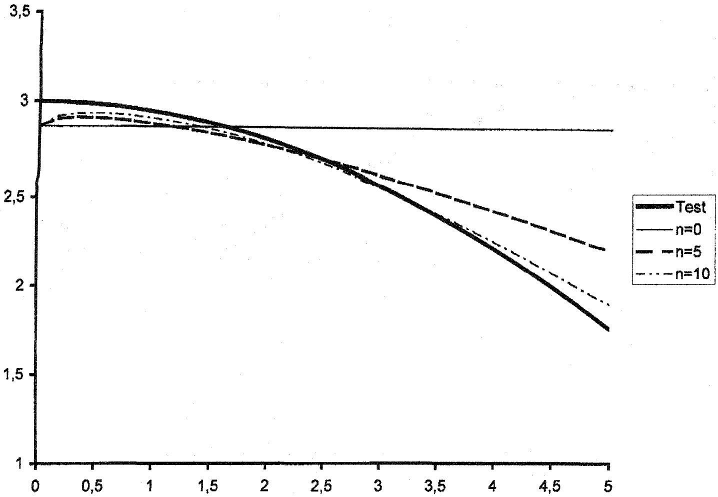
3,5
3
2,5
2
1,5
1
0,0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
3,5
4,0
4,5
5,0
Тест
n=0
n=10
n=24

Рис. 1



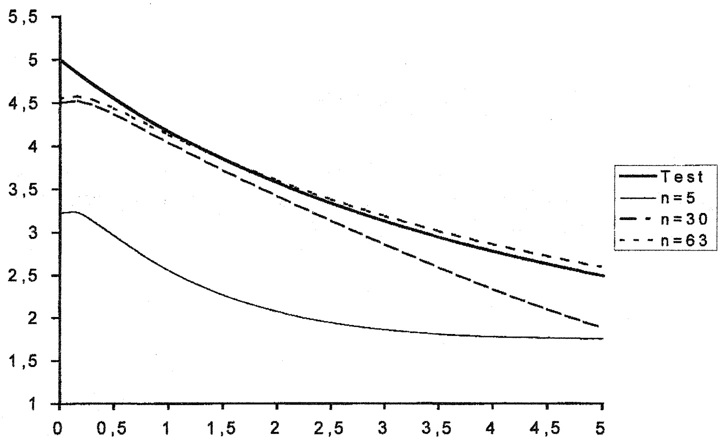
6,0
5,0
4,0
3,0
2,0
1,0
0,0
0,0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
3,5
4,0
4,5
5,0
Test
n=0
n=10
n=25
n=43

Рис. 2



3,5
3
2,5
2
1,5
1
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
4,5
5
Test
n=0
n=5
n=10

Рис. 3



5,5
5
4,5
4
3,5
3
2,5
2
1,5
1
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
4,5
5
Test
n=5
n=30
n=63

Рис. 4

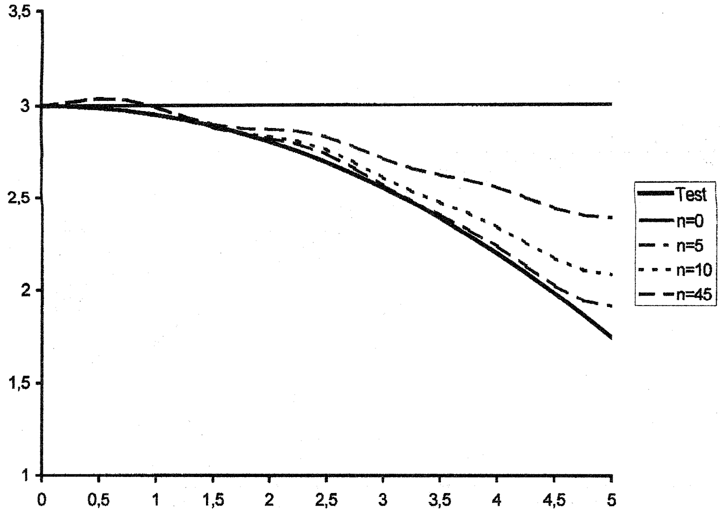


Рис. 5

Литература

1. А.М. Денисов. Существование решения обратной задачи для квазилинейного гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения, 2002, т.38, №9, с.1155-1164.