

ТРЕХМЕРНАЯ ЗАДАЧА ПРОДОЛЖЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА.

Введение.

В геофизике широко используются методы гравиметрии, в которых по измерению гравитационного поля определяется распределение масс внутри Земли. При интерпретации гравиметрических данных применяются методы аналитического продолжения потенциала.

Если потенциал продолжается вверх, где нет гравитационных масс, то задача сводится к свертке измеренных данных с фундаментальным решением уравнения Лапласа. Это позволяет уменьшить влияние приповерхностных аномалий масс по сравнению с крупными глубинными аномалиями, что облегчает интерпретацию.

Если потенциал продолжается вниз в сторону аномалий масс, то более четко проявляются особенности глубинных аномалий. Эта задача сводится к решению интегрального уравнения первого рода, решение которого неустойчиво. Для его решения применяются методы регуляризации [1], [2]. В работе [3] был предложен итерационный метод решения интегрального уравнения первого рода с ядром Пуассона, который дает устойчивое решение уравнения. В настоящей статье мы рассмотрим применение аналогичного итерационного метода для устойчивого продолжения в трехмерном случае.

п.1. Постановка задачи и метод решения.

Пусть потенциал $U(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta U = 0$ при $z > H$, при $z = H$ потенциал равен $U_H(x, y) = U(x, y, z = H)$. Тогда на любой плоскости $z = h$ потенциал $U_h(x, y) = U(x, y, z = h)$ вычисляется через $U_H(x, y)$ в виде:

$$U_h(x, y) = \frac{H - h}{2\pi} \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} \frac{U_H(x_0, y_0) dx_0 dy_0}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (H - h)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$

Полученная формула позволяет вычислять потенциал при любом $z = h < H$, если задано $U_H(x, y)$. Для определения $U_h(x, y)$ по известному $U_H(x, y)$ имеем интегральное уравнение первого рода. Пусть нам известен потенциал при $h = 0$ $U_0(x, y)$, по которому надо определить $U(x, y, z)$ при $z > 0$. Согласно (1) имеем уравнение

$$\frac{z}{2\pi} \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} \frac{U(x_0, y_0, z) dx_0 dy_0}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} = U_0(x, y) \quad (2)$$

Для решения уравнения (2) предлагается следующий итерационный процесс. Преобразуем уравнение (2), представив его в следующем виде:

$$\frac{z}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{U(x_0, y_0, z) - U(x, y, z)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} dx_0 dy_0 + \frac{z}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{U(x, y, z) dx_0 dy_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= U_0(x, y), \quad x, y \in (-\infty, \infty).$$

Учитывая, что $\frac{z}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_0 dy_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} = 1$, получаем:

$$U(x, y, z) + \frac{z}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{U(x_0, y_0, z) - U(x, y, z)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} dx_0 dy_0 = U_0(x, y) \quad (3)$$

Если обозначить через $U_n(x, y, z)$ n -ое приближение потенциала, то из (3), учитывая, что интегральный член мал, можно записать итерационный процесс в виде:

$$U_n(x, y, z) = U_0(x, y) - \frac{z}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{U_{n-1}(x_0, y_0, z) - U_{n-1}(x, y, z)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} dx_0 dy_0$$

или

$$U_n(x, y, z) = U_{n-1}(x, y, z) + U_0(x, y) -$$

$$- \frac{z}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{U_{n-1}(x_0, y_0, z)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} dx_0 dy_0 \quad (4)$$

Из формулы (4) видно, что при сходимости итерационного процесса результат сходится к решению интегрального уравнения (2).

п.2. Алгоритм решения задачи.

Итерационный процесс (4) сводится к алгебраическому следующим образом. Рассмотрим область $S_0 = \{|x| \leq L, |y| \leq L\}$ на поверхности Земли. Разобьём эту область на $N \times M$ подобластей S_{nm} , центр которых имеет координаты

$$x_n = nh_x, \quad n \in \left[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right], \quad y_m = mh_y, \quad m \in \left[-\frac{M}{2}, \frac{M}{2}\right] \quad (5)$$

Выражение (4) запишем на ограниченной области S_0 в виде:

$$U_S(M_{nm}) = U_{S-1}(M_{nm}) + U_0(M_{nm}) - \frac{z}{2\pi} \iint_{S_0} \frac{U_{S-1}(\xi, \eta, z) d\xi d\eta}{[(x_n - \xi)^2 + (y_m - \eta)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad (6)$$

где S – номер итерации, а $M_{nm} = \{x_n, y_m\}$. Интеграл в (6) приближенно можно записать в виде суммирования по подобластям S_{ij} , считая, что $U_{S-1}(\xi, \eta, z) \approx U_{S-1}(\xi_i, \eta_j, z) = const$. В результате имеем:

$$\begin{cases} U_S(M_{nm}) = U_{S-1}(M_{nm}) + U_0(M_{nm}) - \sum_{i=-N}^N \sum_{j=-M}^M a_{ij}^{nm} U_{S-1}(M_{ij}); \\ n \in \left[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right], \quad m \in \left[-\frac{M}{2}, \frac{M}{2}\right], \end{cases} \quad (7)$$

где

$$a_{ij}^{nm} = \frac{z}{2\pi} \int_{x_i - \frac{h_x}{2}}^{x_i + \frac{h_x}{2}} \int_{y_j - \frac{h_y}{2}}^{y_j + \frac{h_y}{2}} \frac{d\xi d\eta}{[(x_n - \xi)^2 + (y_m - \eta)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (8)$$

Интеграл (8) определяющий a_{ij}^{nm} находится аналитически, т.к.

$$\frac{z}{2\pi} \iint \frac{dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (9)$$

следовательно

$$\begin{aligned} a_{ij}^{nm} = & \varphi\left(x_i - x_n + \frac{h_x}{2}, y_j - y_m + \frac{h_y}{2}\right) + \varphi\left(x_i - x_n - \frac{h_x}{2}, y_j - y_m - \frac{h_y}{2}\right) - \\ & - \varphi\left(x_i - x_n + \frac{h_x}{2}, y_j - y_m - \frac{h_y}{2}\right) - \varphi\left(x_i - x_n - \frac{h_x}{2}, y_j - y_m + \frac{h_y}{2}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

В результате приходим к итерационному процессу

$$U_S(M_{nm}) = U_{S-1}(M_{nm}) - \sum_{i=-N}^N \sum_{j=-M}^M a_{ij}^{nm} U_{S-1}(M_{ij}), \quad S \in [1, \infty) \quad (11)$$

где $n \in \left[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right]$, $m \in \left[-\frac{M}{2}, \frac{M}{2}\right]$, $U_0(M_{nm})$ – известный потенциал на земной поверхности в области S_0 .

п.3. Численное исследование метода.

Анализ эффективности предложенного метода проводился следующим образом. На глубине $z = H$ задавалось точное распределение потенциала, который пересчитывался на $z = H - h$. При $h = H$ получалось измеряемое распределение потенциала на земной поверхности $U_0(x, y)$, а при $z = H - h$ точное значение потенциала на глубине h .

Зная $U_0(x, y)$ и положив $z = H - h$, восстанавливаем потенциал на глубине h с помощью итерационного процесса (7) и сравниваем его с точным значением. Одновременно фиксируется число итераций, которые потребовались для приближения к точному значению с погрешностью

1%. Рассмотрим модель-1, в которой значение потенциала на глубине H бралось в виде:

$$U(x, y, z = H) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2L} \cdot \cos \frac{\pi y}{2L}; & x \in [-1, 1], \quad y \in [-1, 1], \\ 0 & |x| > 1, \quad |y| > 1. \end{cases} \quad (12)$$

Расчеты проводились для безразмерных переменных $\frac{x}{L}$ и $\frac{y}{L}$ при параметрах $\frac{L}{H}$ и $\frac{h}{H}$. На рис.1 приведены результаты восстановления потенциала при $\frac{L}{H} = 10, \frac{h}{H} = 0.5$ и $\frac{h}{H} = 1$ (рис.1а и рис.1б), а также при $\frac{L}{H} = 5, \frac{h}{H} = 0.5$ и $\frac{h}{H} = 0.99$ (рис.1в и рис.1г). Графики построены при $y = 0$.

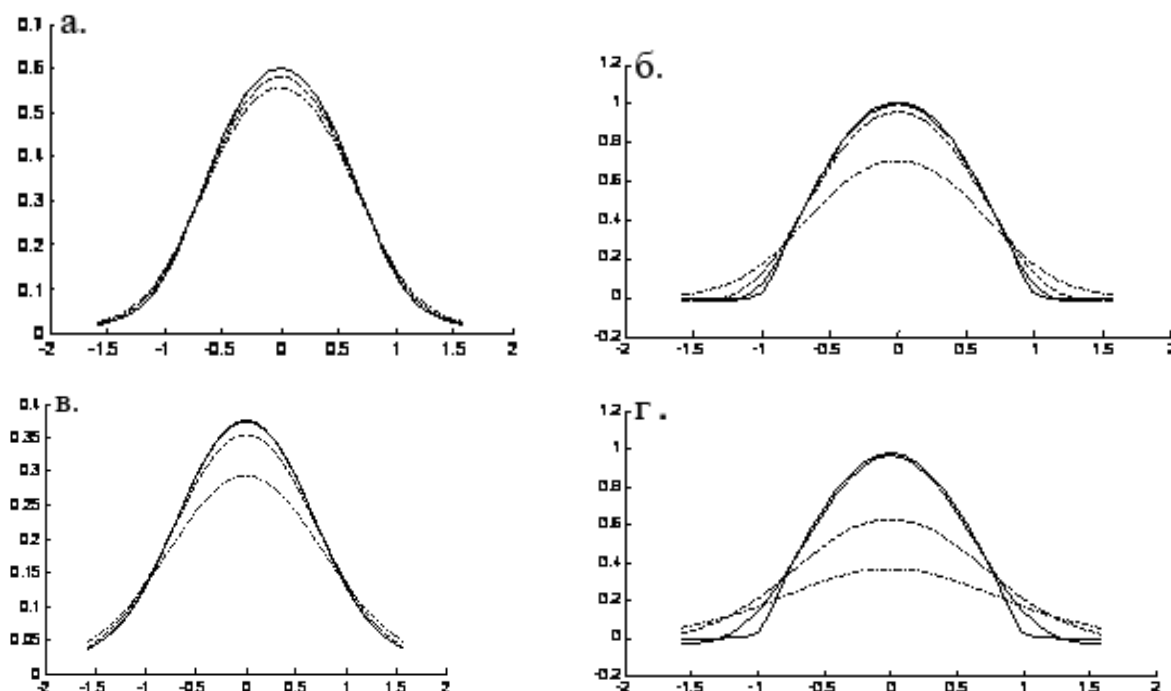


Рис. 1

На рис. 1а приведены кривые точного потенциала (сплошная кривая), вторая, третья и шестая итерации, где шестая итерация уже совпадает с точным решением. На рис. 1в приведены кривые точного потенциала (сплошная кривая), вторая, восьмая и четырнадцатая итерации. Четырнадцатая итерация совпадает с точным решением. Откуда видно, что при $\frac{L}{H} = 10$ сходимость итерационного процесса значительно быстрее, чем

при $\frac{L}{H}=5$. На рис. 1б приведены кривые продолжения потенциала на глубину $\frac{h}{H}=1$ при $\frac{L}{H}=10$, точное значение (сплошная линия), вторая, восьмая и тридцатая итерации. Тридцатая итерация совпадает с точным решением. Для продолжения потенциала на глубину $\frac{h}{H}=1$ при $\frac{L}{H}=5$ нужно больше итераций, что показано на рис. 1г, где приведены точное решение (сплошная кривая), вторая, восьмая и шестидесятая итерации. Это связано с тем, что наиболее медленно продолженный потенциал приближается к точному в центре аномалии ($x=0, y=0$), а в этой точке получение точного значения сильно зависит от величины $\frac{L}{H}$.

Чем более резко меняется потенциал на глубине, тем больше итераций необходимо вычислять. Для анализа этого была рассмотрена модель 2, в которой потенциал на глубине $z=H$ брался в виде кусочно-постоянной функции.

$$U(x, y, z=H) = \begin{cases} 1 & x \in [-1, 1], \quad y \in [-1, 1], \\ 0 & |x| > 1, \quad |y| > 1. \end{cases} \quad (13)$$

Результаты расчетов приведены на рис. 2. На рис. 2а приведен продолженный потенциал на глубине $\frac{h}{H}=0.75$ на четвертой итерации (штрихпунктирная кривая) и точное решение (сплошная кривая). Уже на четвертой итерации получаем хорошее приближение, а на шестой итерации продолженный потенциал совпадает с точным. При продолжении на глубины $\frac{h}{H} \leq 0.5$ достаточно двух или трех итераций.

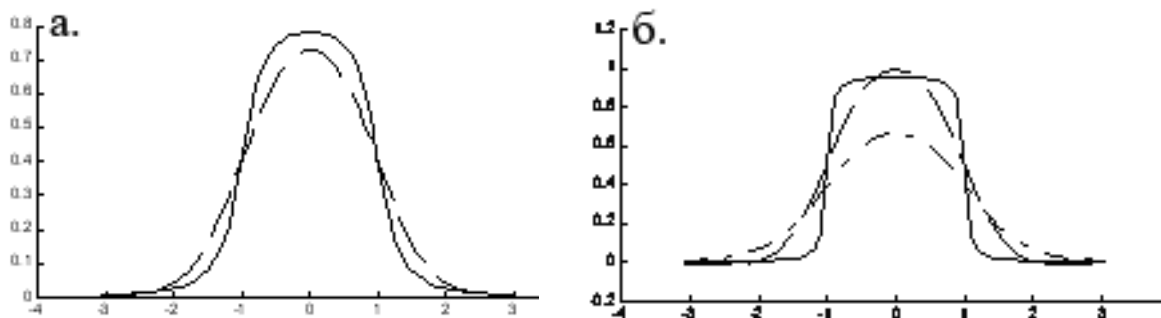


Рис. 2

На рис. 2б приведены кривые точного потенциала (сплошная кривая) и вторая и восьмая итерации для продолженного потенциала при

$\frac{L}{H} = 5$ и $\frac{h}{H} = 0.95$. Следующие итерации уменьшения погрешности не дают. Это связано с тем, что для восстановления разрывного потенциала требуется задание потенциала на земной поверхности на очень большом участке. При конечной области задания $U_0(x, y)$ алгоритм даёт сходимость к некоторой сглаженной функции, что и показано на рис. 2б.

Для анализа возможности разделения отдельных аномалий гравитационного потенциала бала рассмотрена модель-3, в которой потенциал задан в виде двух аномалий как кусочно-постоянная функция:

$$U(x, y, z = H) = \begin{cases} 1 & \frac{x}{H} \in [-3, -1], \quad \frac{y}{H} \in [-1, 1], \\ 1 & \frac{x}{H} \in [1, 3], \quad \frac{y}{H} \in [-1, 1], \\ 0 & \frac{x}{H} \in (-\infty, -3] \cup [-1, 1] \cup [3, \infty), \\ 0 & \frac{y}{H} \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty). \end{cases} \quad (14)$$

Результаты расчетов приведены на рис. 3, где представлено продолжение потенциала на глубины $\frac{h}{H} = 0.5$ и $\frac{h}{H} = 0.75$ при $\frac{L}{H} = 8$. Как было показано выше, при кусочно-постоянном распределении потенциала мы получаем сглаженный результат. Поэтому сходимость в этом случае медленная, но разделение аномалий происходит четко.

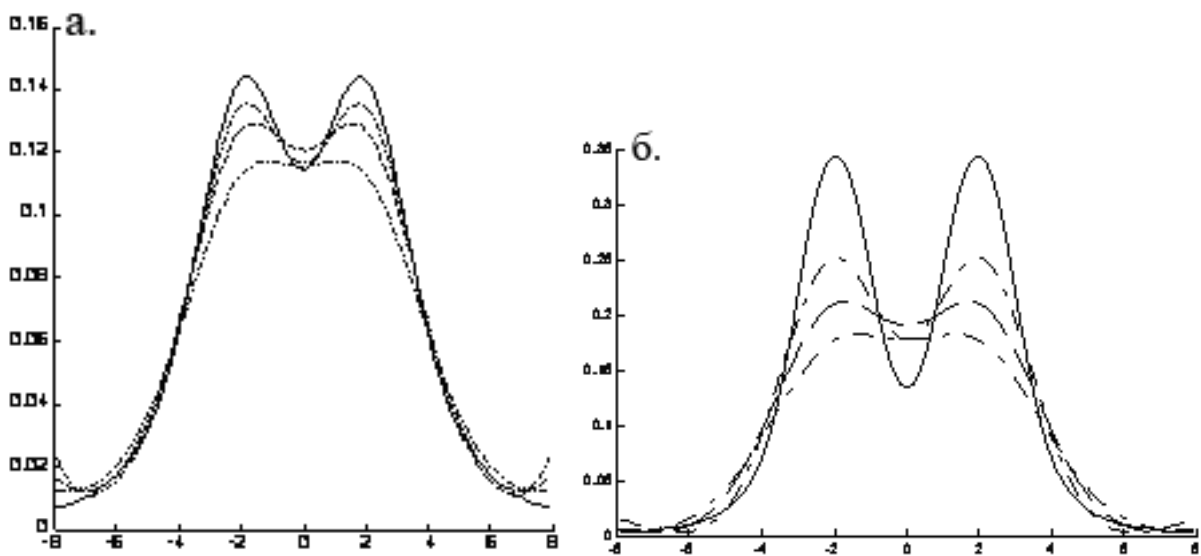


Рис. 3
52

На рис. 3а при продолжении потенциала на глубине $\frac{h}{H} = 0.5$ приведено точное решение (сплошная кривая), а также шестая, пятнадцатая и сороковая итерация. Легко видеть, что итерации сходятся к точному решению, но довольно медленно. На рис. 3б приведено точное решение и, соответственно двенадцатая, двадцать шестая и восьмидесятая итерации при продолжении потенциала на глубину $\frac{h}{H} = 0.75$. Процесс сходится, но в центре аномалии не достигает точного решения, т.к. $U_0(x, y)$ – задано на слишком малой области.

Для оценки влияния размеров области задания потенциала на земной поверхности для той же модели были проведены расчеты при $\frac{L}{H} = 24$. На рис. 4а приведены графики кривых при $\frac{h}{H} = 0.5$, точное решение (сплошная кривая), десятая, двадцатая и тридцатая итерации. Сравнивая результаты изображённые на рис. 3а и рис. 4а видно, что с увеличением $\frac{L}{H}$ точность достигается быстрее и нет загибов на концах. На рис. 4б приведены кривые при $\frac{h}{H} = 0.75$, точное решение (сплошная кривая), десятая, двадцать пятая и семидесятая итерации. Результат аналогичный.

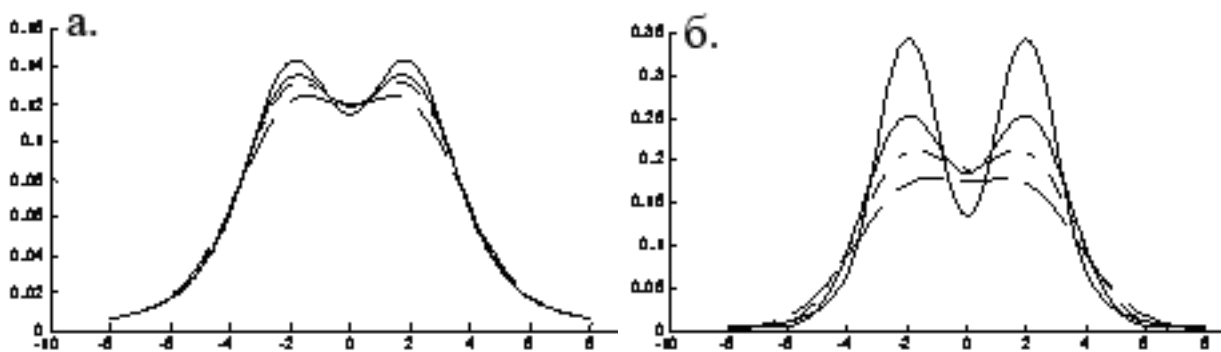


Рис. 4

Так как продолжение потенциала в сторону источников является неустойчивой задачей, то представляет интерес исследование влияния ошибок в задании потенциала на земной поверхности. Для этого в случае

модели-1 в задание $U_0(x, y)$ были внесены случайные ошибки в пределах (-1%, 1%). На рис. 5 приведены результаты вычислительного эксперимента. На рис. 5а и рис. 5б приведены результаты продолжения потенциала на глубины $\frac{h}{H} = 0.5$ и $\frac{h}{H} = 0.95$ для точных данных, а на рис. 5в и рис. 5г тоже для неточных данных. Легко видеть, что ошибки проявились в виде погрешностей в продолженном потенциале, но они не превышают 5% и результат получается устойчивым.

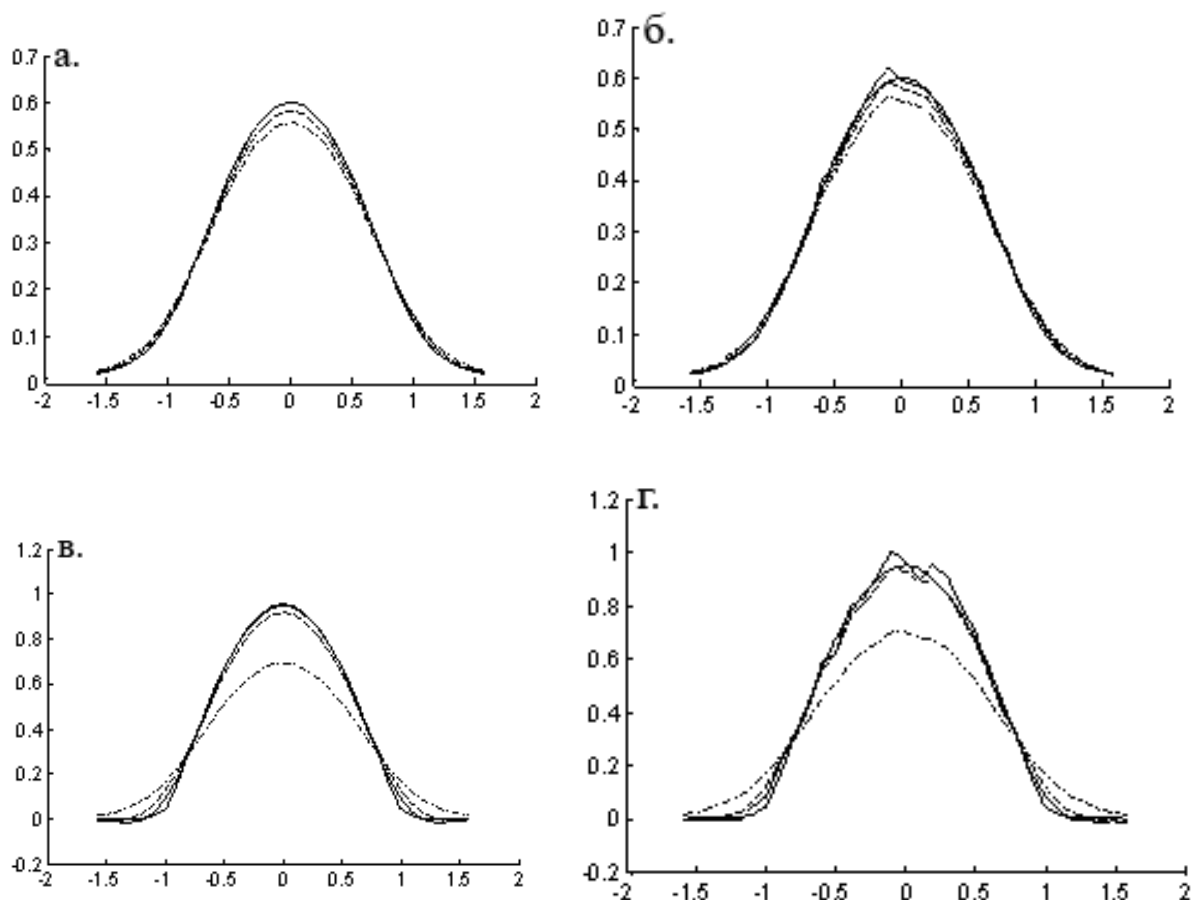


Рис. 5

Заключение.

Проведённый численный анализ итерационного метода продолжения потенциала в сторону источников позволяет утверждать, что этот метод дает устойчивое продолжение потенциала и может эффективно использоваться в обратных задачах гравиметрии.

Литература

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М. Наука, 1979.
2. Гласко В.Б., Мудрецова Е.А., Страхов В.Н. Обратные задачи гравиметрии и магнитометрии. // Некорректные задачи естествознания. М. Изд-во Моск. Ун-та. 1987. С. 89-102.
3. Дмитриев В.И., Дмитриева И.В. Итерационный метод аналитического продолжения гравитационного поля. Прикладная математика и информатика, № 36, М. МАКС Пресс. 2010. // V.I. Dmitriev, I.V. Dmitrieva. Iterative Method for Analytical Continuation of the Gravity Field. Computational Mathematics and Modeling. V. 23, №1, 2012.