

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ПРОТЯЖЕННЫХ ПРОВОДНИКОВ, ПОГРУЖЕННЫХ В ПРОВОДЯЩУЮ СРЕДУ

Введение

Математическое моделирование электромагнитного поля с целью изучения его влияния на протяженные полые цилиндрические металлические проводники в проводящей среде, окруженные тонким слоем диэлектрика, рассмотрено в работах [1-4]. Эти исследования имеют теоретическое и очевидное практическое значение, вследствие известной распространенности глобальных сетей нефтепроводов, газопроводов и других подземных металлических сооружений. Электромагнитные поля, окружающие данные объекты имеют как естественное, так и техногенное происхождение. В подавляющем множестве случаев вариаций геомагнитного поля, как было показано в [3], индукцией Фарадея можно пренебречь и считать возбуждаемые этими вариациями токи постоянно текущими теллурическими токами. Для такой ситуации в работах [2,3] описаны алгоритмы, позволяющие рассчитывать токи в протяженных металлических проводниках, расположенных в слабо проводящей, в общем случае – неоднородной, среде.

Ясно, что в каждом конкретном случае необходимо учитывать характер источника электромагнитного поля, определяющий подход к моделированию. Типичным случаем источника является какая-либо из высоковольтных линий электропередач переменного тока. При этом в качестве рассматриваемого проводника может быть металлический трубопровод, погруженный в землю. В этом случае основное значение имеет электромагнитная индукция. Для моделирования такого случая в [4], была построена методика на основе интегральных уравнений. При этом выбор упрощенных граничных условий позволил свести задачу расчета электромагнитного поля к решению двух независимых одномерных интегральных уравнений и построить таким образом экономичный для расчетов алгоритм, позволяющий получить верную качественную картину распределения электромагнитного поля на поверхности проводника в поле источника указанного выше типа. Однако, принятые упрощения сузили возможности моделирования до случая, когда величины электропроводности окружающей среды и тонкого слоя диэлектрика, окружающего проводник, достаточно близки. Для устранения этого недостатка, с целью моделирования полной картины влияния значений электропроводности

среды и изолирующего покрытия протяженных цилиндрических проводников, в данной работе построен более общий подход, а также получен приближенный метод для быстрого практического расчета электромагнитного поля на рассматриваемых проводниках при произвольных значениях параметров модели.

Описание модели

В соответствии со сказанным выше, под протяженным проводником будем понимать бесконечный полый металлический цилиндр радиуса a , окруженный слоем диэлектрика толщиной d . Учитывая форму тела, на поверхности которого исследуется поведение электромагнитного поля, целесообразно использовать цилиндрические координаты ρ, φ, z , направив ось Oz вдоль оси цилиндра (перпендикулярно плоскости рис. 1, на котором изображено поперечное сечение).

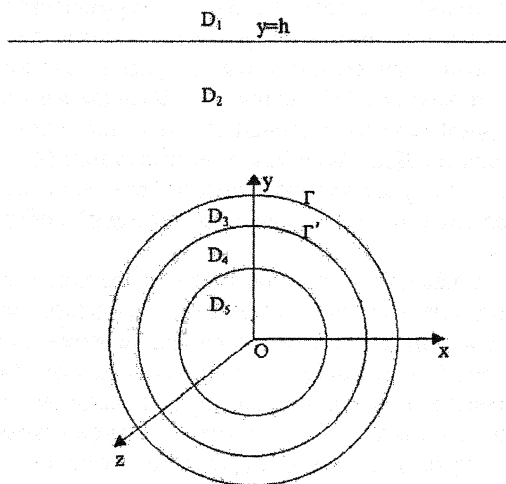


Рис. 1

В качестве источника электромагнитного поля рассмотрим линейный ток, гармонически меняющийся по времени как $e^{-i\omega t}$ с амплитудой I и расположенный на высоте y_e параллельно оси Ox . Внешнюю среду - землю, в которую поместим проводящий цилиндр, считаем слабо проводящим однородным полупространством при $y < h$, где h - глубина от поверхности земли ($y=h$) до оси цилиндра. Проводимость верхнего полупространства полагаем близкой к нулю, соответствующей проводимости воздуха.

Введем следующие обозначения:

$\sigma = \sigma_e + \sigma_a$, $\sigma_e = \{\sigma_1 \text{ в } D_1, \sigma_2 \text{ в } D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup D_5\}$, $\sigma_a = \{\sigma_3 - \sigma_2 \text{ в } D_3, \sigma_4 - \sigma_2 \text{ в } D_4, \sigma_5 - \sigma_2 \text{ в } D_5, 0 \text{ в } D_1 \cup D_2\}$, \mathbf{E}^e , \mathbf{H}^e - поле, создаваемое сторонним током с плотностью \mathbf{j}^e (линейный ток, определенный выше) в среде, состоящей из полупространств D_1 и $D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup D_5$, \mathbf{E}^a , \mathbf{H}^a - аномальная часть поля, создаваемая возмущением от неоднородности - бесконечного цилиндрического проводника с тонким слоем покрывающего его снаружи диэлектрика. Полное поле \mathbf{E} и \mathbf{H} представляется в виде $\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^a$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}^e + \mathbf{H}^a$. Полагаем $\mu = \mu_0$ (магнитная проницаемость вакуума) в D_1 , D_2 и D_3 ; в D_4 $\mu = \mu_m$ (магнитная проницаемость металла). Токами смещения пренебрегаем. Тогда получаем следующие системы уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}^e, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= i\omega \mu \mathbf{H} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}^e &= \sigma_e \mathbf{E}^e + \mathbf{j}^e, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}^e &= i\omega \mu \mathbf{H}^e. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}^a &= \sigma \mathbf{E}^a, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}^a &= i\omega \mu \mathbf{H}^a \end{aligned} \quad (3)$$

где система (1) рассматривается во всем пространстве с электропроводностью σ , система (2) рассматривается так же во всем пространстве с определенной в нем выше электропроводностью σ_e , система (3) рассматривается вне $D_3 \cup D_4 \cup D_5$.

Согласно [4] для нижнего полупространства получаем:

$$E_x^e = \frac{i\omega \mu I}{\pi(k_2^2 - k_1^2)} \int_0^\infty e^{(y-h)\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} - y_e \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} (\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} - \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}) \cos \lambda z \, d\lambda,$$

$$H_z^e = -\frac{I}{\pi(k_2^2 - k_1^2)} \int_0^\infty e^{(y-h)\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} - y_e \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} (\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} - \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}) \times \cos \lambda z \, d\lambda,$$

$$H_y^e = -\frac{I}{\pi(k_2^2 - k_1^2)} \int_0^\infty e^{(y-h)\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} - z_e \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} \lambda (\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} - \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}) \sin \lambda z \, d\lambda,$$

где $k_l^2 = i\omega \mu \sigma_l$ ($l=1,2$), и в цилиндрических координатах ρ , φ , z ($x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$) имеем

$$E_\rho^e = E_x^e \cos \varphi, E_\varphi^e = -E_x^e \sin \varphi, E_z^e = 0, H_\varphi^e = H_y^e \sin \varphi, H_\rho^e = H_y^e \cos \varphi.$$

Применяя одномерное преобразование Фурье по координате z

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\cdot) e^{i\zeta z} dz,$$

получим уравнения Максвелла вне источника (используем значок \sim для образов):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial \varphi} + i\zeta \tilde{H}_\varphi &= \sigma \tilde{E}_\rho, & \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + i\zeta \tilde{E}_\varphi &= i\omega \mu \tilde{H}_\rho, \\ -i\zeta \tilde{H}_\rho - \frac{\partial \tilde{H}_{z'}}{\partial \rho} &= \sigma \tilde{E}_\varphi, & -i\zeta \tilde{E}_\rho - \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial \varphi} &= i\omega \mu \tilde{H}_\varphi, \\ \frac{1}{\rho} \tilde{H}_\varphi + \frac{\partial \tilde{H}_\varphi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{H}_\rho}{\partial \varphi} &= \sigma \tilde{E}_z, & \frac{1}{\rho} \tilde{E}_\varphi + \frac{\partial \tilde{E}_\varphi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{E}_\rho}{\partial \varphi} &= i\omega \mu \tilde{H}_z. \end{aligned} \quad (4)$$

И для компонент "внешнего" поля получаем

$$\begin{aligned} \tilde{E}_x^e &= \frac{i\omega \mu I}{k_2^2 - k_1^2} e^{(y-h)\sqrt{\zeta^2 - k_2^2} - y_e \sqrt{\zeta^2 - k_1^2}} (\sqrt{\zeta^2 - k_1^2} - \sqrt{\zeta^2 - k_2^2}), \\ \tilde{H}_z^e &= -\frac{I}{k_2^2 - k_1^2} e^{(y-h)\sqrt{\zeta^2 - k_2^2} - y_e \sqrt{\zeta^2 - k_1^2}} \sqrt{\zeta^2 - k_2^2} (\sqrt{\zeta^2 - k_1^2} - \sqrt{\zeta^2 - k_2^2}), \\ \tilde{H}_y^e &= -\frac{iI}{k_2^2 - k_1^2} e^{(y-h)\sqrt{\zeta^2 - k_2^2} - y_e \sqrt{\zeta^2 - k_1^2}} \zeta (\sqrt{\zeta^2 - k_1^2} - \sqrt{\zeta^2 - k_2^2}). \end{aligned}$$

Решение системы (4) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \tilde{E}_\rho &= \tilde{E}_\rho^{(1)} + \tilde{E}_\rho^{(2)}, & \tilde{H}_\rho &= \tilde{H}_\rho^{(1)} + \tilde{H}_\rho^{(2)}, \\ \tilde{E}_\varphi &= \tilde{E}_\varphi^{(1)} + \tilde{E}_\varphi^{(2)}, & \tilde{H}_\varphi &= \tilde{H}_\varphi^{(1)} + \tilde{H}_\varphi^{(2)}, \\ \tilde{E}_z &= \tilde{E}_z^{(2)} = V, & \tilde{H}_z &= \tilde{H}_z^{(1)} = U, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_\rho^{(1)} &= \frac{i\omega\mu}{\rho(k^2 - \zeta^2)} \frac{\partial \tilde{H}_z^{(1)}}{\partial \varphi}, & \tilde{E}_\rho^{(2)} &= -\frac{i\zeta}{k^2 - \zeta^2} \frac{\partial \tilde{E}_z^{(2)}}{\partial \rho}, \\
\tilde{E}_\varphi^{(1)} &= -\frac{i\omega\mu}{k^2 - \zeta^2} \frac{\partial \tilde{H}_z^{(1)}}{\partial \rho}, & \tilde{E}_\varphi^{(2)} &= -\frac{i\zeta}{\rho(k^2 - \zeta^2)} \frac{\partial \tilde{E}_z^{(2)}}{\partial \varphi}, \\
\tilde{H}_\rho^{(1)} &= -\frac{i\zeta}{k^2 - \zeta^2} \frac{\partial \tilde{H}_z^{(1)}}{\partial \rho}, & \tilde{H}_\rho^{(2)} &= \frac{\sigma}{\rho(k^2 - \zeta^2)} \frac{\partial \tilde{E}_z^{(2)}}{\partial \varphi}, \\
\tilde{H}_\varphi^{(1)} &= -\frac{i\zeta}{\rho(k^2 - \zeta^2)} \frac{\partial \tilde{H}_z^{(1)}}{\partial \varphi}, & \tilde{H}_\varphi^{(2)} &= -\frac{\sigma}{k^2 - \zeta^2} \frac{\partial \tilde{E}_z^{(2)}}{\partial \rho},
\end{aligned} \tag{6}$$

и функции U, V являются решениями уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + (k^2 - \zeta^2)U &= 0, \\
\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + (k^2 - \zeta^2)V &= 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Полагая, что диаметр рассматриваемого полого металлического цилиндрического проводника превышает 1 м, толщина стенки составляет 1-1.5 см, а толщина диэлектрика d - на порядок меньше, и, что магнитная проницаемость металла (сталь) составляет $200\mu_0$ (μ_0 - магнитная проницаемость вакуума), получаем (см. [4]) для частоты стороннего тока в проводе 50 гц, что правомерно использование импедансного условия Леонтовича на поверхности Γ' (рис.1) металла

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = Z(\mathbf{H} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}, \tag{8}$$

где \mathbf{n} - внешняя единичная нормаль к поверхности Γ' , и

$$Z = \sqrt{\frac{\omega\mu_4}{i\sigma_4}} = \sqrt{\frac{\omega\mu_4}{2\sigma_4}}(1-i)$$

Интегральные уравнения

Из (8) получаем для тангенциальных компонент на границе Γ'

$$\tilde{E}_z = -Z\tilde{H}_\varphi, \quad \tilde{E}_\varphi = Z\tilde{H}_z. \tag{9}$$

На границе Γ для тангенциальных компонент должны выполняться условия непрерывности

$$\left[\tilde{E}_z \right] = \left[\tilde{E}_\varphi \right] = \left[\tilde{H}_z \right] = \left[\tilde{H}_\varphi \right] = 0,$$

где квадратными скобками обозначен разрыв функции при переходе через границу. Отсюда получаем на Γ

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{z2}^a &= \tilde{E}_{z3}, & \tilde{E}_{\varphi 2}^a + \tilde{E}_{\varphi 2}^e &= \tilde{E}_{\varphi 3}, \\ \tilde{H}_{z2}^a + \tilde{H}_{z2}^e &= \tilde{H}_{z3}, & \tilde{H}_{\varphi 2}^a + \tilde{H}_{\varphi 2}^e &= \tilde{H}_{\varphi 3}, \end{aligned} \quad (10)$$

где индексы 2, 3 означают соответственно значения на Γ со стороны области D_2 и D_3

Используя равенства (5) и (6), условия (9) и (10) можно представить в виде

$$V_3 = -\frac{i\zeta Z}{\rho(k_3^2 - \zeta^2)} \frac{\partial U_3}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_3 Z}{k_3^2 - \zeta^2} \frac{\partial V_3}{\partial \rho}, \quad (11)$$

$$ZU_3 = -\frac{i\omega\mu}{k_3^2 - \zeta^2} \frac{\partial U_3}{\partial \rho} - \frac{i\zeta}{\rho(k_3^2 - \zeta^2)} \frac{\partial V_3}{\partial \varphi}$$

$$\begin{aligned} V_2 = V_3, & -\frac{i\omega\mu}{k_2^2 - \zeta^2} \frac{\partial U_2}{\partial \rho} - \frac{i\zeta}{\rho(k_2^2 - \zeta^2)} \frac{\partial V_2}{\partial \varphi} + \tilde{E}_{\varphi 2}^e = \\ & = -\frac{i\omega\mu}{k_3^2 - \zeta^2} \frac{\partial U_3}{\partial \rho} - \frac{i\zeta}{\rho(k_3^2 - \zeta^2)} \frac{\partial V_3}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} U_2 + \tilde{H}_{z2}^e &= U_3, & -\frac{i\zeta}{\rho(k_2^2 - \zeta^2)} \frac{\partial U_2}{\partial \varphi} - \frac{\sigma_2}{k_2^2 - \zeta^2} \frac{\partial V_2}{\partial \rho} + H_{\varphi 2}^e &= \\ & = -\frac{i\zeta}{\rho(k_3^2 - \zeta^2)} \frac{\partial U_3}{\partial \varphi} - \frac{\sigma_3}{k_3^2 - \zeta^2} \frac{\partial V_3}{\partial \rho} \end{aligned}$$

Обозначим $u=V_2=V_3$ на Γ , $v=V_3$ на Γ' . Считая слабым влияние верхнего полупространства на поля на поверхности проводника для u и v имеем на Γ и Γ' следующие интегральные представления:

$$u(P) = -\frac{i}{2} \int_{\Gamma} \left[H_0^{(1)}(R_2) \frac{\partial V_2(Q)}{\partial \rho_Q} - u(Q) \frac{\partial H_0^{(1)}(R_2)}{\partial \rho_Q} \right] d\Gamma_Q, \quad (13)$$

$$u(P) = \frac{i}{2} \int_{\Gamma} \left[H_0^{(1)}(R_3) \frac{\partial V_3(Q)}{\partial \rho_Q} - u(Q) \frac{\partial H_0^{(1)}(R_3)}{\partial \rho_Q} \right] d\Gamma_Q - \frac{i}{2} \int_{\Gamma'} \left[H_0^{(1)}(R'_3) \frac{\partial V_3(Q)}{\partial \rho_Q} - v(Q') \frac{\partial H_0^{(1)}(R'_3)}{\partial \rho_Q} \right] d\Gamma_{Q'}, \quad (14)$$

$$v(P') = -\frac{i}{2} \int_{\Gamma'} \left[H_0^{(1)}(R'_3) \frac{\partial V_3(Q')}{\partial \rho_{Q'}} - v(Q') \frac{\partial H_0^{(1)}(R'_3)}{\partial \rho_{Q'}} \right] d\Gamma_{Q'} + \frac{i}{2} \int_{\Gamma} \left[H_0^{(1)}(R_3) \frac{\partial V_3(Q)}{\partial \rho_Q} - u(Q) \frac{\partial H_0^{(1)}(R_3)}{\partial \rho_Q} \right] d\Gamma_Q, \quad (15)$$

где точки $P, Q \in \Gamma, P', Q' \in \Gamma'$,

$$R_3 = 2\rho_3 \left| \sin \frac{\varphi_P - \varphi_Q}{2} \right| \sqrt{k_3^2 - \zeta^2}, \quad R_2 = 2\rho_3 \left| \sin \frac{\varphi_P - \varphi_Q}{2} \right| \sqrt{k_2^2 - \zeta^2},$$

$$R'_3 = 2\rho_2 \left| \sin \frac{\varphi_{P'} - \varphi_{Q'}}{2} \right| \sqrt{k_3^2 - \zeta^2}, \quad R = \sqrt{\rho_3^2 + \rho_2^2 - 2\rho_3\rho_2 \cos(\varphi_P - \varphi_Q)},$$

$\tilde{H}_0^{(1)}(\xi)$ – функция Ханкеля первого рода.

Из (11) и (12), пренебрегая зависимостью H_z от φ и ограничиваясь линейным приближением производной по ρ в пределах слоя D_3 , получим

$$\left. \frac{\partial V_3}{\partial \rho} \right|_{\Gamma'} = \frac{k_3^2 - \zeta^2}{\sigma_3 Z}, \quad \left. \frac{\partial V_2}{\partial \rho} \right|_{\Gamma} = \frac{k_2^2 - \zeta^2}{\sigma_2} \left(\tilde{H}_\varphi^e + \frac{v}{Z} \right). \quad (16)$$

Подставим выражения для производных по ρ радиусу из (16) в интегральные представления (13), (14) и (15) и заменим производную от функции Ханкеля, используя равенство $dH_0^{(1)}(\xi)/d\xi = -H_1^{(1)}(\xi)$. Сложим представления (13) и (14), поделив результат на 2 и учтя условие непрерывности на границе Γ . Тогда из (13), (14) и (15) получим систему из двух интегральных уравнений, решение которых является приближенным решением поставленной задачи для образов Фурье.

$$\begin{aligned}
u(P) = & \frac{i}{4} \int_{\Gamma} \left\{ H_0^{(1)}(R_3) - \frac{\sigma_3(k_3^2 - \zeta^2)}{\sigma_2(k_3^2 - \zeta^2)} H_0^{(1)}(R_2) \right\} \frac{k_3^2 - \zeta^2}{\sigma_3 Z} v(Q') - \\
& - \frac{k_3^2 - \zeta^2}{\sigma_2} H_0^{(1)}(R_2) \tilde{H}_\varphi^e + \left[\sqrt{k_3^2 - \zeta^2} H_1^{(1)}(R_3) - \sqrt{k_2^2 - \zeta^2} H_1^{(1)}(R_2) \right] \cdot \\
& \cdot \left\{ \sin \frac{\varphi_P - \varphi_Q}{2} \right\} u(Q) \Big| d\Gamma_Q - \\
& - \frac{i}{4} \int_{\Gamma'} \left[H_0^{(1)}(R_3) \frac{k_3^2 - \zeta^2}{\sigma_3 Z} + \sqrt{k_3^2 - \zeta^2} H_1^{(1)}(R_3) \frac{\rho_3 - \rho_2 \cos(\varphi_P - \varphi_Q)}{R} \right] \cdot \\
& \cdot v(Q') d\Gamma_{Q'} .
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
v(P') = & -\frac{i}{2} \int_{\Gamma'} \left[H_0^{(1)}(R_3) \frac{k_3^2 - \zeta^2}{\sigma_3 Z} + \sqrt{k_3^2 - \zeta^2} H_1^{(1)}(R_3) \left| \sin \frac{\varphi_{P'} - \varphi_{Q'}}{2} \right| \right] \cdot \\
& \cdot v(Q') d\Gamma_{Q'} + \\
& + \frac{i}{2} \int_{\Gamma} \left[H_0^{(1)}(R_3) \frac{k_3^2 - \zeta^2}{\sigma_3 Z} v(Q') + \sqrt{k_3^2 - \zeta^2} H_1^{(1)}(R_3) \frac{\rho_3 - \rho_2 \cos(\varphi_{P'} - \varphi_{Q'})}{R} u(Q) \right] \cdot \\
& \cdot d\Gamma_Q .
\end{aligned}$$

Как показывают расчеты, в пределах области D_3 внешнее поле весьма слабо зависит от φ , т.е.

$$\frac{\partial \tilde{H}_z^e}{\partial \varphi} \approx 0, \quad \frac{\partial \tilde{H}_y^e}{\partial \varphi} \approx 0, \quad \frac{\partial \tilde{E}_x^e}{\partial \varphi} \approx 0. \tag{18}$$

Пренебрегая зависимостью от φ внешнего поля на Γ , можно получить более простой путь решения рассматриваемой задачи по сравнению с решением системы (16). Действительно, из допущения точного выполнения равенств (18) получаем

$$\tilde{H}_z^e = f_1(\rho, \zeta), \quad \tilde{H}_y^e = f_2(\rho, \zeta), \quad \tilde{E}_x^e = f_3(\rho, \zeta). \tag{19}$$

Отсюда

$$\tilde{H}_\varphi^e = f_2(\rho, \zeta) \cos \varphi, \quad \tilde{E}_\varphi^e = -f_3(\rho, \zeta) \sin \varphi. \tag{20}$$

Используя (19) и (20), из (11) и (12) получаем условия

$$V_3 = \frac{\sigma_3 Z}{k_3^2 - \zeta^2} \frac{\partial V_3}{\partial \rho} \quad \text{на } \Gamma' \tag{21}$$

и

$$V_2 = V_3, \\ -\frac{\sigma_2}{k_2^2 - \zeta^2} \frac{\partial V_2}{\partial \rho} + H_0^e \varphi_2 = -\frac{\sigma_3}{k_3^2 - \zeta^2} \frac{\partial V_3}{\partial \rho}. \quad (22)$$

Теперь, очевидно, в области D_3 уравнения для V (7) можно искать в виде $V = W(\rho, \zeta) \cos \varphi$. Таким образом, получаем уравнение для $W(\rho, \zeta)$

$$\rho^2 W'' + \rho W' + (\alpha \rho^2 - 1)W = 0, \quad (23)$$

где $\alpha = k^2 - \zeta^2$.

Заменой $\xi = \sqrt{\alpha} \rho$ уравнение (23) приводится к виду

$$\xi^2 \bar{W}'' + \xi \bar{W}' + (\xi^2 - 1)\bar{W} = 0, \quad (24)$$

где $\bar{W}(\xi, \zeta) = W(\xi / \sqrt{\alpha}, \zeta)$. Решение уравнения Бесселя (24) представляется в виде

$$\bar{W} = A H_1^{(1)}(\xi) + B H_1^{(2)}(\xi) \quad (25)$$

Причем \bar{W} должна удовлетворять условиям (21) и (22):

$$\bar{W}_3 = \frac{\sigma_3 Z}{\sqrt{\alpha_3}} \frac{\partial \bar{W}_3}{\partial \xi} \quad \text{при } \rho = \rho_2 \quad (26)$$

$$\text{и } \bar{W}_2 = \bar{W}_3, \quad -\frac{\sigma_2}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\partial \bar{W}_2}{\partial \xi} + f_2 = -\frac{\sigma_3}{\sqrt{\alpha_3}} \frac{\partial \bar{W}_3}{\partial \xi} \quad \text{при } \rho = \rho_3. \quad (27)$$

Подставляя (25) в (25) и (26), и решая систему относительно A и B , получим

$$A = \frac{f_2}{a + bc}, \quad B = cA, \quad (28)$$

где

$$a = \frac{\sigma_2}{\sqrt{\alpha_2}} \left[\frac{H_0^{(1)}(\sqrt{\alpha_2} \rho_3)}{H_1^{(1)}(\sqrt{\alpha_2} \rho_3)} - \frac{1}{\sqrt{\alpha_2} \rho_3} \right] H_1^{(1)}(\sqrt{\alpha_3} \rho_3) - \\ - \frac{\sigma_3}{\sqrt{\alpha_3}} \left[H_0^{(1)}(\sqrt{\alpha_3} \rho_3) - \frac{1}{\sqrt{\alpha_3} \rho_3} H_1^{(1)}(\sqrt{\alpha_3} \rho_3) \right], \\ b = \frac{\sigma_2}{\sqrt{\alpha_2}} \left[\frac{H_0^{(1)}(\sqrt{\alpha_2} \rho_3)}{H_1^{(1)}(\sqrt{\alpha_2} \rho_3)} - \frac{1}{\sqrt{\alpha_2} \rho_3} \right] H_1^{(2)}(\sqrt{\alpha_3} \rho_3) - \\ - \frac{\sigma_3}{\sqrt{\alpha_3}} \left[H_0^{(2)}(\sqrt{\alpha_3} \rho_3) - \frac{1}{\sqrt{\alpha_3} \rho_3} H_1^{(2)}(\sqrt{\alpha_3} \rho_3) \right].$$

$$c = -\frac{\frac{Z\sigma_3}{\sqrt{\alpha_3}} \left[H_0^{(1)}(\sqrt{\alpha_3}\rho_2) - \frac{1}{\sqrt{\alpha_3}\rho_2} H_1^{(1)}(\sqrt{\alpha_3}\rho_2) \right] - H_1^{(1)}(\sqrt{\alpha_3}\rho_2)}{\frac{Z\sigma_3}{\sqrt{\alpha_3}} \left[H_0^{(2)}(\sqrt{\alpha_3}\rho_2) - \frac{1}{\sqrt{\alpha_3}\rho_2} H_1^{(2)}(\sqrt{\alpha_3}\rho_2) \right] - H_1^{(2)}(\sqrt{\alpha_3}\rho_2)}$$

Основной интерес для исследования электромагнитного поля на поверхности рассматриваемых цилиндрических металлических проводников с точки зрения его влияния на процессы коррозии, очевидно, имеет радиальная компонента электрического поля, образ Фурье которой вычисляется из (6), (25) и (28)

$$\begin{aligned} \tilde{E}_\rho = -\frac{i\zeta}{\sqrt{\alpha_3}} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \xi} \cos\varphi = -\frac{i\zeta}{\sqrt{\alpha_3}} \left\{ \left[H_0^{(1)}(\sqrt{\alpha_3}\rho_3) - \frac{1}{\sqrt{\alpha_3}\rho_3} H_1^{(1)}(\sqrt{\alpha_3}\rho_3) \right] + \right. \\ \left. + \left[H_0^{(2)}(\sqrt{\alpha_3}\rho_3) - \frac{1}{\sqrt{\alpha_3}\rho_3} H_1^{(2)}(\sqrt{\alpha_3}\rho_3) \right] \right\} \cos\varphi. \end{aligned}$$

Вычисляя обратное преобразование Фурье

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\zeta z} d\zeta$$

от \tilde{E}_ρ , получим искомое поле, и плотность радиального тока "утечки"

$$j_\rho = \sigma_2 E_\rho.$$

Предполагая, что в реальности слой диэлектрика на поверхности погруженного в землю проводника приобретает со временем микрповреждения, имеющие близкое к равномерному распределение по поверхности, зададим для расчетов значения удельной электропроводности этого слоя в пределах 10^{-4} - 10^{-6} См/м. Для единичной амплитуды стороннего линейного тока, по вышеописанной методике рассчитаем радиальную компоненту плотности тока на поверхности проводника, а также радиальный ток, протекающий за полупериод через цилиндрическую поверхность, концы которой отстоят на расстоянии z от центра O (см. рис.1). Результаты таких расчетов представлены на рисунках 2 - 7.

На рис.2 показаны правые половины симметричных кривых изменения с расстоянием от центра (точки пересечения проекции линии с заданным током с осью цилиндрического проводника) реальной части комплексной амплитуды радиальной компоненты плотности тока для трех значений высоты расположения токовой линии. Штриховая кривая, имеющая наименьшее значение в нуле, соответствует высоте 20 м, нарисованная удлиненным штрихом кривая - 15 м и сплошная кривая - 10 м. При этом значения электропроводности земли и изолятора взяты соответственно равными 10^{-2} и 10^{-4} См/м.

На всех следующих рисунках, как на рис.2, так же изображены правые половины соответствующих симметричных кривых.

На рис.3 показаны кривые для реальной части комплексной амплитуды радиальной компоненты плотности тока для высоты расположения провода с током 15 м при трех значениях электропроводности изолятора - 10^{-4} См/м (сплошная кривая), 10^{-5} См/м (кривая с длинным штрихом) и 10^{-6} См/м (кривая с коротким штрихом).

На рис. 4 изображены так же кривые для реальной части комплексной амплитуды радиальной компоненты плотности тока для высоты расположения провода с током 15 м, но для разных значениях электропроводности земли: 10^{-2} См/м (кривая с коротким штрихом), 10^{-3} См/м (кривая с длинным штрихом) и 10^{-4} См/м (сплошная кривая).

На рис. 5 показаны кривые (соответствующие параметрам моделей на рис.2) для реальной части комплексной амплитуды радиальной компоненты тока, как указано выше, протекающего через цилиндрическую поверхность, концы которой отстоят на расстоянии z от центра. Аналогичные кривые изображены на рис. 6 и 7, с параметрами моделей соответственно рис. 3 и 4.

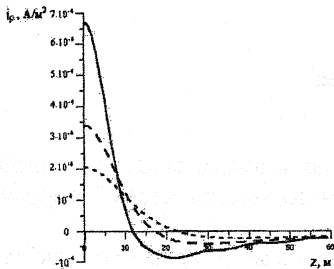


Рис. 2

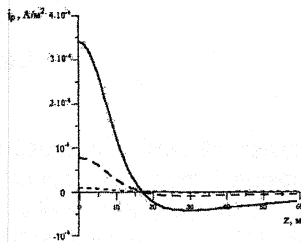


Рис. 3

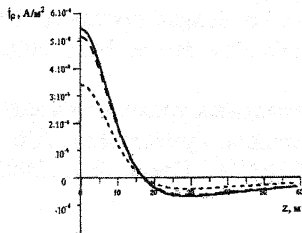


Рис. 4

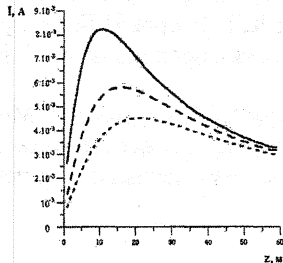


Рис. 5

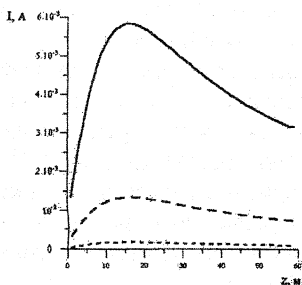


Рис. 6

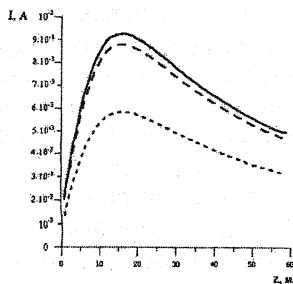


Рис. 7

Таким образом, очевидно, разработанная методика моделирования позволяет быстро (давая по-видимому, хорошее приближение в пределах сделанных допущений в отношении характера рассматриваемого в данной работе класса моделей) рассчитывать электромагнитное поле на поверхности бесконечно протяженных изолированных металлических проводников, погруженных в проводящую землю при произвольных значениях параметров: радиуса проводника, высоты расположения токовой линии, частоты колебаний тока, электропроводности изолирующего слоя, металла и земли.

Литература

1. Стрижевский И.В., Дмитриев В.И. Теория и расчет влияния электрифицированной железной дороги на подземные металлические сооружения М., Стройиздат, 1967, 248 с.
2. Егоров И.В., Дмитриев В.И. Математическое моделирование теллурического поля в окрестности протяженных проводников//Сб. Прикладная математика и информатика. М., МАКС Пресс, №6, 2000. с. 30-38.
3. Ваньян Л.Л., Егоров И.В. Теллурические токи вблизи протяженных металлических проводников//М. Изв. РАН, Физика Земли, №11, 2002. с. 3-10.
4. Дмитриев В.И., Егоров И.В. Метод интегральных уравнений в задаче влияния электромагнитного поля на протяженные проводники. //Сб. Прикладная математика и информатика. М., МАКС Пресс, №12, 2002. с. 32-42.