

В.И. Дмитриев, Р.В. Сальников

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА*

Метод интегральных уравнений широко используется в математической физике при решении краевых задач. При этом часто краевые задачи редуцируются к интегральным уравнениям первого рода. Как известно, решение интегральных уравнений первого рода является некорректной задачей, которая решается применением метода регуляризации [1]. Если ядро интегрального уравнения имеет интегрируемую особенность, то его решение получается методом саморегуляризации [2]. Основным недостатком этих методов является сильная зависимость решения от параметра регуляризации. При малом параметре проявляется неустойчивость решения, а при больших значениях параметра происходит сильное сглаживание решения. Предлагаемый ниже специальный итерационный процесс решения интегрального уравнения первого рода позволяет получать решение с высокой точностью.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_a^b K(x, y)\varphi(y) dy = f(x), \quad (1)$$

в котором ядро $K(x, y) \in C$. Выделим класс ядер δ -образного вида, т.е. $K(x, y)$ достигает своего максимума при $x = y$ и убывает при увеличении $|x - y|$. К интегральным уравнениям данного типа относятся интегральные уравнения дифракции, теории потенциала и др.

В этом случае мы можем записать уравнение (1) в виде:

$$\varphi(x) \int_a^b K(x, y) dy + \int_a^b K(x, y)(\varphi(y) - \varphi(x)) dy = f(x). \quad (2)$$

Второй член в (2) обычно мал. Это связано с тем, что при близких $x \approx y$ второй член уравнения мал, т.к. в него входит $(\varphi(y) - \varphi(x))$. Если же y сильно отличается от x , то тогда мало ядро уравнения $K(x, y)$.

Поэтому можно использовать следующий итерационный процесс для получения решения:

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 02-01-00300 и 03-05-64167.

$$\varphi_n(x) \int_a^b K(x, y) dy = f(x) - \int_a^b K(x, y) (\varphi_{n-1}(y) - \varphi_{n-1}(x)) dy \quad (3)$$

с начальным условием $\varphi_0(x) \equiv 0$. Или

$$\varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(x) + \frac{f(x) - \int_a^b K(x, y) \varphi_{n-1}(y) dy}{\int_a^b K(x, y) dy}. \quad (4)$$

Отметим, что если итерационный процесс сходится, то $\varphi_n(x)$ стремится к точному решению интегрального уравнения (1). Устойчивое решение получается благодаря тому, что поправка к $\varphi_{n-1}(x)$ в формуле (4) всегда имеет норму производной меньше, чем норма $\varphi'_{n-1}(x)$ для любого n .

Предложенный метод опробывался на двух практически важных ядрах интегрального уравнения:

$$K(x, y) = \frac{1}{\sqrt{(x-y)^2 + s^2}} \text{ и } K(x, y) = \ln \frac{1}{(x-y)^2 + s^2} \quad (5)$$

при $a = -1$ и $b = 1$.

Скорость сходимости итераций зависит от параметра s . Так, например, для $s = 0.1$ уже седьмая итерация дает практически точное решение, а для $s = 1$ приемлемое решение получается на семидесятой итерации.

Наибольший интерес представляет результат при $s = 1$. В этом случае ядро уравнения изменяется очень слабо. Максимальное значение $\frac{1}{\sqrt{(x-y)^2 + s^2}}$ равно 1, а минимальное значение равно 0.577. Это означает, что даже для очень медленно изменяющегося ядра предложенный метод дает устойчивое решение.

Представляет интерес исследование предложенного метода для случая, когда получаемое решение имеет интегрируемую особенность. Было рассмотрено уравнение

$$\int_{-1}^1 \varphi(y) \ln \frac{1}{(x-y)^2} dy = 1, \quad (6)$$

решение которого хорошо известно.

На рис. 1 приведены решения для разных итераций.

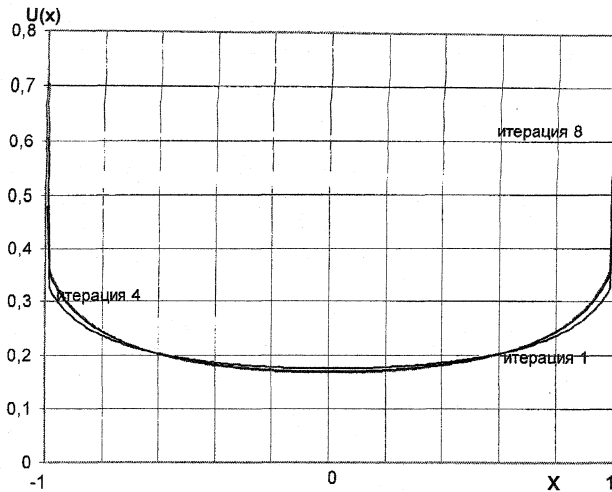


Рис. 1. Итерационные решения уравнения при $s = 0$

Легко видеть, что уже 4-ая итерация дает решение с высокой точностью. Если сгладить ядро интегрального уравнения (6), т.е. рассмотреть уравнение

$$\int_{-1}^1 \varphi(y) \ln \frac{1}{(x-y)^2 + s^2} dy = f(x), \quad (7)$$

то решение получаем при большем числе итераций. На рис. 2 и рис. 3 приведены правая часть уравнения $f(x)$ и решение $\varphi(x)$ для разных итераций, соответственно, для $s = 0,01$ и $s = 0,1$. Легко видеть, что при 8-ой и 11-ой итерации мы получаем решение, практически совпадающее с точным решением.

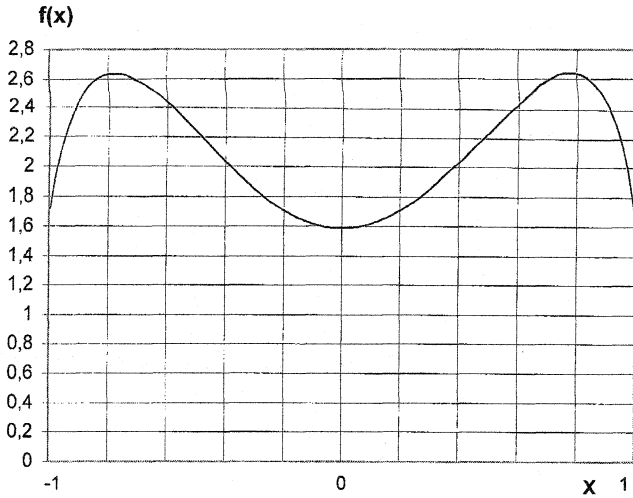


Рис. 2а. Правая часть интегрального уравнения при параметре $s = 0,01$

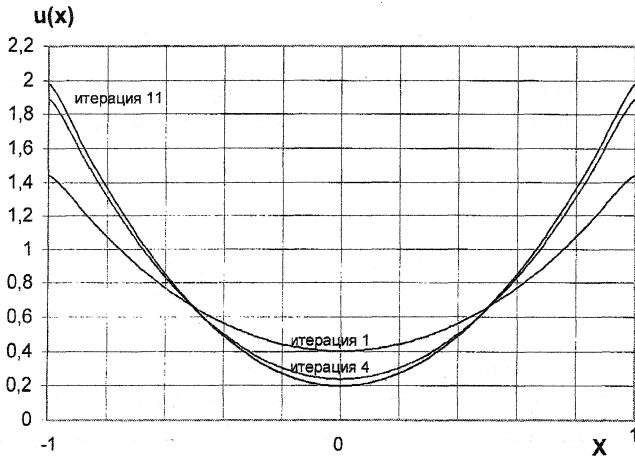


Рис. 2б. Решения интегрального уравнения при параметре $s = 0,01$

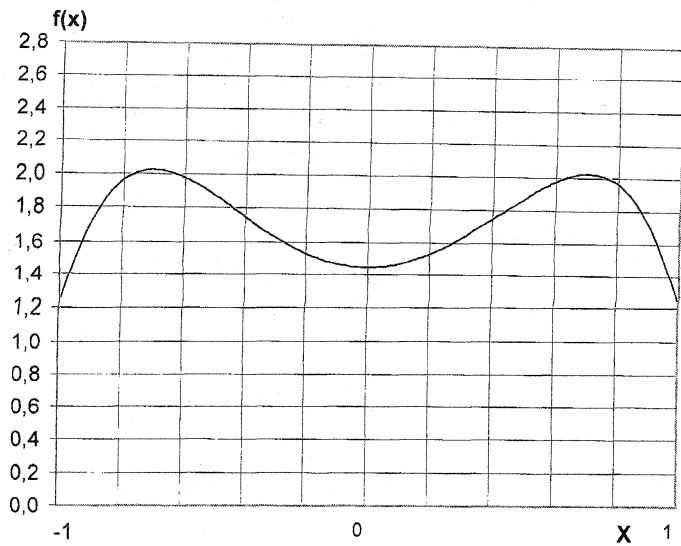


Рис. 3а. Правая часть интегрального уравнения при параметре $s = 0,1$

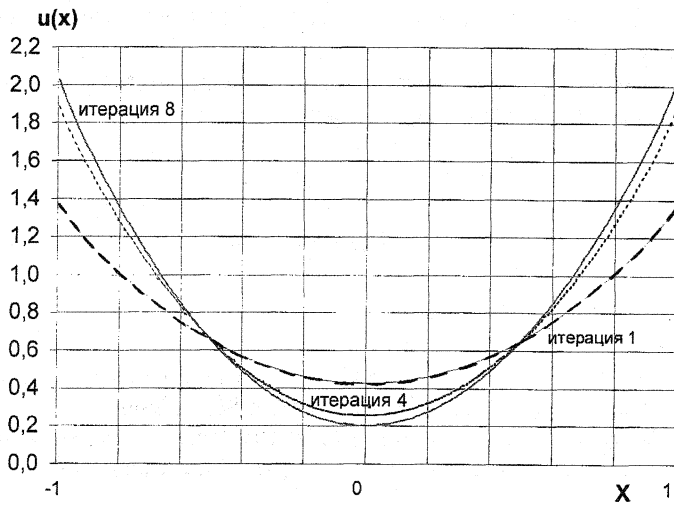


Рис. 3б. Решения интегрального уравнения при параметре $s = 0,1$

Таким образом, практические примеры для типовых ядер интегральных уравнений первого рода показывают устойчивую и быструю сходимость предлагаемого итерационного метода. Отметим, что малые ошибки в правой части уравнения практически не влияют на решение интегрального уравнения, т.к. правая часть входит только в определение нулевого приближения

$$\varphi_0(x) = f(x)/D(x), \quad (8)$$

где

$$D(x) = \int_a^b K(x, y) dy.$$

Итерационный процесс (4) тогда можно записать в виде

$$\varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(x) + \varphi_0(x) - \frac{1}{D(x)} \int_a^b K(x, y) \varphi_{n-1}(y) dy. \quad (9)$$

Это означает, что ошибка правой части входит только в определение $\varphi_0(x)$. При последующих итерациях она уменьшается за счет интегрирования.

Таким образом, разработанный метод позволяет устойчиво решать интегральные уравнения первого рода.

Литература

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 288с.
2. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. М. Изд-во Моск. ун-та, 1987.- 167 с.