В.И. Дмитриев, Ж. Ингтем

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СПЛАЙН АППРОКСИМАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА*

Введение

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_a^b K(x,\xi)u(\xi)d\xi = f(x). \tag{1}$$

Как известно, решение этого уравнения неустойчиво, и для его решения применяются специальные методы регуляризации [1]. Основой регуляризации является принадлежность решения компакту, например, ограниченность производной решения дает нам компакт в C.

Если в самом алгоритме решения уравнения (1) будет содержаться условие ограниченности производной, то такой алгоритм даст устойчивое решение интегрального уравнения первого рода. Одним из таких способов является использование сплайн аппроксимации решения с минимальной нормой производной сплайн функции.

п.1. Построение сплайн-интерполяционной функции

Нам необходимо построить квадратичный сплайн, проходящий через значения функции $u(x)$, заданных точках $x_n = a + (n-1)h$, $n \in [1, N]$, где $h = \dfrac{b-a}{N-1}$, $x_1 = a$, $x_N = b$. Представим сплайн-функцию в виде:

$$S(x) = u_{n+1}\frac{x - x_n}{h} + u_n\frac{x_{n+1} - x}{h} + \alpha_n\frac{(x-x_n)(x_{n+1}-x)}{h}; \qquad x \in [x_n, x_{n+1}]\ , \quad n \in [1\ ,\ N\text{ - }1]\ ; \tag{2}$$

$$S'(x) = \frac{1}{h}(u_{n+1} - u_n + \alpha_n(x_{n+1} + x_n - 2x)) \tag{3}$$

где $u_n = u(x_n)$.

Будем искать сплайн $S(x) \in C_1$. Тогда в узлах сетки $x = x_n$, $n \in [2, N-1]$ должны выполняться условия непрерывности

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 02-01-00300 и 03-05-64167.

функции и ее производной, что дает условия для определения коэффициентов α_n, $n \in [1, N-1]$:

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} - \alpha_n = \frac{u_{n+2} - u_{n+1}}{h} + \alpha_{n+1}, \quad n \in [1, N-2].$$

Откуда получаем, что каждый элемент α_n выражается через предыдущий элемент:

$$\alpha_{n+1} = -\alpha_n - \frac{u_n - 2u_{n+1} + u_{n+2}}{h} \ ; n \in [1, N-2]. \tag{4}$$

Выражение (4) позволяет определить все α_n через α_1:

$$\alpha_n = (-1)^{n-1}\alpha_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \frac{u_K - 2u_{K+1} + u_{K+2}}{h}, \ n \in [2, \ N-1]; \tag{5}$$

Параметр α_1 мы выбираем так, чтобы достигался минимум $\|S'(x)\|^2_{L_2}$. Учитывая (3), получим задачу для определения α_1:

$$\min_{\alpha_1} \sum_{n=1}^{N-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(\frac{u_{n+1} - u_n}{h} + \alpha_n \frac{x_{n+1} + x_n - 2x}{h} \right)^2 dx \,. \tag{6}$$

Учитывая, что из (5) имеем $\dfrac{d\alpha_n}{d\alpha_1} = (-1)^{n-1}$, получаем условие минимума (6) в виде:

$$\sum_{n=1}^{N-1}(-1)^{n-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(\frac{u_{n+1} - u_n}{h} + \alpha_n \frac{x_{n+1} + x_n - 2x}{h} \right) \frac{x_{n+1} + x_n - 2x}{h} dx = 0. \tag{7}$$

Подставив в (7) выражение α_n через α_1 (5), получим уравнение для α_1:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{u_2 - u_1}{h} + \alpha_1 \frac{x_2 + x_1 - 2x}{h} \right) \frac{x_2 + x_1 - 2x}{h} dx +$$

$$+ \sum_{n=2}^{N-1}(-1)^{n-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(\frac{u_{n+1} - u_n}{h} + (-1)^{n-1}\alpha_1 \frac{x_{n+1} + x_n - 2x}{h} + \right.$$

$$\left. + \ \left(\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{u_k h - 2u_{k+1} h + u_{k+2} h}{h^2} \right) \frac{x_{n+1} + x_n - 2x}{h} \right) \frac{x_{n+1} + x_n - 2x}{h} dx = 0$$

Откуда, окончательно, находим:

$$\alpha_1 = \frac{1}{b - a} \sum_{n=2}^{N-1} (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k (u_k - 2u_{k+1} + u_{k+2}) \ . \tag{8}$$

Подставив (8) в (5), получим выражение для α_n при $n \in [2, N-1]$:

$$\alpha_n = (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{b-a} \sum_{n=2}^{N-1} (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k (u_k - 2u_{k+1} + u_{k+2}) \right) + \\ + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{u_K - 2u_{K+1} + u_{K+2}}{h}. \tag{9}$$

Таким образом, мы полностью определили сплайн-интерполяционную функцию $S(x)$, определяемую выражениями (2), (8) и (9).

Полученный сплайн линейно зависит от значений функции на сетке $u_n = u(x_n)$ и является самым плавным сплайном из всех возможных. Это свойство позволяет интерполировать заданную на сетке функцию сплайном с минимальной нормой производной. Такой сплайн эффективно применять для вычисления производной от таблично заданной функции. С помощью такого сплайна возможно решение интегральных уравнений первого рода.

п.2. Решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода

Рассмотрим решение уравнения (1) с помощью построенной сплайн-функции. Подставим сплайн (2) в уравнение (1) и получим:

$$\sum_{m=1}^{N-1} \int_{x_m}^{x_{m+1}} K(x,y) \Big[u_{m+1} \frac{x - x_m}{h} + u_m \frac{x_{m+1} - x}{h} + \\ + \alpha_m \frac{(x - x_m)(x_{m+1} - x)}{h} \Big] dx = f(y). \tag{10}$$

Введем обозначения

$$\frac{1}{h} \int_{x_m}^{x_{m+1}} K(x, y_n)(x - x_m) dx = \beta_{mn}$$

$$\frac{1}{h} \int_{x_m}^{x_{m+1}} K(x, y_n)(x_{m+1} - x) dx = \theta_{mn} \tag{11}$$

$$\frac{1}{h} \int_{x_m}^{x_{m+1}} K(x, y_n)(x - x_m)(x_{m+1} - x) dx = \gamma_{mn}$$

Тогда, удовлетворив уравнение (10) в точках сетки

$y = y_n$, $y_n = a + (n-1)h$, $n \in [1, N]$, $h = \dfrac{b-a}{N-1}$, получим линейную систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{m=1}^{N\text{-}1} (u_{m+1}\beta_{mn} + u_m\theta_{mn} + \alpha_m\gamma_{mn}) = f_n \qquad n \in [1, N], \tag{12}$$

в которой α_m, согласно (8-9), линейно выражается через u_k, $k \in [1, N]$. Коэффициенты (11) можно выразить через локальные моменты ядра интегрального уравнения:

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathrm{mn}} &= \int_0^{\mathrm{h}} \mathrm{K}(\xi + \mathrm{x_m}, \mathrm{y_n})\ d\xi; \\
\beta_{\mathrm{mn}} &= \frac{1}{\mathrm{h}}\int_0^{\mathrm{h}} \mathrm{K}(\xi + \mathrm{x_m}, \mathrm{y_n})\xi\ d\xi; \\
\varphi_{\mathrm{mn}} &= \frac{1}{\mathrm{h}}\int_0^{\mathrm{h}} \mathrm{K}(\xi + \mathrm{x_m}, \mathrm{y_n})\xi^2\ d\xi.
\end{aligned} \tag{13}$$

Тогда имеем

$$\theta_{mn} = \delta_{mn} - \beta_{mn};\ \gamma_{mn} = h\beta_{mn} - \varphi_{mn}, \tag{14}$$

а уравнение (12) примет вид:

$$\sum_{m=1}^{N\text{-}1} \left(u_{m+1}\beta_{mn} + u_m(\delta_{mn} - \beta_{mn}) + \alpha_m(h\beta_{mn} - \varphi_{mn}) \right) = f_n, \quad n \in [1, N]. \tag{15}$$

Запишем выражения (8-9) в компактном виде

$$\alpha_m = \sum_{k=1}^{N} \alpha_{mk} u_k\ . \tag{16}$$

Тогда из уравнения (15) можно после ряда преобразований получить, окончательно, систему для $u_k = u(y_k)$:

$$u_1\left((\delta_{1n} - \beta_{1n}) + \sum_{m=1}^{N\text{-}1} \alpha_{m1}(h\beta_{mn} - \varphi_{mn}) \right) + u_N\left(\beta_{N\text{-}1n} + \sum_{m=1}^{N\text{-}1} \alpha_{mN}(h\beta_{mn} - \varphi_{mn}) \right) +$$
$$\sum_{m=2}^{N-1} u_m\left(\beta_{m\text{-}1n} + (\delta_{mn} - \beta_{mn})\right) + \sum_{k=2}^{N-1} u_k\left(\sum_{m=1}^{N\text{-}1} \alpha_{mk}(h\beta_{mn} - \varphi_{mn}) \right) = f_n,\ n \in [1, N].$$

Полученная система линейных уравнений позволяет устойчиво решать уравнение Фредгольма первого рода. Регуляризация решения происходит благодаря использованию сплайна с ограниченной производной. Опробывание метода проводилось на уравнении вида:

$$\int_0^1 \ln\left((y-x)^2+l^2\right)\cdot u(x)\,dx = f(y),\; y\in[0,1].$$

Проведенные исследования показали, что решение получается с высокой точностью, если число точек разбиений не превышает несколько десятков. При $N = 50$ решение отходило от точного (рис. 1) и (рис.2). На рисунках точное решение дается непрерывной кривой, а приближенное решение слабо осциллирует вокруг точного решения. Этот эффект связан с погрешностями, возникающими в сплайн-функции при большом числе точек. Если необходимо брать большое число точек сетки N, то для получения точного решения необходимо разбить интервал интегрирования на несколько участков. На каждом участке строится своя сплайн-функция, и мы приходим к системе уравнений. В нашем случае участок делился на две части и результат решения совпадал с точным решением с высокой точностью.

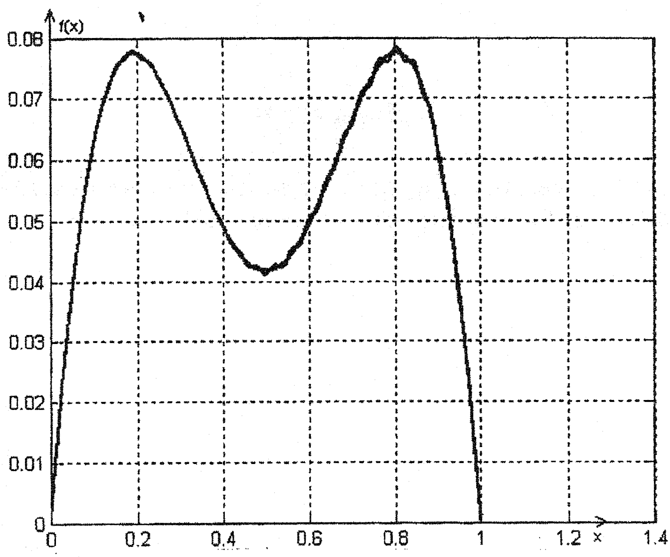

Рис.1

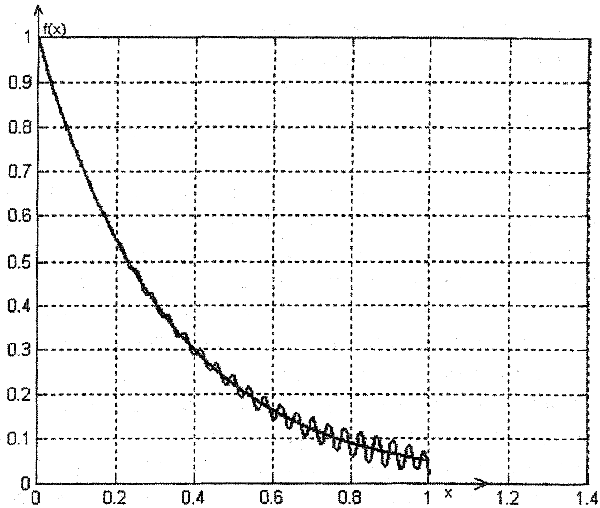

Рис.2

Литература

1. А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. Методы решения некорректных задач. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1986. – 288с.