

Раздел II. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ

Дмитриев В.И., Бейтоллахи А.

О спектральном подходе к квазитрехмерной обратной задаче вертикального электрического зондирования.

Введение.

Вертикальное электрическое зондирование (ВЭЗ) один из основных методов электроразведки на постоянном токе [1]-[3]. Цель метода: по измерениям электрического поля на земной поверхности в зависимости от расстояния между измерительными и питающими электродами определить распределение электропроводности в Земле, а, следовательно, получить данные о строении земных недр. Метод решения обратной задачи ВЭЗ достаточно детально разработан для одномерного случая, когда электропроводность зависит только от глубины [4]. Представляет интерес разработка метода решения обратной задачи для более широкого класса неоднородных сред, когда электропроводность изменяется не только по глубине, но и вдоль земной поверхности. В работе [5] развит метод математического моделирования вертикального электрического зондирования квазислоистых двумерных сред. В настоящей работе будет исследован метод решения обратной задачи ВЭЗ двумерных сред на основе спектра кажущегося сопротивления.

Рассмотрим вертикальное электрическое зондирование двумерной неоднородной проводящей среды, в которой цилиндрическое неоднородное тело расположено в слоистой среде (рис.1).

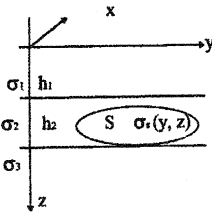


рис.1

Электропроводность распределена следующим образом

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_c(z) & \text{при } (y, z) \notin S \\ \sigma_s(y, z) & \text{при } (y, z) \in S \end{cases}$$

где $\sigma_c(z)$ распределение электропроводности в слоистой среде, а $\sigma_s(y, z)$ распределение электропроводности внутри неоднородности.

В обратной задаче вертикального электрического зондирования требуется определить распределение электропроводности по измерениям электрического поля на земной поверхности ($Z = 0$), возбужденного точечным источником постоянного тока, расположенным также на земной поверхности.

Электрическое поле измеряется в зависимости от расстояния от источника поля (разноса) r и местоположения источника вдоль оси $OY(y_0)$. Таким образом, по измеренной функции от двух переменных (r, y_0) мы должны определить двумерное распределение электропроводности $\sigma(y, z)$.

Возможны два подхода к измерениям электрического поля. Обычно при каждом фиксированном положении источника поля в точке $M_s = (x = 0, y = y_s, z = 0)$ измеряется электрическое поле $E_y(x = 0, y = r, z = 0)$, то есть разнос $r = y$ берется вдоль оси OY . Считается, что поскольку в этом случае измерения проводятся вкост неоднородности, мы имеем более высокую разрешающую способность.

Однако на практике часто встречаются случаи, когда описанный выше способ измерения невозможен. Этот случай связан с ограничением возможностей измерения электрического поля вдоль оси OY . Например, в горных долинах мы имеем двумерное распределение электропроводности $\sigma(y, z)$, так как вдоль долины (ось OX) электропроводность изменяется слабо. Однако иметь большие разносы вдоль оси OY невозможно. Поэтому в этом случае для источника в точке $M_s = (x = 0, y = y_s, z = 0)$ измеряется электрическое поле $E_x(x = r, y = y_s, z = 0)$. Таким образом, по функции двух переменных $(x = r, y = y_s)$ мы должны определить $\sigma(y, z)$. Именно в этом случае возможен специальный спектральный подход к решению обратной квазитрехмерной задачи ВЭЗ.

Так как измерения поля проводятся по оси OX , вдоль которой распределение электропроводности не изменяется, мы можем взять преобразование Фурье по координате x и перейти от квазитрехмерной задачи к двумерной спектральной задаче, решение которой намного легче.

п.1. Постановка прямой и обратной задачи ВЭЗ.

Электрическое поле \bar{E} выражается через потенциал $U(x, y, z)$ в виде

$$\bar{E}(M) = -gradU \quad (1)$$

Потенциал $U(x, y, z)$ является решением граничной задачи

$$div(\sigma gradU) = I \cdot \delta(r_{M M_s}), \quad z > 0, \quad (2)$$

с граничным условием

$$\frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad (3)$$

условиями сопряжения

$$[U]_{c_m} = 0 ; \quad \left[\sigma \frac{\partial U}{\partial n} \right]_{c_m} \quad (4)$$

на всех границах c_m разрыва электропроводности, I – полный ток в источнике, а $r_{M M_s} = \sqrt{x^2 + (y - y_s)^2 + z^2}$ – расстояние от источника в точке $M_s = (x = 0, y = y_s, z = 0)$ до произвольной точки $M = (x, y, z)$. Прямая задача ВЭЗ (1-4) состоит в определении электрического поля $\bar{E}(M)$ при известном распределении $\sigma(y, z)$. Обратная задача ВЭЗ состоит в определении распределения электропроводности по дополнительному условию

$$E_x(x = r, y = y_s, z = 0) = E_x^c(r, y_s), \quad (5)$$

где $E_x^c(r, y_s)$ – измеряется экспериментально.

Рассмотрим образ Фурье от потенциала $U(x, y, z)$ по x :

$$U(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y, z) e^{-ix} dx = 2 \int_0^{\infty} U(x, y, z) \cos v x dx \quad (6)$$

Спектр потенциала $U(y, z)$ является решением двумерной граничной задачи, зависящей от параметра v . $U(y, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \frac{\partial U}{\partial z} \right) - v^2 \sigma U = -I \delta(y - y_s) \delta(z) \quad (7)$$

граничному условию на земной поверхности

$$\frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad (8)$$

и условиям сопряжения на линиях L_m разрыва непрерывности электропроводности

$$[U]_{L_m} = 0; \quad \left[\sigma \frac{\partial U}{\partial n} \right]_{L_m} = 0 \quad (9)$$

Прямая задача (7-9) для спектра потенциала определяет $U(y, z)$ для заданного распределения электропроводности $\sigma(y, z)$.

Для постановки обратной задачи мы должны использовать условие (5). Однако при этом необходимо по спектру потенциала $U(y, z)$ вычислить сам потенциал, взяв обратное преобразование Фурье. Это невыгодно. Целесообразней перейти в условии (5) к спектру и решать обратную задачу в спектральной области. Заметим, что применять преобразование Фурье непосредственно к условию (5) мы не имеем права, так как электрическое поле $E_x(x = r, y = y_s, z = 0)$ имеет особенность при $v \rightarrow 0$. Поэтому условие (5) надо записать в виде:

$$E_x(x = r, y = y_s, z = 0) - \frac{I}{2\pi \sigma_1 r^2} = E_x^e(r, y_s) - \frac{I}{2\pi \sigma_1 r^2},$$

вычтя из наблюдаемого поля поле однородного полупространства. Теперь мы имеем право применить преобразование Фурье:

$$\int_0^{\infty} \left\{ E_x(x = r, y = y_s, z = 0) - \frac{I}{2\pi \sigma_1 r^2} \right\} \sin v x dx = S_E(v, y_s), \quad (10)$$

где S_E — спектр Фурье от измеряемого электрического поля за вычетом поля полупространства

$$S_E(v, y_s) = \int_0^{\infty} \left(E_x^e(r, y_s) - \frac{I}{2\pi \sigma_1 r^2} \right) \sin v r dr \quad (11)$$

Обратная задача теперь состоит в определении $\sigma(y, z)$ по известному спектру $S_E(v, y_s)$ в задаче (7-10). Конечно, при этом мы должны по прямой задаче (7-9) вычислять спектр потенциала (и соответственно спектр электрического поля). При решении двумерной обратной задачи ВЭЗ нам необходимо уметь решать одномерную задачу, так как она входит в общий алгоритм.

п.2. Спектральный подход в одномерной обратной задаче ВЭЗ.

Рассмотрим вначале прямую задачу (7-9) для одномерного распределения электропроводности $\sigma = \sigma_c(z)$. В этом случае мы можем применить к рассмат-

риваемой задаче преобразование Фурье по координате y , введя новую функцию $V(z, \lambda)$, через которую $U(y, z)$ выражается в виде

$$U(y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(z, \lambda) e^{i\lambda(y-y_s)} d\lambda \quad (12)$$

Функция $V(z, \lambda)$ по переменной z является решением граничной задачи

$$\frac{d}{dz}(\sigma_c(z) \frac{dV}{dz}) - \eta^2 \sigma_c(z) V = 0, \quad z > 0, \quad \eta = \sqrt{\lambda^2 + \nu^2}, \quad \text{Re } \eta \geq 0 \quad (13)$$

$$\frac{dV}{dz} = -\frac{1}{\sigma_c(z=0)} \quad \text{при } z=0, \quad V \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty \quad (14)$$

$$[V]_{z_m} = 0, \quad \left[\sigma_c \frac{dV}{dz} \right]_{z_m} = 0, \quad m \in [1, n],$$

где z_m — точки разрыва $\sigma_c(z)$, причем $\sigma_c(z) = \sigma_c^{(n+1)}$ при $z > z_n$

Задача (13-14) легко решается с помощью введения импедансной функции

$$Z(z, \lambda) = \frac{-\eta \cdot V(z, \lambda)}{\sigma_c(z) \cdot V'(z, \lambda)}, \quad (15)$$

которая является решением уравнения Риккати

$$\frac{dZ}{dz} - \eta \sigma_c(z) Z^2 = \frac{-\eta}{\sigma_c(z)}; \quad 0 \leq z \leq z_n \quad (16)$$

с начальным условием при $z = z_n$:

$$Z(z_n, \lambda) = \frac{1}{\sigma_c^{(n+1)}} \quad (17)$$

Решив задачу Коши (16-17) и определив $Z(z=0, \lambda) = Z_0(\lambda)$, мы получим, согласно условиям (14-15) уравнения:

$$\left. \frac{dV}{dz} \right|_{z=0} = -\frac{1}{\sigma_c(z=0)}$$

$$\left. \frac{dV}{dz} \right|_{z=0} + \frac{\eta}{\sigma_c(z=0) Z_0(\lambda)} V(z=0, \lambda) = 0$$

Откуда находим

$$V(z=0, \lambda) = \frac{Z_0}{\eta} \quad (18)$$

Подставив полученное выражение (18) в (12) и учтя четность функции $V(z=0, \lambda)$ по λ , получим окончательно спектральный потенциал на земной поверхности при $z=0$:

$$U(z=0) = U_0(\nu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} Z_0(\lambda) \text{Cos } \lambda (y - y_s) \frac{d\lambda}{\eta} \quad (19)$$

Спектральный потенциал $U_0(\nu)$ расходится при $y \rightarrow y_s$, поэтому мы должны вычесть из (19) спектральный потенциал однородного полупространства с проводимостью $\sigma_c(z=0)$, для однородного полупространства импеданс Z_p из (16-17) равен

$$Z_p = \frac{1}{\sigma_c(z=0)}.$$

Тогда спектральный потенциал для однородного полупространства, согласно (19), при $z=0$ равен

$$U_{op}(v) = \frac{I}{2\pi\sigma_c(z=0)} \int_0^{\infty} \text{Cos} \lambda (y - y_s) \frac{d\lambda}{\eta} = \frac{I}{2\pi\sigma_c(z=0)} \cdot K_0(v|y - y_s|),$$

где $K_0(v|y - y_s|)$ функция Макдональда. Следовательно, аномальный спектральный потенциал равен

$$U_a(v) = U_0(v) - U_{op}(v) = \frac{I}{2\pi\sigma_c(z=0)} \int_0^{\infty} \text{Cos} \lambda (y - y_s) (\sigma_c(z=0)Z_0 - 1) \frac{d\lambda}{\eta} \quad (20)$$

Полученное выражение определено уже и при $y = y_s$.

Для решения обратной задачи нам необходимо знать спектр аномального электрического поля $S_E(v, y_s)$, который связан с аномальным спектральным потенциалом, согласно (1) и (20), соотношением

$$S_E(v, y_s) = \frac{v}{2} U_a(v) \Big|_{y=y_s} = \frac{Iv}{4\pi\sigma_c(z=0)} \int_0^{\infty} (\sigma_c(z=0)Z_0 - 1) \frac{d\lambda}{\eta} \quad (21)$$

В дальнейшем мы будем использовать нормированный спектр электрического поля, который назовем спектром аномального кажущегося сопротивления

$$S_p(v) = \frac{4\pi}{Iv} S_E = \int_0^{\infty} (Z_0(\lambda) - \rho_c(z=0)) \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + v^2}} \quad (22)$$

где $\rho_c(z) = I/\sigma_c(z)$ - распределение удельного сопротивления по глубине.

Таким образом, при спектральном подходе одномерная обратная задача состоит в определении распределения сопротивления $\rho_c(z)$ из задачи Коши (16-17) по дополнительному условию (22), в котором $S_p(v)$ определяется, согласно (11), по измеренному полю $E_x^e(r, y_s)$ в виде:

$$S_p^e(v) = \frac{2}{v} \int_0^{\infty} \left(\frac{2\pi}{I} E^e(r) - \rho(z=0) / r^2 \right) \text{Sin} vr dr \quad (23)$$

Обычно обратная задача решается в классе кусочно-постоянных функций распределения сопротивления

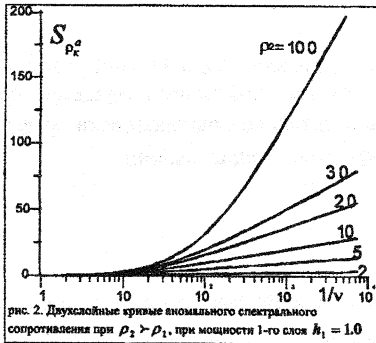
$$\sigma_c(z) = \sigma_c^{(m)} \quad \text{при } z_{m-1} < z < z_m, \quad m \in [1, n], \quad z_0 = 0. \quad (24)$$

В этом случае задача Коши (16-17) решается аналитически в виде рекуррентной формулы

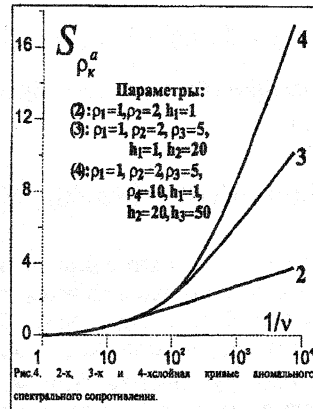
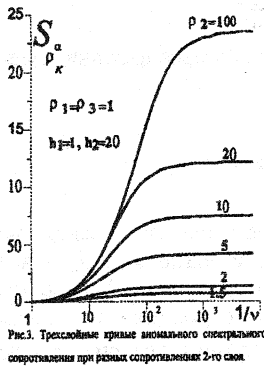
$$Z_{m-1} = \rho_m \frac{(Z_m + \rho_m) + (Z_m - \rho_m)e^{-2\sqrt{\lambda^2 + \nu^2} h_m}}{(Z_m + \rho_m) - (Z_m - \rho_m)e^{-2\sqrt{\lambda^2 + \nu^2} h_m}} \quad (25)$$

$Z_m = Z(z = z_m)$, $h_m = z_m - z_{m-1}$, $m \in [1, n]$. где

Зная $Z_n = \rho_{n+1}$, согласно (25), находим $Z_0(\lambda)$. Откуда, согласно (22), ЛЕГКО ВЫЧИСЛЯЕМ $S_\rho(\nu)$, сравнивая которое с экспериментально наблюдаемым $S_\rho^e(\nu)$, мы можем решать обратную задачу, определив $\{\rho_m\}$ и $\{h_m\}$.



Рассмотрим вначале свойства спектра аномального кажущегося сопротивления. Согласно формул (25) и (22) для различных слоистых сред рассчитывался спектр аномального кажущегося сопротивления. На рис.2 приведены кривые S_ρ в зависимости от спектрального параметра $1/\nu$.



Легко видеть, что при увеличении ρ_2 относительно ρ_1 кривые S_ρ более быстро возрастают при уменьшении спектрального параметра ν . На рис. 3-4 приведены

кривые S_p от $1/v$ для трехслойной среды при различных ρ_2 . На рис.5 приведены для сравнения кривые S_p для двух-, трех- и четырехслойных сред. Все приведенные расчеты показывают, что спектр аномального кажущегося сопротивления существенно зависит от параметров слоистой среды. Это позволяет надеяться, что использование $S_p(v)$ позволит решать обратную задачу зондирования слоистой среды.

п.3. Одномерная обратная задача с использованием спектра аномального кажущегося сопротивления.

Пусть на земной поверхности проведено вертикальное электрическое зондирование в точке $M_0 = (x, y = 0, z = 0)$, где определено кажущееся сопротивление $\rho_k(x)$ в зависимости от разности x вдоль оси однородности среды. Тогда, согласно (23), спектр аномального кажущегося сопротивления

$$S_p^*(v) = \frac{2}{v} \int_0^{\infty} (\rho_k(x) - \rho_1) \sin vx \frac{dx}{x^2}, \quad (26)$$

где $\rho_k(x) = \frac{2\pi}{I} x^2 E^*(x)$ — наблюдаемое кажущееся сопротивление, а ρ_1 — сопротивление первого слоя. При известном распределении сопротивления слоистой среды $\rho_c(z)$ согласно (22), мы можем вычислить теоретический спектр аномального кажущегося сопротивления

$$S_p(v) = A(\rho_c(z)) = \int_0^{\infty} (Z_0(\lambda) - \rho_1) \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + v^2}}. \quad (27)$$

Решением обратной задачи будет $\rho_c(z)$, которое даст близкое к наблюдаемому S_p , т.е.

$$\|S_p(v) - S_p^*(v)\|_{L_2} = \|A(\rho_c(z)) - S_p^*(v)\|_{L_2} \leq \delta, \quad (28)$$

где δ — погрешность метода вертикального электрического зондирования, в которую входят как погрешность измерений, так и модельная погрешность.

Так как обратная задача неустойчива, то условию (28) удовлетворяет множество $\rho_c(z) \in R_\delta$, эквивалентных по точности δ решений, которые могут сильно отличаться друг от друга. Поэтому необходимо регуляризовать решение обратной задачи, введя на основе априорной информации дополнительное условие, которое стабилизирует решение обратной задачи.

Обычный прием стабилизации решения обратной задачи связан с нахождением наиболее грубого решения, удовлетворяющего условию (28). При реализации этого подхода выбирается кусочно-постоянное распределение электропроводности слоистой среды (24). Приближенным решением обратной задачи

считается среда с минимальным числом слоев, для которой вычисленное $S_p(v)$ удовлетворяет условию (28).

Другой способ регуляризации основан на утверждении, доказанном в [6] что в обратной задаче ВЭЗ устойчиво определяется интегральное сопротивление:

$$T(z) = \int_0^z \rho_c(z) dz \quad (29)$$

В этом случае мы можем не ограничивать число слоев в обратной задаче (28). Лучше всего взять большое число достаточно тонких слоев с постоянной мощностью h_0 . Тогда неизвестным в обратной задаче (28) будет вектор $\bar{\rho} = \{\rho_n\}$, $n \in [1, N]$, где ρ_n – сопротивления слоев при $n \in [1, N-1]$, а ρ_N – сопротивление подстилающего полупространства. Распределение сопротивлений слоев $\{\tilde{\rho}_n\}$ находится из вариационной задачи

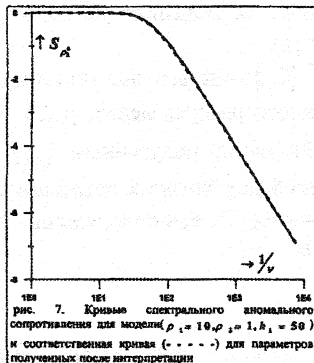
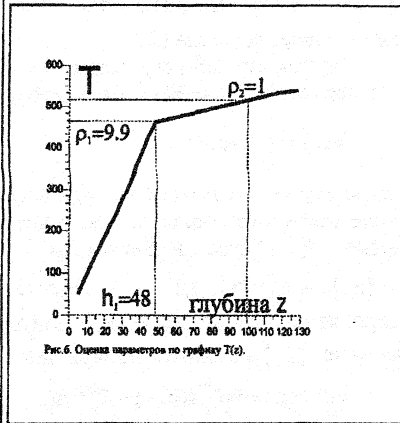
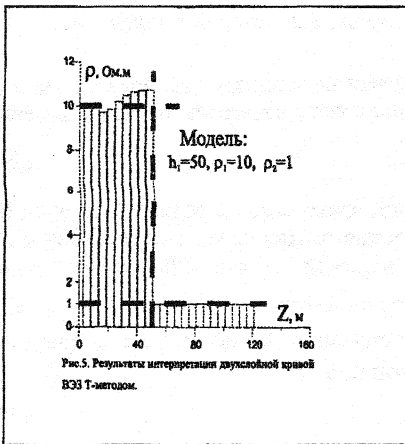
$$\inf_{\bar{\rho}} \Phi(\bar{\rho}) = \inf_{\bar{\rho}} \|A(\bar{\rho}, v) - S_p^*(v)\|, \quad (30)$$

где $A(\bar{\rho}, v)$ – вычисленный по (27) спектр аномального кажущегося сопротивления для заданной многослойной среды, а на ρ_n накладываются условия $\rho_{\min} < \rho_n < \rho_{\max}$ (ρ_{\min} обычно равно единице, т.к. меньшего удельного сопротивления в верхних слоях Земли не встречается).

Определив из (30) распределение $\{\tilde{\rho}_n\}$, мы должны помнить, что $\{\tilde{\rho}_n\}$ может существенно отличаться от истинного распределения $\rho_c(z)$, т.к. задача неустойчива. Однако, если, согласно (29), мы по полученным $\{\tilde{\rho}_n\}$ вычислим интегральное сопротивление $\tilde{T}(z)$, то оно будет близко к истинному, т.к. $T(z)$ устойчиво определяется из обратной задачи [6]. Теперь приближенное распределение $\rho_c(z)$ мы можем найти из уравнения

$$\int_0^z \rho_c(z) dz = \tilde{T}(z); z \in [0, H]. \quad (31)$$

Решение интегрального уравнения Вольтера первого рода (31) хотя и неустойчиво, но для его решения разработаны хорошо регуляризирующие алгоритмы, что дает возможность получить хорошее приближенное решение обратной задачи $\tilde{\rho}_c(z)$. Описанный T-метод решения обратной задачи ВЭЗ был реализован на персональном компьютере. Его применение проиллюстрировано на рис.5-7. В качестве известного $S_p^*(v)$ был взят спектр аномального кажущегося сопротивления для двухслойной среды $\rho_1=10$, $h_1=50$, $\rho_2=1$. Интерпретация проводилась в рамках 24-х слойной модели с постоянной мощностью $h_0=5$. Результаты интерпретации приведены на рис.5. На рис.6 построено приближенное $T(z)$, по которому определено решение обратной задачи $\tilde{\rho}_1=9.9$, $\tilde{h}_1=48$, $\tilde{\rho}_2=1$ что хорошо совпадает с истинным решением.



На рис.7 показано совпадение спектра anomального кажущегося сопротивления для $\rho(z)$ и $\tilde{\rho}(z)$.

Таким образом, разработан метод решения обратной задачи ВЭЗ с использованием спектра кажущегося anomального сопротивления.

Литература.

1. Хмельской В.К. Электроразведка.—М.:Изд-во МГУ, 1984, с.420.
2. Дмитриев В.И., Серебrenникова Н.Н. Численный расчет электрического поля точечного источника в слоистой среде с осесимметричным включением. //Известия ВУЗ, Геология и разведка, 1987, №2.
3. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Метод расчета поля постоянного тока в неоднородных проводящих средах. //Вычислительные методы и программирование.—М.:Изд-во МГУ, 1973, вып. XX.—с.175-186.
4. Колесников В.П. Обработка и интерпретация результатов вертикального электрического зондирования с помощью ЭВМ.—М.:Недра, 1982, 142с.

5. Дмитриев В.И., Мерщикова Н.А. Математическое моделирование вертикального электрического зондирования квазислойных сред.// Проблемы математической физики.—М.:Изд-во факультета ВМК МГУ,1998, с.90-95.
6. Дмитриев В.И. Интегральные характеристики в обратной задаче вертикального электрического зондирования.//Проблемы математической физики.—М.:Изд-во факультета ВМК МГУ, 1998, с.90-95.