В.И. Дмитриев

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В НИЗКОЧАСТОТНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ НЕОДНОРОДНЫХ КОНТРАСТНЫХ СРЕД

Введение

Метод интегральных уравнений широко применяется при математическом моделировании электромагнитных полей в неоднородных средах. Он показал свою эффективность. Однако при вычислениях полей в проводящих средах при низких частотах расчеты показали, что с уменьшением частоты необходимо пропорционально уменьшать шаг сетки, на которой интегральное уравнение сводится к алгебраической системе. Попытки обойти этот недостаток не привели к успеху, что существенно ограничивает применимость метода в трехмерных задачах. В статье предлагается подход позволяющий не уменьшать шаг сетки при понижении частоты поля.

Постановка задачи

Электромагнитное поле в проводящей неоднородной среде подчиняется уравнениям Максвелла:

$$rot\,\overline{H} = \sigma(M)\overline{E} + \overline{j}_e(M); \quad rot\overline{E} = i\omega\mu\overline{H}, \tag{1}$$

где $\overline{H}(M)$ - магнитное поле, $\overline{E}(M)$ - электрическое поле, $\sigma(M)$ - электропроводность среды (в общем случае комплексная), ω - частота изменения поля во времени, μ - магнитная проницаемость среды, $\overline{j}_e(M)$ - плотность электрического тока в источнике. Модель строения среды обычно выбирается в виде: локальной неоднородной зоны V_{AC} с произвольным распределением электропроводности $\sigma_H(M)$ при $M \in V_H$, которая находится в слоистой среде с распределением электропроводности $\sigma_N(z)$. В задаче вводится понятие первичного поля $\left(\overline{E}^N(M), \overline{H}^N(M)\right)$, т.е. поля источников в слоистой среде в отсутствии неоднородности, которое является решением задачи:

$$rot\overline{H}^N = \sigma_N(z)\overline{E}^N + \overline{j}_e(M); \; rot\overline{E}^N = i\omega\mu\overline{H}^N \tag{2}$$

с условием сопряжения на границе разрыва $\sigma(z)$ (H_x, H_y, E_x, E_y- непрерывны) и условием убывания полей на бесконечности ($\sigma(z) \neq 0$). Решение этой задачи хорошо известно [1] и не вызывает трудностей. Зная первичное нормальное поле можно перейти к задаче для аномальных полей.

$$\overline{E}^a(M) = \overline{E}(M) - \overline{E}^N(M)\,;\ \overline{H}^a(M) = \overline{H}(M) - \overline{H}^N(M) \tag{3}$$
для которых, согласно (1) и (2), выполняется система уравнений
$$rot\overline{H}^a = \sigma_N(z)\overline{E}^N + \bar{j}_s\,;\ rot\overline{E}^a = i\omega\mu\overline{H}^a\,, \tag{4}$$
где
$$\bar{j}_s = (\sigma_H(M) - \sigma_N(z))\overline{E}\,,\ M \in V_H \tag{5}$$
избыточный ток в неоднородности.

Вывод интегрального уравнения

Рассмотрим два поля $\overline{E}^{(1)}(M)$ и $\overline{E}^{(2)}(M)$ возбуждаемых в одной и той же слоистой среде источниками $\bar{j}^{(1)}(M)$ и $\bar{j}^{(2)}(M)$. Эти поля согласно Лемме Лоренца [2], должны подчинятся равенству:
$$\int\limits_{V_2} \overline{E}^{(1)}\bar{j}^{(2)}(M)dv_M = \int\limits_{V_1} \overline{E}^{(2)}\bar{j}^{(1)}(M)dv_M \tag{6}$$

Если взять в Лемме Лоренца $\overline{E}^{(2)}(M) = \overline{E}^a(M)$ - аномальное поле, возбуждаемого избыточным током $\bar{j}^{(1)} = \bar{j}_s = (\sigma_H(M) - \sigma_N(z))\overline{E}(M)$ и $\overline{E}^{(2)}(M) = \overline{E}^p(M, M_0)$-вспомогательное поле, возбуждаемое в той же слоистой среде произвольным электрическим диполем $\bar{j}^{(2)}(M) = \bar{p}\delta(r_{MM_0})$, где $\delta(r_{MM_0})$ - функция Дирака, то получим:
$$\bar{p}\overline{E}^a(M_0) = \int\limits_{V_H} (\sigma_H(M) - \sigma_N(z))\overline{E}(M)\overline{E}^p(M, M_0)dv_M \tag{7}$$
Взяв $\bar{p}$ равным $\bar{p}_1 = (1{,}0{,}0)$, $\bar{p}_2 = (0{,}1{,}0)$, $\bar{p}_3(0{,}0{,}1)$, получим три вспомогательных поля $\overline{E}^{(1)}$, $\overline{E}^{(2)}$ и $\overline{E}^{(3)}$. В результате определяем тензорную функцию Грина для уравнений Максвелла:
$$\hat{G}_E(M, M_0) = \left(\overline{E}^{(1)}(M, M_0), \overline{E}^{(2)}(M, M_0), \overline{E}^{(3)}(M, M_0)\right) \tag{8}$$
Тогда согласно (6), получаем:
$$\overline{E}^a(M_0) = \int\limits_{V_H} (\sigma_H(M) - \sigma_N(M))\hat{G}_E(M, M_0)\overline{E}(M)dv_M \tag{9}$$
Это формула пересчета позволяющая определить аномальное электрическое поле в любой точке пространства, если известно $\overline{E}(M)$ в области неоднородности $M \in V_H$. Если к (9) прибавить нормальное поле $\overline{E}^N$ получим интегральное уравнение для $\overline{E}(M)$ при $M \in V_H$ имеем:
$$\overline{E}(M_0) - \int\limits_{V_H} (\sigma_H(M) - \sigma_N(M))\hat{G}_E(M, M_0)\overline{E}(M)dv_M = \overline{E}^N(M_0), \tag{10}$$

Определив из (10) $E(M_0)$ при $M_0 \in V_H$, согласно (9), находим $\overline{E}^a(M_0)$ в любой точке пространства, а из (4) находим аномальное магнитное поле

$$\overline{H}^a(\overline{M}) = \frac{1}{i\omega\mu} rot \int_{V_H} \left(\sigma_H(M_0) - \sigma_N(M_0)\right) \hat{G}_E(M, M_0) \overline{E}(M_0) dv_{M_0} \qquad (11)$$

Алгебраизация интегрального уравнения.

Для численного решения интегрального уравнения (10) необходимо перейти к алгебраической системе для значений поля $\overline{E}(M)$ на некоторой сетке точек M_i $i \in [1, N]$. Существуют несколько подходов для такой алгебраизаци интегрального уравнения. Пусть область неоднородности V_H, разбита на N подобластей ΔV_n. Если линейный размер ячейки много меньше длины волны в окружающей среде, то можно считать, что $\overline{E}(M) \approx \overline{E}_n = const$ при $M \in \Delta V_n$. Тогда интегральное уравнение (10) можно приближенно записать в виде:

$$\overline{E}(M_0) - \sum_{n=1}^{N} \delta\sigma_n \hat{g}_n(M_0) \overline{E}_n = \overline{E}^N(M_0), \quad M_0 \in V_H \qquad (12)$$

где

$$\delta\sigma_n = \frac{1}{\Delta V_n} \int_{\Delta V_n} \left(\sigma_H(M) - \sigma_N(M)\right) dv_M \ , \qquad (13)$$

а

$$\hat{g}_n(M_0) = \int_{\Delta V_n} \hat{G}_E(M_0, M) dv_M \qquad (14)$$

Если положить $M_0 = M_m$ $m \in [1, N]$, где M_m- центр подобласти ΔV_m и положить

$$\hat{g}_{nm} = \hat{g}_n(M_m) = \int_{\Delta V_n} \hat{G}_E(M_m, M) dv_M \qquad (15)$$

то (11) дает нам систему линейных алгебраических уравнений

$$\overline{E}_m - \sum_{n=1}^{N} \delta\sigma_n \hat{g}_{nm} \overline{E}_n = \overline{E}_m^N, \ m \in [1, N] \qquad (16)$$

Это наиболее простой способ алгебраизации интегрального уравнения. Решив систему (16), находим значения $\overline{E}_m \approx \overline{E}(M_m)$, $m \in [1, N]$ на выбранной нами сетке. Именно этот подход используется наиболее часто.

Возможен другой подход, получивший название метода интегральных токов [2]. В этом методе интегральное уравнение сводится к системе линейных алгебраических уравнений не для значения поля в центре подобласти, а к среднему значению тока в подобласти

$$J_n = \frac{1}{\Delta V_n} \int_{\Delta V_n} \left(\sigma_H(M) - \sigma_N(M)\right) \overline{E}(M) dv_M \qquad (17)$$

Для этого интегральное уравнение (10) умножают на $(\sigma_H(M_0)-\sigma_N(M_0))$ и применяют усреднение по точке M_0. В результате имеем

$$J_m - \sum_{n=1}^{N}\int_{V_n} \hat{K}_m(M)\frac{(\sigma_H(M)-\sigma_N(M))}{\Delta V_m}\overline{E}(M)dv_M = J_m^0,\ m\in[1,N] \quad (18)$$

где сглаженное (усредненное) ядро

$$\hat{K}_m(M) = \int_{\Delta V_m}\hat{G}_E(M,M_0)(\sigma_H(M_0)-\sigma_N(M_0))dv_{M_0} \quad (19)$$

Считая, что усредненное ядро $\hat{K}_m(M)\approx\hat{K}_m(M_n)=\hat{K}_{mn}$ при $M\in\Delta V_n$, $n\in[1,N]$. Тогда из (19) следует система линейных алгебраических уравнений для J_n

$$\overline{J}_m - \sum_{n=1}^{N}\frac{\Delta V_n}{\Delta V_m}\hat{K}_{mn}\overline{J}_n = J_m^0,\ m\in[1,N] \quad (20)$$

Определив интегральный ток в подобласти, мы легко определяем электрическое и магнитное поле в пространстве.

В описанных численных методах мы находим среднее электрическое поле или средний электрический ток в подобластях на которые разбита зона неоднородности. Возможен проекционный метод решения интегрального уравнения, когда интегральное уравнение сводится к системе линейных алгебраических уравнений для коэффициентов разложения электрического поля в области V_H по некоторой системе ортонормированных функций.

Использование метода интегральных уравнений для математического моделирования электромагнитных полей натолкнулось на определенные трудности при расчетах поля на низких частотах. Оказалось, что на маленьких частотах ω, необходимо разбивать неоднородность на более мелкие подобласти, чтобы получить поля с необходимой точностью. Различные подходы, связанные с улучшением аппроксимации поля внутри подобласти успеха не приносили. Отсюда следовало, что погрешности решения интегрального уравнения связаны с точностью вычисления ядра уравнения (тензорной функции Грина).

Исследование тензорной функции Грина в низкочастотном диапазоне.

Рассмотрим стандартную модель неоднородной среды (рис. 1), в которой неоднородная зона V_H находится в одном слое $z\in[h_1,h_1+h_H]$ с проводимостью σ_c. Рассмотрим систему (16) к которой сводится интегральное уравнение на сетке с шагом h. Матрица системы определяется в виде:

$$a_{nm} = \delta\sigma_n \int\limits_{\Delta V_n} \widehat{G}_E(M_m, M)dv_M \tag{21}$$

где

$$\hat{G}_E = i\omega\mu\hat{A} + \frac{1}{\sigma_c}\mathrm{grad\,div}\,\hat{A} \tag{22}$$

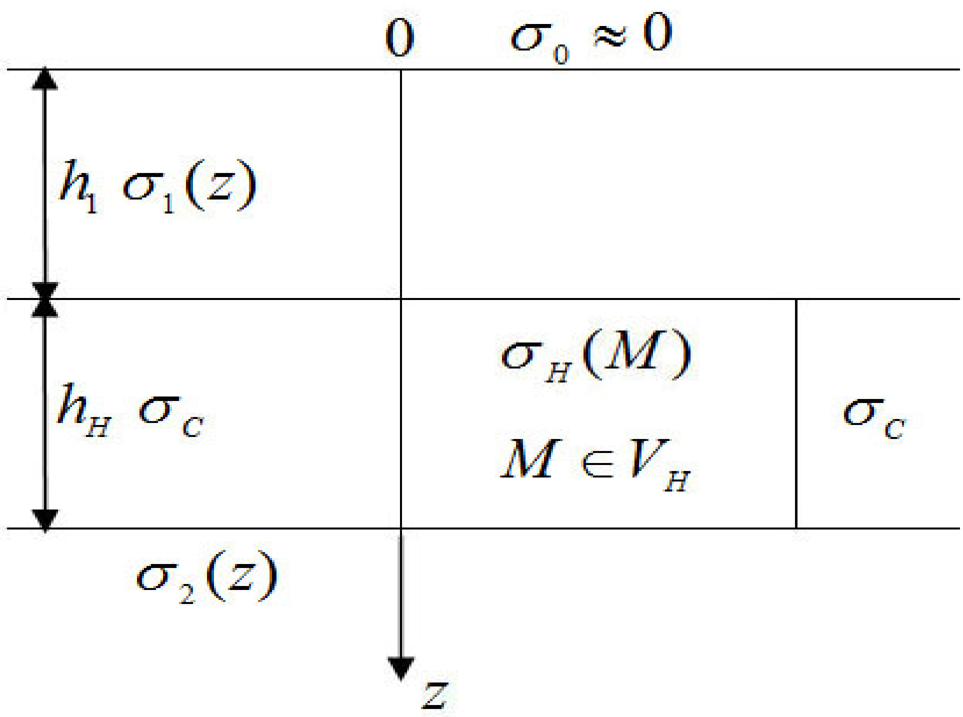

Рис.1 стандартная модель строения неоднородной среды.

$\hat{A} = \left(\overline{A}^{(1)}, \overline{A}^{(2)}, \overline{A}^{(3)}\right)$, $\overline{A}^{(i)}$- векторный потенциал единичного диполя в слоистой среде, направленного по орту $\overline{\mathbf{p}}^{(i)}$, $i \in [x, y, z]$. Первый член в (22) определяет при $\omega \to 0$ индукционное взаимодействие токов в соседних подобластях, а второй член кондуктивное взаимодействие (перетекание токов). Погрешность в вычислении кондуктивного взаимодействия имеет величину $O\left(h/\sigma_c\right)$ и должна быть меньше индукционного взаимодействия. В противном случае мы пренебрегаем индукционным взаимодействием, а это приводит к нарушению леммы Лоренца из которой получено интегральное уравнение.

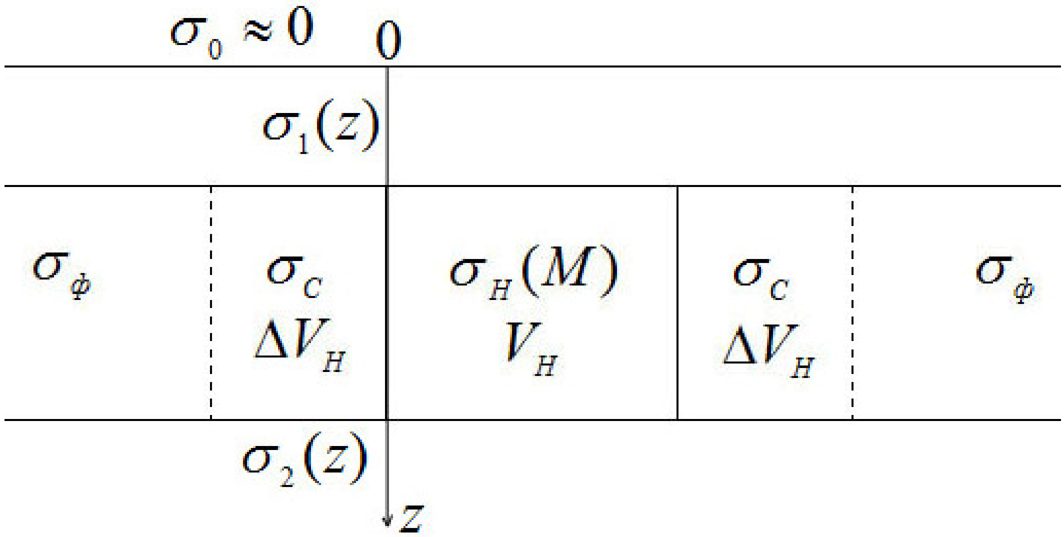

Рис. 2. Расширенная модель неоднородной зоны с повышением фоновой проводимости

Для достижения необходимой точности вычисления кондуктивной части ядра интегрального уравнения необходимо уменьшать величину $\rho_T = \dfrac{h}{\sigma_c}$ - поперечное сопротивление перетеканию тока из одной подобласти в другую. Заметим что, чем меньше электропроводность слоя σ_c, в котором находится неоднородность, тем меньше надо брать шаг сетки h, чтобы сохранить точность математического моделирования поля. Именно этот описанный процесс определяет эффект контрастности наблюдаемый при решении интегральных уравнений при низких частотах.

Как можно бороться с эффектом контрастности? Так как погрешность вычислений кондуктивной части пропорциональна поперечному сопротивлению $\rho_T = \dfrac{h}{\sigma_c}$, то мы можем не уменьшать шаг сетки h, а увеличить электропроводность слоя σ_c, в котором находится зона неоднородности. Этого можно добиться двумя подходами.

1. Прямое увеличение проводимости слоя σ_c. В этом случае мы меняем саму модель строения среды, считая, что такое изменение модели практически не повлияет на результат моделирования, но улучшит точность вычислительного процесса. При этом поле внутри слоя получается с некоторой погрешностью, но на поверхности среды при $z = 0$ поле рассчитывается с хорошей точностью.

2. Расширение модели неоднородности с увеличением электропроводности слоя на некотором расстоянии от неоднородности. Такая модель показана на рис.2. В этой модели зона неоднородности V_H, увеличена на ΔV_H. Эта дополнительная область окружает область V_H, а её проводимость равна σ_c. Вне этой расширенной области $V_H + \Delta V_H$ проводимость слоя, в котором находится $V_H + \Delta V_H$, равна фоновой $\sigma_\phi >> \sigma_c$. Ясно, что всегда существует такое расширение области неоднородности ΔV_H, что наличие фоновой неоднородности практически не сказывается на результат моделирования поля в окрестности зоны V_H. Размер расширения зависит от частоты поля и его можно определить с помощью следующего подхода. Наличие σ_ϕ не должно практически влиять на нормальное поле в области V_H.

Описанные подходы позволяют не уменьшать шаг сетки h, хотя при втором подходе несколько увеличивается область неоднородности.

Литература

1. *Дмитриев В.И., Захаров Е.В.* метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике.- М. МАКСПресс. 2008,-316с.
2. *Дмитриев В.И.* Морские электромагнитные зондирования. –М. АРГАМАК МЕДИА, 2004,-192с.