В.И. Дмитриев

О ДВУМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

Введение

Магнитотеллурическое зондирование (МТЗ) связано с изучением строения Земли при использовании естественного электромагнитного поля Земли. При этом считается, что источник поля находится на большом расстоянии от области земной поверхности, где измеряется электромагнитное поле Земли. В этих предположениях можно считать, что первичное поле постоянно в области измерений поля, а его изменения связаны с неоднородным распределением электропроводности под земной поверхностью.

Так как мощность источника естественного электромагнитного поля Земли неизвестна, то измеряется соотношение между электрическим и магнитным полями:

$$\begin{cases} E_x = Z_{xx}H_x + Z_{xy}H_y \\ E_y = Z_{yx}H_x + Z_{yy}H_y \end{cases} \tag{1}$$

Коэффициенты линейных соотношений (1) составляют тензор импеданса, который не зависит от мощности удаленного источника поля и определяется лишь частотой изменение поля и распределением электропроводности под земной поверхностью ($z > 0$).

Прямая задача МТЗ состоит в определении тензора импеданса $\hat{Z}$ при. $z = 0$, если известно распределение электропроводности $\sigma(M)$ при $z > 0$. Источником поля считается плоская волна нормально падающая на земную поверхность из полупространства ($z < 0$).

Обратная задача МТЗ заключается в определении $\sigma(M)$, $z > 0$ по известному тензору импеданса на земной поверхности $z = 0$ в зависимости от точки измерения и частоты $\hat{Z}(x, y, \omega)$.

В работе [1] было доказано, что в одномерном случае, когда электропроводность $\sigma(z)$, $z > 0$ зависит только от глубины (слоистая среда) обратная задача имеет единственное решение для кусочно-аналитических функций $\sigma(z)$ и известных $\sigma(z) = \sigma_H = \text{const}$ при $z > H$. В работе [2] была доказана единственность решения обратной задачи, когда в слоистой среде находится тонкий слой с переменной вдоль слоя электропроводностью. Используя метод работы [2] в настоящей статье подробно исследуется единственность решения обратной задачи в двумерном случае, когда электропроводность $\sigma(y,z)$, а тензор импеданса имеет вид:

$$\hat{Z} = \begin{pmatrix} 0 & Z_E(y,\omega) \\ Z_H(y,\omega) & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Постановка задачи.

В общем трехмерном случае прямая задача МТЗ состоит в определении решения уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \sigma \bar{E}\,, \quad \operatorname{rot} \bar{E} = i\omega\mu\bar{H} \tag{3}$$

где $\mu = \text{const}$, $\sigma = \sigma_0 \approx 0$ при $z < 0$ а при $z > 0$

$$\sigma = \begin{cases} \sigma(M), & z \in [0,H] \\ \sigma_H = \text{const}, & z > H \end{cases} \tag{4}$$

неоднородность считается локальной, т.е. $\sigma(M) = \sigma_c(z)$ при $|x| > L_x$ и при $|y| > L_y$. Внутри неоднородности при $M \in V_H$, $V_H : \left(|x| < L_x, |y| < L_y,\ z \in [0,H]\right)$ электропроводность считается кусочно-непрерывной функцией. Источником поля является плоская волна нормально падающая на плоскость $z = 0$ и имеющая две поляризации:

1. $\bar{E} = (E_x^0, 0, 0)$, $\bar{H} = (0, H_y^0, 0)$
2. $\bar{E} = (0, E_y^0, 0)$, $\bar{H} = (H_x^0, 0, 0)$.

Зная поля для двух поляризаций поля плоской волны, из системы уравнений (1) определяются компоненты тензора импеданса.

Рассмотрим двумерный случай, когда $L_x = \infty$ и $\dfrac{\partial \sigma(M)}{\partial x} = 0$. Тогда электромагнитное поле распадается на две поляризации поля в зависимости от поляризации поля плоской волны.

1. E-поляризация: $\bar{E} = (E_x(y,z), 0, 0)$, $\bar{H} = (0, H_y, H_z)$

тогда
$$H_y = \frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial E_x}{\partial z}, \qquad H_z = -\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial E_x}{\partial y} \tag{5}$$

электрическое поле является решением задачи

$$\Delta E_x + i\omega\mu\sigma(y,z)E_x = 0 \tag{6}$$

на границах разрыва $\sigma(y,z)$ непрерывны E_x и $\dfrac{\partial E_x}{\partial n}$ где n-нормаль к границе. При $|y| \to \infty$ $E_x(y,z) \to E_x^0(z)$ где $E_x^0(z)$ поле плоской волны в слоистой среде $\sigma_c(z)$, на которую выходит $\sigma(y,z) \to \sigma_c(z)$ при $|y| \to \infty$.

Импеданс в этом случае равен:

$$Z_E = \frac{E_x(y,z=0)}{H_y(y,z=0)} \tag{7}$$

Обратная задача состоит в определении $\sigma(y,z)$ по известному импедансу $Z_E(y,\omega)$.

2. H-поляризация: $\bar{E} = (0, E_y, E_z)$, $\bar{H} = (H_x, 0, 0)$.

В этом случае магнитное поле равно

$$H_x(y,z) = \frac{1}{i\omega\mu}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) \tag{8}$$

Электрическое поле является решением системы уравнений при $z > 0$, $y \in (-\infty, \infty)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z}\right) = i\omega\mu\sigma E_y \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z}\right) = -i\omega\mu\sigma E_z \end{cases} \tag{9}$$

при $z = 0$ выполняются граничные условия

$$E_z(y,z=0) = 0; \quad H_y(y,z=0) = \frac{1}{i\omega\mu}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) = 1 \tag{10}$$

на границах разрыва $\sigma(y,z)$ должны выполняться условия непрерывности E_τ и σE_n, где E_n-нормальная компонента, E_τ-касательная компонента электрического поля. При $|y| \to \infty$, $E_z \to 0$, а $E_y \to E_y^0$, где E_y^0 поле плоской волны в слоистой среде $\sigma_c(z) = \lim\limits_{|y|\to\infty} \sigma(y,z)$.

Обратная задача зондирования неоднородной слоистой среды в случае E-поляризации поля.

Обратная задача, как было сказано выше, состоит в определении $\sigma(y,z)$ по известному импедансу $Z_E(y,\omega)$ при $z = 0$. Заметим, что зная импеданс, можно определить поле на земной поверхности. Для этого рассмотрим задачу для поля при $z < 0$

$$\Delta E_x(y,z) + i\omega\mu\sigma_0 E_x = 0, \quad z < 0, \quad y \in (-\infty, \infty) \tag{11}$$

$\dfrac{\partial E_x}{\partial z} = i\omega\mu Z_E(y,\omega) \cdot E_x$ при $z = 0$. При $|y| \to \infty$ $E_x(y,z) \to E_x^0(z)$, где $E_x^0(z)$- поле плоской волны отраженной от плоскости с импедансом $Z_E^0(\omega) = \lim\limits_{|y|\to\infty} Z_E(y,\omega)$. Это поле равно

$$E_x^0(z) = e^{ik_0 z} - \frac{Z_E^0 - \gamma}{Z_E^0 + \gamma} e^{-ik_0 z}, \qquad (12)$$

где $k_0 = \sqrt{i\omega\mu\sigma_0}$, $\operatorname{Re} k_0 > 0$, $\gamma = \dfrac{k_0}{\omega\mu}$.

Рассмотрим вторичное (аномальное) поле

$$E_x^s(y,z) = E_x(y,z) - E_x^0, \quad z < 0$$

Тогда для E_x^s получаем задачу

$$\Delta E_x^s + k_0^2 E_x^s = 0, \quad z < 0, \quad y \in (-\infty, \infty) \qquad (13)$$

с граничным условием при $z = 0$

$$\frac{\partial E_x^s}{\partial z} = i\omega\mu Z_E E_x^s + i\omega\mu\left(Z_E(y) - Z_E^0\right)E_x^0 \qquad (14)$$

при $\sqrt{y^2 + z^2} \to \infty$, $E_x^s \to 0$

Задача (13-14) сводится к интегральному уравнению с помощью функции Грина

$$G(y - y_0, z, z_0) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_0 R) + \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_0 R^*)$$

где $R = \sqrt{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$, $R^* = \sqrt{(y - y_0)^2 + (z + z_0)^2}$, а функция $H_0^{(1)}(x)$ - функция Ханкеля первого рода нулевого порядка.

Так как

$$\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \; G\big|_{z=0} = g(y - y_0, z_0) = \frac{i}{2} H_0^{(1)}\left(k_0\sqrt{(y - y_0)^2 + z^2}\right)$$

то из формулы Грина получаем

$$\begin{aligned} E_x^{(s)}(y,z) = i\omega\mu \int_{-\infty}^{\infty} Z_E(y_0) E_x^s(y, z_0 = 0) g(y - y_0, z) dy_0 + \\ + i\omega\mu \int_{-\infty}^{\infty} \left(Z_E(y_0) - Z_E^0\right) E_x^0(z_0 = 0) g(y - y_0, z) dy_0 \end{aligned} \qquad (15)$$

При $z = 0$ из (15) находим интегральное уравнение для вторичного поля $E_x^s(y, z = 0)$

$$\begin{aligned} E_x^s(y) - i\omega\mu \int_{-\infty}^{\infty} Z_E(y_0) E_x^s(y_0) g(y - y_0, z = 0) dy_0 = \\ = i\omega\mu \int_{-\infty}^{\infty} \left(Z_E(y_0) - Z_E^0\right) E_x^0(z_0 = 0) g(y - y_0, z_0 = 0) dy_0 \end{aligned} \qquad (16)$$

Это интегральное уравнение Фредгольма с ядром $g(y - y_0, z = 0) = \dfrac{i}{2} H_0^{(1)}(k_0 | y - y_0 |)$ имеющим слабую (логарифмическую) особенность. Решение, которого существует и единственно. Поэтому в обратной задаче мы можем вместо импеданса $Z_E(y,\omega)$ на поверхности $z=0$ использовать электрическое вторичное (аномальное) поле $E_x(y,\omega)$.

Рассмотрим обратную задачу зондирования однородного проводящего полупространства ($z>0$), содержащего конечное число N проводящих тел в виде тонких неоднородных слоев. Каждый слой расположен на глубине z_n, и имеет толщину h_n, $n\in[1,N]$ и имеет электропроводность $\sigma_n(y)$, $y\in[-L_n,L_n]$ изменяющуюся только вдоль слоя. Это означает, что электропроводность при $z>0$ задается следующим образом:

$$\sigma(M)=\begin{cases}\sigma_n(y) \text{ при } M\in Q_n,\, n\in[1,N]\\ \sigma^* \quad\ \text{ при } M\notin Q_n,\, n\in[1,N]\end{cases} \tag{17}$$

где $U_n:\{|y|<L_n, z\in[z_n,z_n+h_n]\}$ - области неоднородных слоев, в которых проводимость изменяется только вдоль слоя.

Функция Грина для двух полупространств имеет вид при $z\ge 0$, $z>0$:

$$g(y-y_0,z,z_0)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(y-y_0)}\left(e^{-\eta|z-z_0|}+\frac{\eta-|\lambda|}{\eta+|\lambda|}e^{-\eta(z+z_0)}\right)\frac{d\lambda}{\eta}, \tag{18}$$

где $\eta=\sqrt{\lambda^2-k^2}$, $\operatorname{Re}\lambda>0$, $k^2=i\omega\mu\sigma^*$

Используя функцию Грина согласно (6) определим вторичное электрическое поле

$$E_x^s(y,z)=i\omega\mu\sum_{n=1}^{N}\int_{-L_n}^{L_n}dy_0\int_{z_n}^{z_n+h_n}J_n(y_0z_0)g(y-y_0,z,z_0)dz_0 \tag{19}$$

где $J_n(y_0,z_0)=\left(\sigma^*-\sigma_n(y_0)\right)E_x(y_0,z_0)$-избыточный ток в n–м неоднородном слое. Если выполняется условие тонкого слоя

$$\omega\mu\max_{y_0}\sigma_n(y_0)h_n^2<<1$$

можно считать, что электрическое поле в n–м слое не зависит от z и равно $E_x^{(n)}(y)$ при $z\in[z_n,z_n+h_n]$, $|y|<L_n$. Тогда выражение (19) можно записать в виде:

$$E_x(y,z)=i\omega\mu\sum_{n=1}^{N}\int_{-L_n}^{L_n}J_n(y_0)\cdot\tilde g_n(y-y_0,z)dy_0 \tag{20}$$

где
$$J_n(y_0)=\left(\sigma^*-\sigma_n(y_0)\right)E_x^{(n)}(y_0) \tag{21}$$

$$\tilde g_n(y-y_0,z)=\int_{z_n}^{z_n+h_n}g(y-y_0,z,z_0)dz_0 \tag{22}$$

Представление (20) позволяет доказать следующее вспомогательное утверждение

Лемма 1. Если хотя бы одно распределение электропроводности σ_n в слое претерпело изменения на конечную величину, то хотя бы один избыточный ток в слое J_n должен также измениться.

Доказательство.

Так как краевая задача для вторичного поля $E_x^s(y,z)$ имеет решение и при том единственное, то разным распределениям электропроводности – разные поля т.е. при $\sum_{n=1}^{N} \left\| \sigma^{(1)}(y) - \sigma^{(2)}(y) \right\|^2 > 0$ инеем $\left\| E_x^{(1)}(y,z) - E_x^{(2)}(y,z) \right\| > 0$. Если предположить, что при этом все $J_n^{(1)}(y) = J_n^{(2)}$, то, согласно (20), мы придем к утверждению $E_x^{(1)}(y,z) \equiv E_x^{(2)}(y,z)$. Пришли к противоречию. Следовательно, хотя бы одно $J_n^{(1)}$ должно отличаться от $J_n^{(2)}$.

Рассмотрим теперь условие обратной задачи по известному полю при $z=0$. Согласно (20), имеем

$$i\omega\mu \sum_{n=1}^{N} \int_{-L_n}^{L_n} J_n(y_0) \cdot \tilde{g}_n(y - y_0, z=0) dy_0 = E_x^s(y, z=0),\ y \in (-\infty, \infty) \qquad (23)$$

причём $J_n(y_0) = 0$ при $|y| > L_n$.

Соотношение (23) представляет собой сумму интегралов свертки. Если применить к (23) преобразование Фурье по y, то получим

$$i\omega\mu \sum_{n=1}^{N} S_J^{(n)}(\nu) \cdot S_g^{(n)}(\nu) = S_E(\nu), \qquad (24)$$

где

$$S_J^{(n)}(\nu) = \int_{-L}^{L} J_n(y_0) e^{-i\nu y_0} dy_0\,; \qquad S_g^{(n)}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}_n(y, z=0) e^{-i\nu y} dy$$

$$S_E^{(n)}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} E_x^s(y, z=0) e^{-i\nu y} dy$$

так как $E_x^s(y,z)$ и $\tilde{g}_n(y, z=0)$ убывают при $|y| \to \infty$, то спектральные функции $S_g^{(n)}(\nu)$ и $S_E^{(n)}(\nu)$ существуют. Из соотношения (24) следует утверждение

Теорема 1

Изменение избыточных токов $J_n(y)$ приводит к изменению электрического поля $E_x(y, z=0)$.

Доказательство.

В начале определим спектр функции Грина $S_g^{(n)}(\nu)$. Взяв преобразование Фурье от $\tilde{g}_n(y, z=0)$, которое определяется (22) и (18), получим:

$$S_g^{(n)}(\nu) = \frac{1}{(\eta_1 + |\nu|)} \int_{z_n}^{z_n+h_n} e^{-\eta_1 z_0} dz_0 = \frac{e^{-\eta_1 z_n}(1 - e^{-\eta_1 h_n})}{\eta_1(\eta_1 + |\nu|)}$$

где $\eta_1 = \sqrt{\nu^2 - i\omega\mu\sigma^*}$, $\mathrm{Re}\eta_1 > \nu + \dfrac{(\omega\mu\sigma^*)^2}{8\nu^3}$ тогда при больших ν из (24) имеем

$$\frac{i\omega\mu}{2\nu^2} \sum_{n=1}^{N} S_J^{(n)} e^{-\eta z_n} = S_E(\nu). \tag{25}$$

Так как $z_{n+1} - z_n \geq h_n$, то при изменении, например, $S_J^{(n)}$ при $n \in [k, N]$, получим:

$$\|\Delta S_E\| = \frac{\omega\mu}{2\nu^2} \|\Delta S_J^k\| e^{-\eta z_k} + O\left(e^{-\eta(z_k + h_k)}\right)$$

Следовательно, при $\|\Delta S_J^{(k)}\| \neq 0$ имеем $\|\Delta S_E\| \neq 0$.

Теорема доказана.

Из леммы 1 и теоремы 1 следует

Теорема 2.

Обратная задача определения электропроводности $\sigma_n(y)$ слоя $n \in [1, N]$ по заданному на плоскости $z = 0$ электрическому полю при *E*-поляризации первичного поля плоской волны имеет единственное решение.

Доказательство.

Предположим, что двум различным распределениям проводимостей неоднородных слоев $\sigma_n(y)$, $n \in [1, N]$ соответствует одно и то же электрическое поле на плоскости $z = 0$, $E_x(y, z = 0)$. Тогда, Согласно лемме 1, разным $\sigma_n(y)$ соответствует хотя бы один различный избыточный ток $J_n(y)$. Из этого, согласно теореме 1, должны отличаться электрические поля при $z = 0$. Пришли к противоречию. Следовательно, заданному $E_x(y, z)$ соответствует единственное распределение $\sigma_n(y)$.

Заметим, что при исследовании обратной задачи рассматривались неоднородные слои, расположенные в однородном проводящем полупространстве. Полученный результат легко обобщается, если вместо однородного взять слоистое полупространство. В этом случае необходимо рассмотреть функцию Грина для слоистого полупространства. Спектр этой функции Грина совпадает со случаем однородного полупространства при $N \to \infty$.

Обратная задача зондирования неоднородной области.

Рассмотрим обратную задачу зондирования в случае, когда в однородном полупространстве с проводимостью σ^* находится область S с произвольным распределением электропроводности $\sigma(y,z)$. В этом случае задача для электрического поля сводится к решению интегрального уравнения для избыточного тока в неоднородности

$$J(y,z) = \left(\sigma^* - \sigma(y,z)\right) E_x(y,z) \text{ при } M = \{x,y\} \in S$$

Аномальное поле $E_x^s(y,z) = E_x(y,z) - E_x^0(z)$, где $E_x^0(z)$-первичное поле, во всей плоскости представляется в виде:

$$E_x^s(y,z) = i\omega\mu \int_S J(y,z_0) \cdot g(y-y_0,z,z_0) dy_0 dz_0 \qquad (26)$$

Представление (26) можно перевести в дискретную форму, разделив область S по z на слои с равномерным шагом h плоскостями $z = z_n = h_1 + (n-1)h$, $n \in [1,N]$, где h_1 глубина верхней точки области S. Считая, что $J(y,z)$ в слое равно среднему по z значению $J(y,z) = J_n$ при $z \in [z_n, z_{n+1}]$. Тогда имеем

$$E_x^s(y,z) = i\omega\mu \sum_{n=1}^{N} \int_{-l_n}^{l_n} J_n(y_0) dy_0 \int_{z_n}^{z_{n+1}} g(y-y_0,z_0,z) dz_0 \qquad (27)$$

где $y \in [-l_n, l_n]$ интервал в n-м слое, в котором $J_n(y)$ отлично от нуля. При $z = 0$ из (27) получаем условие для обратной задачи

$$i\omega\mu \sum_{n=1}^{N} \int_{-l_n}^{l_n} J_n(y_0) \tilde{g}_n(y-y_0) dy_0 = E_x^s(y, z=0) \qquad (28)$$

где $\tilde{g}_n(y-y_0) = \int_{z_n}^{z_{n+1}} g(y-y_0,z_0,z=0) dz_0$

Используя представление (18), находим

$$\tilde{g}_n(y-y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(y-y_0)-\eta z_n} \left(1 - e^{-\eta h}\right) \frac{d\lambda}{\eta(\eta + |\lambda|)} \qquad (29)$$

Теорема 3.

Обратная двумерная задача определения распределения электропроводности $\sigma(y,z)$ в локальной области неоднородности S по известному электрическому полю $E_x^s(y, z=0)$ имеет единственное решение.

Доказательство.

Необходимо доказать, что разным распределениям $\sigma^{(1)}(y,z)$ и $\sigma^{(2)}(y,z)$ соответствуют разные аномальные электрические поля на плоскости $z=0$. Из соотношения (27) следует, что для разных $\sigma^{(1)}(y,z)$ и $\sigma^{(2)}(y,z)$ должны отличаться избыточные токи $J_n^{(1)}(y)$ и $J_n^{(2)}$ хотя бы в одном слое, на которые разбита неоднородность *S*. Это утверждение следует из единственности решения прямой задачи, согласно которой разным распределениям электропроводности в *S* соответствуют разные аномальные поля $E_x^s(y,z)$. Согласно (27) , при этом хотя бы одно $J_n^{(2)}(y)$ должно отличаться от $J_n^{(1)}(y)$.

Покажем теперь, что если хотя бы одно $J_n^{(2)}(y)$ отличается от $J_n^{(1)}(y)$, то будут отличаться аномальные поля при $z=0$ $E_x^{s1}(y,z=0) \neq E_x^{s2}(y,z=0)$. Для этого применим преобразование Фурье к соотношению (24). Так как $J_n(y)=0$ при $|y|>l_n$, то имеем

$$i\omega\mu\sum_{n=1}^{N} S_J^{(n)}(\nu)\cdot S_g^{(n)}(\nu) = S_E(\nu) \tag{30}$$

Это соотношение аналогично (24). Из (29) имеем

$$S_g^{(n)} = \frac{e^{-\eta_1 z_n}}{\eta_1(\eta_1+|\nu|)}\cdot(1-e^{-\eta_1 h}),\eta_1=\sqrt{\nu^2-i\omega\mu\sigma^*}\,, \tag{31}$$

где $z_n = h_1 + (n-1)h$, $n\in[1,N+1]$.

Выше было показано, что при разных $\sigma^{(1)}(y,z)$ и $\sigma^{(2)}(y,z)$ имеем хотя бы одно $J_n^{(2)}(y)$ отличное от $J_n^{(1)}(y)$, $n\in[1,N]$. Следовательно, хотя бы один образ Фурье $S_J^{(n)2}$ отличен от $S_J^{(n)1}$. Подставим (31) в (30), получим

$$\frac{i\omega\mu e^{-\eta_1 h_1}(1-e^{-\eta_1 h_1})}{\eta_1(\eta_1+|\nu|)}\cdot\sum_{n=1}^{N} S_J^{(n)}(\nu)e^{-\eta_1(n-1)h}) = S_E(\nu) \tag{32}$$

Заметим, что $\mathrm{Re}\,\eta_1 = \sqrt{\dfrac{\nu+\nu\sqrt{\nu^2+(\omega\mu\sigma^*)^2}}{2}} > \varepsilon > 0$. Тогда из (32) следует, что разным $S_J^{(n)}$ соответствуют разные $S_E(\nu)$. Пусть первые $S_J^{(n)}, n\in[1,k-1]$ для разных $\sigma(y,z)$ совпадают, а $S_J^{(k)2}\neq S_J^{(k)1}$. Тогда существует такое ν_0, что при $\nu\geq\nu_0$ $S_E^{(2)}\neq S_E^{(1)}$. Так как образы Фурье различны, то сами поля при *z*=0 также различны. Следовательно, доказано, что разным распределениям $\sigma(y,z)$, при $M(x,y)\in S$, соответствуют разные поля на плоскости $z=0$ $E_x^s(y,z=0)$. Это означает, что одинаковым полям $E_x^s(y,z=0)$ соответствуют одинаковые $\sigma(y,z)$. Теорема доказана.

Обратная задача зондирования неоднородной области в случае *H*-поляризации поля.

Рассмотрим электромагнитное поле *H*-поляризации в полупространстве $z>0$ с проводимостью σ^*, в котором имеется неоднородность с кусочно-непрерывным распределением электропроводности $\sigma(y,z)$. Неоднородность $M(y,z)\in S_H$ локальна, то есть $y\in[-L,L]$, $z\in[h_1,H]$ при $M(y,z)\in S_H$. Прямая задача состоит в определении $E_y(y,z)$, $E_z(y,z)$ являющихся решением системы уравнений (9) с граничными условиями (10). Первичное поле в этом случае равно

$$E_y^0(z)=\sqrt{\frac{i\omega\mu}{\sigma^*}}e^{-\sqrt{i\omega\mu\sigma^*}z};\quad E_z=0 \tag{33}$$

При этом выполняется условие $H_x(y,z=0)=1$. Введем вторичное (аномальное) поле, возникающее за счет неоднородности среды

$$E_y^s(y,z)=E_y(y,z)-E_y^0(z),\ E_z^s(y,z)=E_z(y,z) \tag{34}$$

Тогда для вторичного поля получим задачу: при $z>0$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial E_z^s}{\partial y}-\dfrac{\partial E_y^s}{\partial z}\right)=i\omega\mu\left(\sigma(y,z)-\sigma^*\right)(E_y^0+E_y^s)+i\omega\mu\sigma^*E_y^s\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial E_y^s}{\partial z}-\dfrac{\partial E_z}{\partial y}\right)=i\omega\mu(\sigma-\sigma^*)E_z^s+i\omega\mu\sigma^*E_z^s\end{cases} \tag{35}$$

при $z=0$ выполняются граничные условия

$$E_z^s(y,z=0)=0,\ \frac{\partial E_y^s(y,z=0)}{\partial z}=0 \tag{36}$$

Решение системы (35) определяется через тензорную функцию Грина в виде:

$$\overline{E}^s(y,z)=i\omega\mu\int_S\hat{g}\left((y-y_0),z,z_0\right)\overline{J}(y_0,z_0)dy_0dz_0 \tag{37}$$

где

$$\overline{E}^s=\begin{pmatrix}E_y^s\\E_z^s\end{pmatrix},\quad \overline{J}=\begin{pmatrix}J_y\\J_z\end{pmatrix},\quad J_y=(\sigma-\sigma^*)(E_y^s+E_y^0),\ J_z=(\sigma-\sigma^*)E_z^s,$$

- избыточные токи в неоднородности.

Тензорная функция Грина

$$\hat{g}(y-y_0,z,z_0)=\begin{pmatrix} g_{yy} & g_{yz} \\ g_{zy} & g_{zz} \end{pmatrix}$$

представляется в виде преобразования Фурье от матричной спектральной функции

$$\hat{g}(y-y_0,z,z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(y-y_0)}\hat{S}(\lambda,z,z_0)d\lambda \qquad (38)$$

Для однородного полупространства матричная спектральная функция имеет вид

$$\begin{aligned} S_{yy} &= \frac{\eta}{2k^2}\left(e^{-\eta|z-z_0|}+e^{-\eta(z+z_0)}\right), \quad \eta=\sqrt{\lambda^2-i\omega\mu\sigma^*} \\ S_{zy} &= \frac{i\lambda}{2k^2}\left(\frac{z-z_0}{|z-z_0|}e^{-\eta|z-z_0|}+e^{-\eta(z+z_0)}\right) \\ S_{yz} &= \frac{1}{2i\lambda}\left(\frac{z-z_0}{|z-z_0|}e^{-\eta|z-z_0|}-e^{-\eta(z+z_0)}\right) \\ S_{zz} &= \frac{1}{2\eta}\left(\frac{z-z_0}{|z-z_0|}e^{-\eta|z-z_0|}+e^{-\eta(z+z_0)}\right) \end{aligned} \qquad (39)$$

Из представления вторичного поля (37) следует, что разным распределениям электропроводности в неоднородности, соответствуют разные избыточные токи $\bar{J}(y,z)$. Данное утверждение следует из теоремы единственности прямой задачи, т.к. одинаковые избыточные токи порождают, согласно (37), одинаковые вторичные поля, что невозможно для разных проводимостей $\sigma(y,z)$. Для доказательства единственности решения обратной задачи осталось доказать, что разным избыточным токам соответствуют разные электрические поля на плоскости z=0. Для этого перейдем к дискретной модели неоднородности, разбив ее на слои толщиной h, считая, что в слое проводимость изменяется только вдоль слоя. Если выполняется условие $\omega\mu\sigma_{\max}h^2<<1$, где $\sigma_{\max}$-максимальная проводимость в неоднородности, то можно считать, что электрическое поле не зависит от z внутри слоя. В этих предположениях избыточный ток в n-м слое $\bar{J}^{(n)}(y)$ зависит только от y. Тогда представление (37) можно записать в виде:

$$\bar{E}(y,z)=i\omega\mu\sum_{n=1}^{N}\int_{-l_n}^{l_n}\hat{g}^{(n)}(y-y_0,z)\bar{J}^{(n)}(y_0)dy_0 \qquad (40)$$

где $$\hat{g}^{(n)}(y-y_0,z)=\int\limits_{z_n}^{z_n+h}\hat{g}(y-y_0,z,z_0)dz_0,\ z_n=h_1+(n-1)h \quad (41)$$

Рассмотрим теперь электрическое поле на плоскости z=0, где $E_z^s=0$, $E_y^s(y,z=0)$-известное поле. Так как, согласно (38-39) $g_{zy}(z=0)=0$ и $g_{zz}(z=0)=0$, то поле $E_y^s(y,z=0)$ выражается через избыточные токи в соответствии с (40) в виде:

$$E_y^s(y,z=0)=i\omega\mu\sum_{n=1}^{N}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g_{yy}^{(n)}(y-y_0)J_y^{(n)}(y_0)+g_{yz}(y-y_0)\overline{J}_z^{(n)}(y_0)dy_0 \quad (42)$$

где учтено, что $\overline{J}^{(n)}(y)\equiv 0$ при $|y|>l$.

Применив к соотношению (42) преобразование Фурье, получим для образов Фурье следующее равенство:

$$S_E(\nu)=i\omega\mu\sum_{n=1}^{N}\left(S_{yy}^{(n)}(\nu)S_{J_y}^{(n)}(\nu)+S_{yz}^{(n)}(\nu)S_{J_z}^{(n)}(\nu)\right) \quad (43)$$

Разным $J_y^{(n)}(y)$ и $J_z^{(n)}(y)$ соответствуют разные образы Фурье $S_{J_y}^{(n)}(\nu)$ и $S_{J_z}^{(n)}(\nu)$. Необходимо доказать, что при этом получим разные образы Фурье для поля $E_y^s(y)$.

Для этого рассмотрим поведение $S_{yy}^{(n)}(\nu)$ и $S_{yz}^{(n)}(\nu)$ при больших ν.

$$\begin{aligned}&S_{yy}^{(n)}(\nu)=\frac{1}{k^2}e^{-\eta z_n}(1-e^{-\eta h}), \quad k^2=i\omega\mu\sigma^*\\&S_{yz}^{(n)}(\nu)=\frac{i}{\nu\eta}e^{-\eta z_n}(1-e^{-\eta h}), \quad \eta=\sqrt{\lambda^2-i\omega\mu\sigma^*}\end{aligned} \quad (44)$$

Подставив выражения (44) в (43), получим, учитывая, что $z_n=h_1+(n-1)h$:

$$S_E(\nu)=\frac{1}{k^2}e^{-\eta h_1}(1-e^{-\eta h})\sum_{n=1}^{N}\left(S_{J_y}^{(n)}(\nu)-\frac{\omega\mu\sigma^*}{\nu\eta}S_{J_z}^{(n)}(\nu)\right)e^{-\eta(n-1)h}, \quad (45)$$

Из выражения (45) следует, что разным $Q^{(n)}=S_{J_y}^{(n)}(\nu)-\dfrac{\omega\mu\sigma^*}{\nu\eta}S_{J_z}^{(n)}$ соответствуют разные $S_E(\nu)$, что следует из поведения при $\nu\to\infty$, а разным S_{J_y} и S_{J_z} следует разное $Q^{(n)}(\nu)$, т.к. при $\nu\to\infty$ $Q^{(n)}(\nu)\to S_{J(y)}^{(n)}(\nu)$, а $\left(Q^{(n)}-S_{J_y}^{(n)}(\nu)\right)\nu\eta\to S_{J_z}^{(n)}\omega\mu\sigma^*$.

Таким образом доказано, что разным распределениям проводимости $\sigma(y,z)$ в неоднородности соответствуют разные электрические поля $E_y^s(y,z=0)$ Это означает, что заданному $E_y^s(y,z=0)$ соответствует единственное распределение $\sigma(y,z)$. Заметим, что при доказательстве использовалось предположение, что $\sigma(y,z)$ кусочно-постоянная функция по z, и кусочно-непрерывная локальная по y. Это означает, что

$$\sigma(y,z)=\sigma_n(y) \text{ при } z\in\left(h_1+(n-1)h, h_1+nh\right),$$

а $\sigma_n(y)$ кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая условию $\sigma_n(y)\equiv 0$ при $|y|>l_n$, $n\in[1,N]$, где l_n-конечная величина.

Литература

1. *Тихонов А.Н.* К математическому обоснованию теории электромагнитных зондирований. ЖВММФ, 1965 т5 №3 с 545-547
2. *Дмитриев В.И.* Магнитотеллурическое зондирования слоистой среды, содержащей тонкие неоднородные слои.// Прикладная Математика и Информатика. №55 . М. МАКСПресс, 2017, с 5-11.