В.И.Дмитриев

О РЕШЕНИИ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ*

Введение

Под эволюционной обратной задачей понимается обратная задача, оператор которой медленно изменяется в зависимости от параметра, определяющего вид оператора. При разработке метода решения таких обратных задач необходимо учитывать их эволюционный характер, что позволяет построить более простой устойчивый метод их решения.

1. Постановка задачи

Пусть обратная задача состоит в определении функции u из операторного, в общем случае, нелинейного уравнения

$$\mathbf{I}\left[u, p\right] = f, \;\; u \in U, \, f \in F, \qquad (1)$$

где оператор зависит от параметра p, который принимает значения $p \in \left[0, P\right]$. Такая задача называется эволюционной, т.к. изменение параметра изменяет оператор обратной задачи, а, следовательно, изменяет решение обратной задачи. Таким образом, решение обратной задачи эволюционирует в зависимости от изменения параметра p. Эволюционные обратные задачи подразделяются на два класса:

а. Параметрическая эволюционная задача, которую часто называют эволюционной задачей мониторинга.

В этом случае решение задачи (1) существует и единственно при любом фиксированном значении $p \in \left[0, P\right]$. Решение задачи проводится методом регуляризации [1], который позволяет найти

$$u = \tilde{\mathbf{I}}_{p_n}^{-1}\left[f\right] = f, \;\; f \in F, \; p = p_n = const, \qquad (2)$$

где $\tilde{\mathbf{I}}_{p_n}^{-1}$ — приближенный обратный оператор задачи (1), зависящий от значения параметра $p = p_n$. Типичными обратными задачами этого класса являются обратные задачи зондирования изучаемого объекта, характеристики которого медленно изменяются во времени. Причем,

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проект 08-01-00189-а и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 годы.

время, за которое существенно изменяется объект, много больше времени проведения зондирования.

б. Эволюционная задача с взаимодействием.

В этом случае решение задачи (1) определяется не для фиксированного значения параметра p, а зависит от всех значений $p \in [0, P]$. Это решение существует и единственно при $f \in F$ и $p \in [0, P]$, но p является переменной величиной, которая определяет оператор обратной задачи. Решение обратной задачи запишем в виде

$$u = \tilde{\mathbf{I}}_p^{-1}[f] = f,\ f \in F,\ p \in [0, P], \tag{3}$$

где $\tilde{\mathbf{I}}_p^{-1}$ — приближенный обратный оператор, зависящий от всех значений параметра $p \in [0, P]$. Типичными обратными задачами такого класса являются многомерные задачи, в которых характеристики задачи вдоль некоторых координат изменяются медленно и плавно. Например, это коэффициентные обратные задачи для дифференциальных уравнений, коэффициенты которых медленно изменяются вдоль некоторой координаты. В этом случае параметром эволюционной задачи является избранная координата. Естественно, в этом случае оператор задачи зависит от всех значений параметра (координаты).

2. Решение эволюционной обратной задачи мониторинга

Особенности этих эволюционных обратных задач позволяют, во-первых, линеаризовать обратную задачу, а во-вторых, в качестве стабилизатора брать уклонение от решения, полученного при предыдущем значении параметра. Пусть нам известно решение u_0 задачи (1) при $p = p_0 = 0$. Тогда задачу (1) можно линеаризовать при условии $|p - p_0| \ll 1,\ \|u_1 - u_0\| \ll 1$. В результате имеем вместо задачи (1) линейную обратную задачу:

$$\mathbf{I}_L[u_1 - u_0, p_1] = f - \mathbf{I}(u_0, p_0), \tag{4}$$

где $\mathbf{I}_L$ — линейная часть оператора $\mathbf{I}$. Если имеем последовательность параметров $\{p_n\}$, $n \in [0, N]$, то имеем последовательность обратных линейных задач

$$\mathbf{I}_L[u_n - u_{n-1}, p_n] = f - \mathbf{I}(u_{n-1}, p_{n-1}),\ \mathrm{n} \in [1, N], \tag{5}$$

Полученная задача (5) решается с помощью метода регуляризации Тихонова [1], где приближенное решение получается из вариационной задачи:

$$\inf_{u_n}\left\{\left\|\mathbf{I}_L\left(u_n-u_{n-1},p_n\right)-f_n\right\|^2+\alpha\left\|u_n-u_{n-1}\right\|^2\right\},\ n\in[1,N], \tag{6}$$

где $f_n=f-\mathbf{I}\left(u_{n-1},p_{n-1}\right)$, а α — параметр регуляризации. Заметим, что для эффективного решения обратных задач (6) необходимо знать u_0 при $p=0$. Это начальное состояние объекта, мониторинг которого проводится при изменении параметра p. Начальное состояние обычно известно или находится из специального решения начальной обратной задачи.

Рассмотрим построение решения эволюционной обратной задачи мониторинга на примере решения нелинейного интегрального уравнения первого рода, ядро которого зависит от параметра p:

$$\int_0^1 K\left(x,x_0,p,u(x_0)\right)dx_0=f(x),\quad x\in[0,1]. \tag{7}$$

Именно к такому уравнению обычно сводятся обратные задачи.

Пусть нам необходимо решать задачу (7) для набора параметров $\{p_n\}$, $n\in[1,N]$, причем $\left|p_n-p_{n-1}\right|\ll 1$. Ясно, что решения интегрального уравнения для близких значений параметра близки, т.е. $\left|u_n-u_{n-1}\right|\ll 1$. Тогда ядро уравнения можно представить в виде:

$$K\left(x,x_0,p_n,u_n\right)\cong K\left(x,x_0,p_n,u_{n-1}\right)+\left(u_n-u_{n-1}\right)\frac{\partial K\left(x,x_0,p_n,u_{n-1}\right)}{\partial u_{n-1}}.$$

В результате получим линейное интегральное уравнении Фредгольма первого рода

$$\int_0^1\frac{\partial K\left(x,x_0,p_n,u_{n-1}\right)}{\partial u_{n-1}}\left(u_n-u_{n-1}\right)dx_0=f(x)-\int_0^1 K\left(x,x_0,p_n,u_{n-1}\right)dx_0. \tag{8}$$

Это уравнение решается методом регуляризации.

3.Решение эволюционных обратных задач с взаимодействием

В этом случае решение задачи зависит от всего множества параметров и поэтому кажется, что использовать плавность изменения решения обратной задачи от изменения параметра невозможно. Однако можно выделить класс задач, в которых это свойство обратных задач может быть использовано для построения быстрых эффективных алгоритмов. Это класс задач с сосредоточенным взаимодействием, когда взаимодействуют сильно только решения с $|p-p_0| \le \Delta p$ (Δp —интервал взаимодействия). Если решение плавно изменяется от параметра p так, что выполняется условие

$$\left|\Delta p \frac{\partial u}{\partial p}\right| \ll 1, \tag{9}$$

то можно построить итерационный процесс быстрого решения обратной задачи. Заметим, что при выполнении условия (9) можно предполагать возможность сведения эволюционной обратной задачи с взаимодействием к задаче без взаимодействия. Для этого введем разные обозначения для этих эволюционных обратных задач.

1. Задача без взаимодействия

$$\mathbf{I}_p[u] = f, \;\; p = const, \;\; p \in [0,1]. \tag{10}$$

Оператор задачи зависит от фиксированного значения параметра p.

2. Задача с взаимодействием

$$\mathbf{I}[u, p] = f, \;\; p \in [0,1]. \tag{11}$$

Оператор обратной задачи зависит от всех значений параметра p.

Приближенное решение задачи (11) представим как решение задачи (10) для всего набора параметров, т.е.

$$u \approx \mathbf{I}_p^{-1}[f], \;\; \text{при} \;\; p \in [0,1]. \tag{12}$$

Если

$$\left\|\mathbf{I}\left[\mathbf{I}_p^{-1}[f], p\right] - f\right\| < \delta, \tag{13}$$

где δ — точность задания f, то можно утверждать, что (12), полученное из обратной задачи без взаимодействия, дает приближенное решение обратной задачи с взаимодействием. Это возможно, если интервал взаимодействия Δp очень мал. Обычно условие (13) не выполняется. В этом случае необходимо уточнение решения с помощью итерационного процесса. Для построения этого процесса представим уравнение (11) в виде:

$$\mathbf{I}_p[u] + \mathbf{I}[u, p] - \mathbf{I}_p[u] = f.$$

Тогда итерационный процесс можно определить следующим образом.

$$\mathbf{I}_p[u_n] = f + \mathbf{I}_p[u_{n-1}] - \mathbf{I}[u_{n-1}, p], \tag{14}$$

где $u_0 = \mathbf{I}_p^{-1}[f], p \in [0,1]$.

Откуда имеем

$$u_n = \mathbf{I}_p^{-1}\left[f + \mathbf{I}_p\left[u_{n-1}\right] - \mathbf{I}\left[u_{n-1}, p\right]\right]. \tag{15}$$

Заметим, что в (15) мы решаем только обратную задачу без взаимодействия $\mathbf{I}_p^{-1}$. Задача с взаимодействием используется только как прямая задача $\mathbf{I}\left[u_{n-1}, p\right]$. Все это дает возможность достаточно просто решать обратную эволюционную задачу с взаимодействием.

Рассмотрим этот подход на примере двумерного линейного интегрального уравнения первого рода. В этом случае задача с взаимодействием имеет вид:

$$\mathbf{I}\left[u, p\right] = \int_0^1 dp_0 \int_0^1 K\left(x, x_0, p - p_0\right) u(x_0, p_0) dx_0 = f(x, p),\ x \in \left[0,1\right],\ p \in \left[0,1\right]. \tag{16}$$

Соответствующая задача без взаимодействия равна

$$\mathbf{I}_p\left[u\right] = \int_0^1 K\left(x, x_0, p,\right) u(x_0) dx_0 = f(x). \tag{17}$$

Алгоритм решения уравнения (17) описан выше, что дает нам $u\left(x, p\right) = \mathbf{I}_p^{-1}\left[f\right]$. Тогда, согласно (15), имеем итерационный процесс в виде:

$$u_n(x,p) = \mathbf{I}_p^{-1}\left[f(x,p) + \int_0^1 K\left(x, x_0, p,\right) u_{n-1}(x_0, p) dx_0 - \right.$$

$$\left. - \int_0^1 dx_0 \int_0^1 K\left(x, x_0, p - p_0,\right) u_{n-1}(x_0, p_0) dp_0 \right]. \tag{18}$$

Таким образом, решение двумерного уравнения сводится к многократному решению одномерного уравнения. Такой подход позволяет сводить многомерные обратные задачи к одномерным. При этом многомерные прямые задачи решаются только один раз на каждой итерации. Пример решения двумерной коэффициентной задачи сведением к одномерной дан в [2].

Литература

3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М: Наука, 1974, 222 с.
4. Березина Н.И., Дмитриев В.И., Мерщикова Н.А. Квазиодномерный метод решения двумерной обратной задачи магнитотеллурического зондирования. // Прикладная математика и информатика № 35, М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2010, с.5-16.