В.И. Дмитриев, Е.В. Захаров, Е.В. Никитина

ТЕНЗОРНЫЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ МОРСКИХ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКИХ ЗОНДИРОВАНИЙ ЛОКАЛЬНО-НЕОДНОРОДНЫХ СЛОИСТЫХ СРЕД*

Задачи морского магнитотеллурического зондирования (МТЗ) связаны с изучением естественного электромагнитного поля Земли в районе морского дна. Присутствие локальных неоднородностей в кристаллическом фундаменте вызывают аномалии этого поля, которые могут быть использованы при поиске и разведке полезных ископаемых. Метод МТЗ в морской электроразведке допускает применение осесимметричных моделей, в которых ось симметрии перпендикулярна границе раздела «морская вода – донные отложения», вмещающая среда состоит из двух однородных проводящих полупространств (проводимость $\sigma = const$), разделенных плоской границей $z = 0$, а неоднородность представляет собой тело вращения. Магнитная проницаемость среды считается постоянной и равной μ_0 во всем пространстве, источники возбуждения в этой среде (зависимость от времени $e^{-i\omega t}$) расположены в магнитосфере Земли. Это электромагнитное поле считается низкочастотным и имеющим достаточно большую интенсивность, оно может представлять собой плоскую электромагнитную волну, нормально падающую на границу раздела (плоскость $z = 0$), или в общем случае систему диполей [1].

Ключевой методикой при постановке и решении этих модельных задач является применение тензорных функций Грина электрического и магнитного типа (тензорных потенциалов) для рассматриваемой структуры среды. В работе [2] представлена общая схема построения тензора функций Грина для уравнений Максвелла в декартовых координатах в случае плоскопараллельных сред и проведено исследование тензорных потенциалов. На основе данной методики можно разработать алгоритмы расчета элементов тензора электрического и магнитного полей в полярных координатах с применением разложений в ряды Фурье по координате вращения. Такие алгоритмы могут быть эффективно использованы в моделях с осевой симметрией и особенно в

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 08-01-00189

тех случаях, когда задача может быть сведена к рассмотрению отдельных азимутальных гармоник электромагнитного поля, например, в моделях распространения плоских волн в слоистой среде (поле описывается одной первой гармоникой Фурье $n=1$) или в моделях с заданными дипольными источниками возбуждения.

Тензоры Грина для электромагнитного поля в полярной системе координат

Наряду с декартовой системой координат (z,x,y), введем цилиндрическую систему координат (z,ρ,φ). Следуя методу построения тензоров функций Грина для электрического и магнитного поля точечного источника [2], введем интегральный оператор Бесселя

$$I_m(F)=\frac{1}{4\pi}\cdot\int_0^\infty J_m(\lambda r)\cdot\lambda F(\lambda;\xi)d\lambda,\quad -\infty<m<\infty. \tag{1}$$

Например, известное интегральное представление Зоммерфельда для скалярного фундаментального решения для уравнения Гельмгольца в точке $M=(z,\rho,\varphi)$ с источником в точке $M_0=(z_0,\rho_0,\varphi_0)$ принимает вид

$$\frac{e^{ikR}}{4\pi R}=\int_0^\infty J_0(\lambda r)\cdot\frac{\lambda}{\gamma}\cdot e^{-\gamma|z-z_0|}d\lambda=I_0\left(\frac{e^{-\gamma|\xi|}}{\gamma}\right),$$
$$R=\sqrt{r^2+(z-z_0)^2},\ r=\sqrt{\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos\theta}$$
$$\xi=z-z_0,\ \theta=\varphi-\varphi_0,\gamma^2=\lambda^2-k^2.$$

Для оператора Бесселя справедливы очевидные свойства:

$$\frac{\partial}{\partial z}I_0(F)=I_0\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right),\qquad \frac{\partial}{\partial l}I_0(F)=-I_1(\lambda F)\cdot\cos\phi,$$

где l – направление на плоскости (ρ,φ), ϕ – угол между вектором r и направлением l.

Общее выражение для тензоров Грина электрического поля $\hat{\mathrm{E}}$ и магнитного поля $\hat{\mathrm{H}}$ через тензор функций Грина $\hat{\mathrm{G}}(M,M_0)$ имеет вид [1]:

$$\hat{\mathrm{E}}=\hat{\mathrm{G}}+\frac{1}{k^2}\operatorname{grad}\operatorname{div}\hat{\mathrm{G}},\qquad \hat{\mathrm{H}}=\frac{1}{i\omega\mu_0}\operatorname{rot}\hat{\mathrm{G}},$$
$$\Delta\hat{\mathrm{G}}+k^2\hat{\mathrm{G}}=-i\omega\mu_0\cdot\hat{\delta}(M,M_0),\quad k^2=i\omega\mu_0\sigma(z). \tag{2}$$

Ниже проведены результаты для тензорных потенциалов электрического типа. Аналогичные формулы имеют место и для тензорных потенциалов магнитного типа в соответствии с принципом двойственности уравнений

Максвелла $\operatorname{rot}\hat{\mathrm{H}} = \sigma(z)\hat{\mathrm{E}}$, $\operatorname{rot}\hat{\mathrm{E}} = i\omega\mu_0\hat{\mathrm{H}}$ для электрических и магнитных полей [1]: $\hat{\mathrm{H}} \leftrightarrow \hat{\mathrm{E}}$, $\sigma \leftrightarrow i\omega\mu_0$.

Элементы тензоров $\hat{\mathrm{E}}$, $\hat{\mathrm{H}}$ в полярной системе координат включают компоненты векторов электромагнитного поля, созданного в точке наблюдения $M = (z, \rho, \varphi)$ векторным (дипольным) источником, расположенным и соответственно ориентированным вдоль полярных координат в точке источника $M_0 = (z_0, \rho_0, \varphi_0)$. Обозначим $\vec{\mathrm{U}}_\beta$ вектор-столбец тензора $\hat{\mathrm{U}} = (\mathrm{U}_{\alpha\beta})$, $\alpha, \beta = z, \rho, \varphi$. Тогда вектора $\vec{\mathrm{E}}_\beta$, $\vec{\mathrm{H}}_\beta$ в тензорах $\hat{\mathrm{E}}$, $\hat{\mathrm{H}}$ представляют собой поля дипольного источника, ориентированного вдоль координатной оси β в точке M_0. Рассмотрим на координатной плоскости переменных (ρ, φ) треугольник с вершинами в точках $M = (z, \rho, \varphi)$, $M_0 = (z_0, \rho_0, \varphi_0)$ и в начале координат $z = 0, \rho = 0, \varphi = 0$ со сторонами ρ, ρ_0 и $r = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos\theta}$, где $\theta = (\varphi - \varphi_0)$ – угол между сторонами ρ, ρ_0, ψ – угол между сторонами r, ρ_0. Представления для полярных компонент тензоров поля можно получить из приведенных в [2] выражений $\hat{\mathrm{G}}(M, M_0)$ для компонент тензоров в декартовой системе. Для этого следует использовать симметрию функций Грина, построить тензорный потенциал $\hat{\mathrm{G}}$ и вычислить $\operatorname{div}\hat{\mathrm{G}}$ в декартовой системе координат (z, x, y), центрированной в точке источника M_0, а потом совершить переход к произвольной полярной системе координат (z, ρ, φ) и вычислить значения дифференциальных операторов grad, rot в точке наблюдения:

$$\vec{\mathrm{G}}_z = (0, 0, g_2), \quad \operatorname{div}\vec{\mathrm{G}}_z = \frac{\partial g_2}{\partial z},$$

$$\vec{\mathrm{G}}_x = (g_1, 0, sign(\rho_0 - \rho)\cdot\cos\psi\cdot\bar{g}), \quad \operatorname{div}\vec{\mathrm{G}}_x = -sign(\rho - \rho_0)\cdot\cos\psi\cdot\tilde{g},$$

$$\vec{\mathrm{G}}_y = (g_1, 0, sign(\pi - \theta)\cdot\sin\psi\cdot\bar{g}), \quad \operatorname{div}\vec{\mathrm{G}}_y = sign(\pi - \theta)\cdot\sin\psi\cdot\tilde{g},$$

$$g_1 = i\omega\mu_0\cdot I_0(U), \quad g_2 = i\omega\mu_0\cdot I_0(V), \quad \frac{\partial g_2}{\partial z} = i\omega\mu_0\cdot I_0(V_z'),$$

$$\bar{g} = -i\omega\mu_0\cdot I_1\left(\frac{1}{\lambda}(W - U_z')\right), \quad \tilde{g} = -i\omega\mu_0\cdot I_1\left(\frac{1}{\lambda}(k^2U + W_z')\right).$$

Обозначим следующие вектора-столбцы тензоров $\hat{\mathrm{E}}$ и $\hat{\mathrm{H}}$:

$$\vec{\mathrm{E}}_z = i\omega\mu_0\cdot(E_{zz}, E_{\rho z}, E_{\varphi z}), \; \vec{\mathrm{H}}_z = \frac{1}{i\omega\mu_0}\cdot(H_{zz}, H_{\rho z}, H_{\varphi z}),$$

$$\vec{\mathrm{E}}_\rho = i\omega\mu_0\cdot(E_{z\rho}, E_{\rho\rho}, E_{\varphi\rho}), \; \hat{\mathrm{H}}_\rho = \frac{1}{i\omega\mu_0}\cdot(H_{z\rho}, H_{\rho\rho}, H_{\varphi\rho}),$$

$$\vec{\mathrm{E}}_{\varphi} = i\omega\mu_0 \cdot \left(E_{z\varphi}, E_{\rho\varphi}, E_{\varphi\varphi}\right),\ \hat{\mathrm{H}}_{\varphi} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \cdot \left(H_{z\varphi}, H_{\rho\varphi}, H_{\varphi\varphi}\right).$$

В результате для тензорных элементов в полярной системе координат получим выражения:

$$E_{zz} = \frac{1}{k^2} \cdot I_0\left(\lambda^2 V\right),\quad E_{\rho z} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\partial}{\partial\rho} I_0\left(V_z'\right),\quad E_{\varphi z} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} I_0\left(V_z'\right); \qquad (3)$$

$$E_{z\rho} = \frac{1}{k^2} sign\left(\rho - \rho_0\right) \cdot \cos\psi \cdot I_1(\lambda W),$$

$$E_{\rho\rho} = +\cos\theta \cdot I_0(U) + \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\partial}{\partial\rho}\left(sign\left(\rho - \rho_0\right) \cdot \cos\psi \cdot I_1\left(\frac{k^2 U + W_z'}{\lambda} \right)\right), \qquad (4)$$

$$E_{\varphi\rho} = -\sin\theta \cdot I_0(U) + \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(sign\left(\rho - \rho_0\right) \cdot \cos\psi \cdot I_1\left(\frac{k^2 U + W_z'}{\lambda\rho} \right)\right);$$

$$E_{z\varphi} = -\frac{1}{k^2} sign(\pi - \theta) \cdot \sin\psi \cdot I_1(\lambda W),$$

$$E_{\rho\varphi} = \sin\theta \cdot I_0(U) - \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\partial}{\partial\rho}\left(sign(\pi - \theta) \cdot \sin\psi \cdot I_1\left(\frac{k^2 U + W_z'}{\lambda} \right)\right), \qquad (5)$$

$$E_{\varphi\varphi} = \cos\theta \cdot I_0(U) - \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(sign(\pi - \theta) \cdot \sin\psi \cdot I_1\left(\frac{k^2 U + W_z'}{\lambda\rho} \right)\right);$$

$$H_{zz} = 0,\quad H_{\rho z} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} I_0(V),\quad H_{\varphi z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho \cdot I_0(V)\right); \qquad (6)$$

$$H_{z\rho} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho \cdot \sin\theta \cdot I_0(U)\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\theta \cdot I_0(U)\right),$$

$$H_{\rho\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(sign\left(\rho - \rho_0\right) \cdot \cos\psi \cdot I_1\left(\frac{W - U_z'}{\lambda} \right)\right) + \sin\theta \cdot I_0\left(U_z'\right), \qquad (7)$$

$$H_{\varphi\rho} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho \cdot sign\left(\rho - \rho_0\right) \cdot \cos\psi \cdot I_1\left(\frac{W - U_z'}{\lambda} \right)\right) + \cos\theta \cdot I_0\left(U_z'\right);$$

$$H_{z\varphi} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\cdot\cos\theta\cdot I_0(U)) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sin\theta\cdot I_0(U)),$$

$$H_{\rho\varphi} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(-sign(\pi-\theta)\cdot\sin\psi\cdot I_1\left(\frac{W-U'_z}{\lambda}\right)\right) - \cos\theta\cdot I_0(U'_z), \qquad (8)$$

$$H_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(-\rho\cdot sign(\pi-\theta)\cdot\sin\psi\cdot I_1\left(\frac{W-U'_z}{\lambda}\right)\right) + \sin\theta\cdot I_0(U'_z);$$

Отметим, что в (3-8) при $\rho_0 = 0,\ \varphi_0 = 0,\ \theta = \varphi$:

$$I_m(F) = \frac{1}{4\pi}\cdot\int_0^\infty J_m(\lambda\rho)\cdot\lambda F(\lambda;\xi)d\lambda,$$

$$sign(\pi-\theta)\cdot\sin\psi = \sin\varphi,\ sign(\rho-\rho_0)\cdot\cos\psi = -\cos\varphi\ .$$

В формулах (3–8) введены функции-операторы Бесселя (1), у которых функции-аргументы $U(\lambda;z), V(\lambda;z), W(\lambda;z)$ определяются через общую фундаментальную функцию слоистой среды $F_a^\alpha(\lambda;z,z_0)$:

$$\left(\frac{d}{dz^2} - \gamma^2(z)\right)F_a^\alpha = 0.$$

В работе [2] дана общая постановка задачи для класса функции $F_a^\alpha(\lambda;z,z_0)$, в которой в зависимости от параметров a,α заданы условия в точках разрыва коэффициента $\gamma^2(z) = \lambda^2 - i\sigma(z)$ и условия в точке особенности $z = z_0$. Эти условия определяются непрерывностью касательных компонент электромагнитных полей на границе раздела сред и обеспечивают особое поведение функций Грина при совпадении аргументов. Постановки и решения задач для определения фундаментальных функций U, V, W зависят от заданной модели среды в задачах МТЗ.

Фурье-разложение тензора Грина для электромагнитных полей

Для всех элементов тензоров (3-8) построим разложение в ряды Фурье по координате вращения θ. Для этого к интегральным операторам Бесселя в представлениях (3-8) применим теорему сложения Графа [3] и с учетом введенных выше обозначений, а также с учетом четности функции $J_0(\lambda r)$ по переменной θ при $r = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos\theta}$, запишем теорему сложения:

$$J_0(\lambda r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\lambda\rho)\cdot J_n(\lambda\rho_0)\cdot\cos(n\theta)$$

или в общем виде:

$$J_m(\lambda r)\cdot\begin{Bmatrix}\pm\cos(m\psi)\\ \sin(m\psi)\end{Bmatrix}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(\lambda\rho_1)\cdot J_{n+m}(\lambda\rho_2)\cdot\begin{Bmatrix}\cos(n\theta)\\ \sin(n\theta)\end{Bmatrix},\tag{9}$$

где выбор $\rho_i=\rho,\rho_0$ при $i=1,2$ осуществляется из условия $\rho_1<\rho_2$, а знак $\pm$ совпадает с $sign(\rho_0-\rho)$. Это означает, что следующие операторы Бесселя могут быть разложены в соответствующие ряды Фурье:

$$I_0(F)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}I_{0,n}(F)\cdot\cos(n\theta),\tag{10}$$

$$I_0(F)\cdot\begin{Bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{Bmatrix}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\begin{Bmatrix}I^{+}_{0,n}(F)\cdot\cos(n\theta)\\ I^{-}_{0,n}(F)\cdot\sin(n\theta)\end{Bmatrix},\tag{11}$$

где

$$I_{0,n}(F)=\frac{1}{4\pi}\cdot\int_0^{\infty}J_n(\lambda\rho)\cdot J_n(\lambda\rho_0)\cdot\lambda F(\lambda,\xi)\cdot d\lambda,$$

$$I^{\pm}_{0,n}(F)=\frac{1}{4\pi}\cdot\int_0^{\infty}\frac{J_{n+1}(\lambda\rho)\cdot J_{n+1}(\lambda\rho_0)\pm J_{n-1}(\lambda\rho)\cdot J_{n-1}(\lambda\rho_0)}{2}\cdot\lambda F(\lambda,\xi)\cdot d\lambda$$

и

$$\begin{Bmatrix}-s\cdot\cos(m\psi)\\ \sin(m\psi)\end{Bmatrix}\cdot I_1(F)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}I^{s}_{1,n}(F)\cdot\begin{Bmatrix}\cos(n\theta)\\ \sin(n\theta)\end{Bmatrix},\tag{12}$$

где

$$I^{s}_{1,n}(F)=\frac{1}{4\pi}\cdot\int_0^{\infty}J_n(\lambda\rho)\cdot J_{n-s}(\lambda\rho_0)\cdot\lambda F(\lambda;\xi)\cdot d\lambda\ ,\quad s=sign(\rho-\rho_0)=\pm1.$$

Полученные разложения позволяют перейти к разложениям в ряд Фурье для каждого элемента тензора Грина электрического и магнитного полей в полярных координатах, причем Фурье-компоненты также будут иметь вид интегральных операторов, включающих произведения функции Бесселя. Вычисления производных операторов Бесселя по переменной z приводит к дифференцированию функции-аргумента оператора, дифференцирование по переменной ρ приводит к умножению аргумента оператора Бесселя на параметр λ и вычислению производной соответствующей функции Бесселя по формуле $J'_m=\dfrac{(J_{m-1}-J_{m+1})}{2}$ для целого m. Производная по угловой переменной φ относится к базисным функциям рядов Фурье.

Итак, представим элементы тензоров (3–8) в виде рядов Фурье:

$$E_{zz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k^2} \cdot I_{0,n}\left(\lambda^2 V\right) \right\} \cdot \cos(n\theta),$$
$$E_{\rho z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k^2} \cdot \bar{I}_{0,n}\left(\lambda V_z'\right) \right\} \cdot \cos(n\theta), \tag{13}$$
$$E_{\varphi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{k^2} \cdot \frac{I_{0,n}\left(V_z'\right)}{\rho} \right\} \cdot \sin(n\theta);$$

$$E_{z\rho} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{k^2} s_\rho \cdot I_{1,n}^{s}\left(\lambda W\right) \right\} \cdot \cos(n\theta),$$
$$E_{\rho\rho} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ I_{0,n}^{+}(U) - \frac{1}{k^2} \cdot s_\rho \cdot \bar{I}_{1,n}^{s}\left(k^2 U + W_z'\right) \right\} \cdot \cos(n\theta), \tag{14}$$
$$E_{\varphi\rho} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ -I_{0,n}^{-}(U) + \frac{1}{k^2} \cdot s_\rho \cdot I_{1,n}^{s}\left(\frac{k^2 U + W_z'}{\lambda\rho} \right) \right\} \cdot \sin(n\theta);$$

$$E_{z\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{k^2} s_\varphi \cdot I_{1,n}^{s}\left(\lambda W\right) \right\} \cdot \sin(n\theta),$$
$$E_{\rho\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ +I_{0,n}^{-}(U) - \frac{1}{k^2} \cdot s_\varphi \cdot \bar{I}_{1,n}^{s}\left(k^2 U + W_z'\right) \right\} \cdot \sin(n\theta), \tag{15}$$
$$E_{\varphi\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ I_{0,n}^{+}(U) - \frac{1}{k^2} \cdot s_\varphi \cdot I_{1,n}^{s}\left(\frac{k^2 U + W_z'}{\lambda\rho} \right) \right\} \cdot \cos(n\theta);$$

$$H_{zz} = 0,$$
$$H_{\rho z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{I_{0,n}(V)}{\rho} \right\} \cdot \sin(n\theta), \tag{16}$$
$$H_{\varphi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ -\bar{I}_{0,n}(\lambda V) - \frac{I_{0,n}(V)}{\rho} \right\} \cdot \cos(n\theta);$$

$$H_{z\rho} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{I}_{0,n}(\lambda U)\cdot\sin(n\theta),$$

$$H_{\rho\rho} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ s_\rho \cdot I_{1,n}^{s}\left(\frac{W-U'_z}{\lambda\rho}\right) + I_{0,n}(U'_z) \right\}\cdot\sin(n\theta), \tag{17}$$

$$H_{\varphi\rho} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ s_\rho \cdot \bar{I}_{1,n}^{s}(W-U'_z) + s_o \cdot I_{1,n}^{s}\left(\frac{W-U'_z}{\lambda\rho}\right) + I_{0,n}(U'_z) \right\}\cdot\cos(n\theta);$$

$$H_{z\varphi} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{I}_{0,n}(\lambda U)\cdot\cos(n\theta),$$

$$H_{\rho\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ -s_\varphi \cdot I_{1,n}^{s}\left(\frac{W-U'_z}{\lambda\rho}\right) - I_{0,n}(U'_z) \right\}\cdot\cos(n\theta), \tag{18}$$

$$H_{\varphi\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(s_\varphi \cdot \bar{I}_{1,n}^{s}(W-U'_z) + s_\varphi \cdot I_{1,n}^{s}\left(\frac{W-U'_z}{\lambda\rho}\right) + I_{0,n}(U'_z) \right)\cdot\sin(n\theta);$$

здесь $s_\rho = sign(\rho-\rho_0), s_\varphi = sign(\pi-\theta),\ s = sign(\rho-\rho_0)$ – целые числа, принимающие значение ± 1. В формулах (13–18) дополнительно к (10–12) введены интегральные операторы Бесселя следующего вида:

$$I_{0,n}(F) = \frac{1}{4\pi}\cdot\int_0^\infty J_n(\lambda\rho)\cdot J_n(\lambda\rho_0)\cdot\lambda F(\lambda,\xi)\cdot d\lambda,$$

$$I_{s,n}(F) = \frac{1}{4\pi}\cdot\int_0^\infty J_{n+s}(\lambda\rho)\cdot J_{n-s}(\lambda\rho_0)\cdot\lambda F(\lambda;\xi)\cdot d\lambda,$$

$$I_{1,n}^{s}(F) = \frac{1}{4\pi}\cdot\int_0^\infty J_n(\lambda\rho)\cdot J_{n-s}(\lambda\rho_0)\cdot\lambda F(\lambda;\xi)\cdot d\lambda,$$

и обозначены комбинации этих операторов:

$$I_{0,n}^{\pm} = \frac{(I_{0,n+1} \pm I_{0,n-1})}{2},\quad \bar{I}_{1,n}^{s} = s\cdot\frac{(I_{0,n-s} - I_{s,n})}{2},\quad \bar{I}_{0,n} = \frac{I_{1,n-1}^{-1} - I_{1,n+1}^{+1}}{2}.$$

Алгоритм расчета фундаментальных функций слоистой среды для случая двух различных и однородно проводящих полупространств

В случае модели слоистой среды для задачи МТЗ с проводимостью:

$$\sigma(z) = \begin{cases} \sigma_1, & z<0, \\ \sigma_2, & z>0. \end{cases} \tag{19}$$

для фундаментальных функций $U(\lambda;\xi), V(\lambda;\xi), W(\lambda;\xi)$, $\xi = z - z_0$ справедливы следующие ниже постановки задач, в которых λ является параметром, а коэффициент $k^2(z) = i\omega\mu_0\sigma(z)$ терпит разрыв в точке $z = 0$, причем решения этих задач представлены в простом виде. Например, в случае $z_0 < 0$ имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dz^2} - \gamma^2(z)\cdot U = 0, \quad |z| < \infty, z \neq z_0, \quad \gamma^2(z) = \lambda^2 - k^2(z), \quad \mathrm{Re}\,\gamma > 0; \\ [U] = 0, \quad \left[\dfrac{dU}{dz}\right] = 0, \quad z = 0; \\ [U] = 0, \quad \left[\dfrac{d^2U}{dz^2}\right] = -2, \quad z = z_0; \\ U \to 0, \quad |z| \to \infty. \end{cases} \tag{20}$$

$$U(\lambda; z) = \begin{cases} u_0 \cdot \dfrac{e^{-\gamma_2|z-z_0|}}{\gamma_2} + u_1 \cdot e^{+\gamma_1 z}, \quad z < 0, \\ u_2 \cdot e^{-\gamma_2 z}, \quad z > 0; \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dz^2} - \gamma^2(z)\cdot V = 0, \quad |z| < \infty, z \neq z_0, \quad \gamma^2(z) = \lambda^2 - k^2(z), \quad \mathrm{Re}\,\gamma > 0; \\ [V] = 0, \quad \left[\dfrac{1}{\sigma(z)}\dfrac{dV}{dz}\right] = 0, \quad z = 0; \\ [V] = 0, \quad \left[\dfrac{d^2V}{dz^2}\right] = -2, \quad z = z_0; \\ V \to 0, \quad |z| \to \infty. \end{cases} \tag{22}$$

$$V(\lambda; z) = \begin{cases} v_0 \cdot \dfrac{e^{-\gamma_2|z-z_0|}}{\gamma_2} + v_1 \cdot e^{+\gamma_1 z}, \quad z < 0, \\ v_2 \cdot e^{-\gamma_2 z}, \quad z > 0; \end{cases} \tag{23}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dW}{dz^2} - \gamma^2(z)\cdot W = 0, |z| < \infty, z \neq z_0, \quad \gamma^2(z) = \lambda^2 - k^2(z), \quad \mathrm{Re}\,\gamma > 0; \\ [W] = 0, \quad \left[\dfrac{1}{\sigma(z)}\dfrac{dW}{dz}\right] = 0, \quad z = 0; \\ [W] = -2, \quad \left[\dfrac{d^2W}{dz^2}\right] = 0, \quad z = z_0; \\ W \to 0, \quad |z| \to \infty. \end{cases} \tag{24}$$

$$W(\lambda; z) = \begin{cases} -w_0 \cdot \dfrac{z - z_0}{|z - z_0|} \cdot \dfrac{e^{-\gamma_2 |z - z_0|}}{\gamma_2} + w_1 \cdot e^{+\gamma_1 z}, \quad z < 0, \\ w_2 \cdot e^{-\gamma_2 z}, \quad z > 0; \end{cases} \tag{25}$$

Здесь u_0, v_0, w_0 – константы нормировки, а константы $u_{1,2}, v_{1,2}, w_{1,2}$ определяются из граничных условий, которые приводят к решению простых линейных систем.

Вычисление интегральных операторов Бесселя

Расчет тензоров Грина по построенным здесь выше формулам сводится к вычислению интегральных операторов Бесселя, через которые определяются элементы тензоров (3–8) или их Фурье-компоненты (13–18), а именно, к вычислению интегралов следующего вида:

$$\int_0^\infty R_n(\lambda; \rho, \rho_0)\cdot \lambda F(\lambda; \xi)\cdot d\lambda. \tag{26}$$

Ядро $R_n(\lambda; \rho, \rho_0)$ представляет собой арифметическую комбинацию из функций Бесселя $J_m(\zeta), \zeta = \lambda\rho, \lambda\rho_0$ целых порядков m, причем значения ядра ограничены для всех ρ, ρ_0 или убывают при $\lambda \to \infty$ не менее $O\left(\lambda^{-1/2}\right)$ в силу асимптотических свойств функций Бесселя. Фундаментальные функции слоистой среды $F(\lambda; \xi)$ в рассматриваемом здесь случае проводящих сред (20–25) ведут себя как экспоненты вида $\exp(-\gamma \cdot |\xi|)$, $\gamma = \sqrt{\lambda^2 - i\sigma}, \mathrm{Re}\,\gamma > 0$. В частности, при $\sigma = const$ комплексное значение параметра γ может быть выбрано из условия $\mathrm{Re}\,\gamma > 0$ в виде $\mathrm{Re}\,\gamma = \lambda + o\left(\dfrac{\tau}{\sqrt{\tau^2+1}}\right)$, $\mathrm{Im}\,\gamma = O\left(\dfrac{\tau}{\sqrt{\tau^2+1}}\right)$, $\tau = \sigma/\lambda^2$ при $\lambda \to \infty$. Таким образом, интегралы Бесселя вида (26) являются сходящимися.

Электромагнитное поле для специального точечного источника

Рассмотрим пример использования построенных здесь тензорных потенциалов. В заданной среде (19) для источника специального вида вычислим поле, распространяющееся через границу раздела двух полупространств с различной проводимостью. Источник представляет собой комбинацию двух точечных источников магнитного типа $(\mathrm{H}_z, \mathrm{H}_x, 0)$ и электрического типа $(0, 0, \mathrm{E}_y)$, расположенных в полупространстве $z<0$ на оси z в точке с координатами $z_0=-h$, $\rho_0=0$, $\varphi_0=0$, а поле источника определяется в полупространстве $z>0$. Поле комбинированного источника, вычисленное в точке с полярными координатами z,ρ,φ, представляет собой суперпозицию трех электромагнитных полей:

$$\vec{\mathrm{E}}_1=\frac{\mathrm{H}_z}{\sigma}\cdot\left(E_{zz}, E_{\rho z}, E_{\varphi z}\right),$$

$$\vec{\mathrm{E}}_2=\frac{\mathrm{H}_x}{\sigma}\cdot\left(E_{z\rho}, E_{\rho\rho}, E_{\varphi\rho}\right), \tag{27}$$

$$\vec{\mathrm{E}}_3=i\omega\mu_0\mathrm{E}_y\cdot\left(E_{z\varphi}, E_{\rho\varphi}, E_{\varphi\varphi}\right);$$

$$\vec{\mathrm{H}}_1=\sigma\mathrm{H}_z\cdot\left(H_{zz}, H_{\rho z}, H_{\varphi z}\right),$$

$$\vec{\mathrm{H}}_2=\sigma\mathrm{H}_x\cdot\left(H_{z\rho}, H_{\rho\rho}, H_{\varphi\rho}\right), \tag{28}$$

$$\vec{\mathrm{H}}_3=\frac{\mathrm{E}_y}{i\omega\mu_0}\cdot\left(H_{z\varphi}, H_{\rho\varphi}, H_{\varphi\varphi}\right).$$

Компоненты векторов $E_{\alpha\beta}, H_{\alpha\beta}$, $\alpha,\beta=z,\rho,\varphi$ в (27–28) представлены двумя гармониками Фурье $n=0{,}1$ и определяются следующими формулами:

$$H_{zz}=\frac{1}{k^2}\cdot I_0\left(\lambda^2 V\right),\quad H_{\rho z}=-\frac{1}{k^2}\cdot I_1\left(\lambda V_z'\right),\quad H_{\varphi z}=0; \tag{29}$$

$$
\begin{aligned}
H_{z\rho} &= \cos\varphi \cdot \left\{ -\frac{1}{k^2} \cdot I_1(\lambda W) \right\}, \\
H_{\rho\rho} &= \cos\varphi \cdot \left\{ I_0(U) - \frac{1}{k^2} \cdot \frac{I_0\left(k^2 U + W_z'\right) - I_2\left(k^2 U + W_z'\right)}{2} \right\}, \\
H_{\varphi\rho} &= \sin\varphi \cdot \left\{ -I_0(U) + \frac{1}{k^2} \cdot I_1\left(\frac{k^2 U + W_z'}{\lambda\rho} \right) \right\};
\end{aligned}
\tag{30}
$$

$$
\begin{aligned}
H_{z\varphi} &= \cos\varphi \cdot \left\{ \frac{I_0(\lambda U) - I_2(\lambda U)}{2} \right\}, \\
H_{\rho\varphi} &= \cos\varphi \cdot \left\{ -I_1\left(\frac{W - U_z'}{\lambda\rho} \right) - I_0(U_z') \right\}, \\
H_{\varphi\varphi} &= \sin\varphi \cdot \left\{ \frac{I_0(W - U_z') - I_2(W - U_z')}{2} + I_1\left(\frac{W - U_z'}{\lambda\rho} \right) + I_0(U_z') \right\};
\end{aligned}
\tag{31}
$$

$$
E_{zz} = 0, \quad E_{\rho z} = 0, \quad E_{\varphi\rho} = I_1(\lambda V); \tag{32}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{z\rho} &= \sin\varphi \cdot \left\{ -\frac{I_0(\lambda U) - I_2(\lambda U)}{2} \right\}, \\
E_{\rho\rho} &= \sin\varphi \cdot \left\{ I_1\left(\frac{W - U_z'}{\lambda\rho} \right) - I_0(U_z') \right\}, \\
E_{\varphi\rho} &= \cos\varphi \cdot \left\{ \frac{I_0(W - U_z') - I_2(W - U_z')}{2} + I_1\left(\frac{W - U_z'}{\lambda\rho} \right) + I_0(U_z') \right\};
\end{aligned}
\tag{33}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{z\varphi} &= \sin\varphi \cdot \left\{ -\frac{1}{k^2} \cdot I_1(\lambda W) \right\}, \\
E_{\rho\varphi} &= \sin\varphi \cdot \left\{ I_0(U) - \frac{1}{k^2} \cdot \frac{I_0\left(k^2 U + W_z'\right) - I_2\left(k^2 U + W_z'\right)}{2} \right\}, \\
E_{\varphi\varphi} &= \cos\varphi \cdot \left\{ I_0(U) - \frac{1}{k^2} \cdot I_1\left(\frac{k^2 U + W_z'}{\lambda\rho} \right) \right\};
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Здесь

$$
I_m(F) = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_0^\infty J_m(\lambda\rho) \cdot \lambda\, F(\lambda;\xi)\, d\lambda, \;\; m = 1,2;
$$

$$I_1\left(\frac{F}{\lambda\rho}\right)=\frac{1}{4\pi}\cdot\int_0^\infty\frac{J_1(\lambda\rho)}{\lambda\rho}\cdot\lambda F(\lambda;\xi)d\lambda.$$

Фундаментальные $U(\lambda;z), V(\lambda;z), W(\lambda;z)$ функции среды (19) в области $z>0$ в формулах (29–34) могут быть представлены в нормированном виде $u_0, = v_0 = w_0 = e^{\gamma_1 h}$:

$$\begin{aligned}
&U(\lambda;z)=u_2\cdot e^{-\gamma_1 z}, \quad u_2=\frac{2}{\gamma_1+\gamma_2},\\
&V(\lambda;z)=v_2\cdot e^{-\gamma_2 z}, \quad v_2=\frac{2}{\gamma_1+\gamma_2\cdot(\sigma_1/\sigma_2)},\\
&W(\lambda;z)=w_2\cdot e^{-\gamma_1 z}, \quad w_2=\frac{-2}{\gamma_1+\gamma_2\cdot(\sigma_1/\sigma_2)},\\
&\gamma_k^2=\lambda^2-i\omega\mu_0\sigma_k, \quad k=1,2
\end{aligned} \tag{35}$$

Таким же образом возможно осуществить построение и вычисление полей произвольной системы точечных источников в различных моделях задач морских магнитотеллурических зондирований.

Литература

1. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Трехмерные модели морских магнитотеллурических зондирований неоднородных сред. // Сборник работ «Прикладная математика и информатика», Изд-во «МАКС-Пресс», М., 2007, № 27, с.46-53.

2. Дмитриев В.И., Силкин А.Н., Фарзан Р. Тензорная функция Грина для системы уравнений Максвелла в слоистой среде // Сборник работ «Прикладная математика и информатика», Изд-во «МАКС-Пресс», М., 2001, № 7, с.5-18.

3. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. М. «Наука», 1978.