

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МОРСКИХ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКИХ ЗОНДИРОВАНИЙ*

Естественное электромагнитное поле Земли (магнитотеллурическое поле) активно используется как для разведки полезных ископаемых, так и для исследования глубинного строения Земли. В настоящее время магнитотеллурическое зондирование (МТЗ) начало применяться и для исследования шельфовой зоны с целью поиска месторождений нефти и газа. В этом случае измерения поля проводятся на дне моря (или вблизи дна моря).

Постановка задачи

Так как мы хотим промоделировать характерные особенности МТЗ при измерениях на морском дне, то мы ограничимся двумерными задачами, когда $\frac{\partial}{\partial x} \equiv 0$. В этом случае электромагнитное поле распадается на две независимые поляризации:

Е-поляризованное поле $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$, $\vec{H} = (0, H_y, H_z)$,

$$H_y = -\frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z}; \quad H_z = \frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial y}; \quad \mu = \text{const};$$

$$\Delta E_x + k^2 E_x = -i\omega\mu j_x^0, \quad k^2 = i\omega\mu\sigma. \quad (1)$$

H-поляризованное поле $\vec{E} = (0, E_y, E_z)$, $\vec{H} = (H_x, 0, 0)$;

$$H_x = \frac{i}{\omega\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right);$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k^2 E_y - \frac{\partial^2 E_z}{\partial y \partial z} = -i\omega\mu j_y^0 \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k^2 E_z - \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial z} = -i\omega\mu j_z^0 \end{cases} \quad (2)$$

Источники магнитотеллурического поля находятся в ионосфере на большом расстоянии от области исследования поля, поэтому считается,

* Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований (проекты №07-05-00523 и №08-01-00189).

что первичное поле в этой области можно приблизить плоской волной, нормально падающей на земную поверхность. В качестве исследуемой модели выберем плоскостойкую среду с проводимостью $\sigma_N(z)$ с локальным двумерным включением проводимости $\sigma_N(y, z)$, $M(y, z) \in S$. Тогда поля можно представить в виде суммы нормального и аномального полей:

$$\bar{E} = \bar{E}^N + E^a; \quad \bar{H} = \bar{H}^N + \bar{H}^a. \quad (3)$$

Нормальные поля \bar{E}^N и \bar{H}^N — это поля плоской волны в слоистой среде соответствующей поляризации. Аномальные электрические поля являются решениями следующих задач:

При Е-поляризации

$$\Delta E_x^a + k_N^2(z)E_x^a = (k_N^2(z) - k^2(M))E_x^a, \quad (4)$$

E_x и $\frac{\partial E_x}{\partial n}$ непрерывны на границах разрыва σ , \bar{n} — нормаль к границе, $k_N^2(z) = i\omega\mu\sigma_N(z)$, $\sigma_N(z)$ — нормальное распределение электропроводности в слоистой среде. На бесконечности E_x^a удовлетворяет условию излучения.

При Н-поляризации

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_y^a}{\partial z^2} + k_N^2(z)E_y^a - \frac{\partial^2 E_z^a}{\partial y \partial z} = (k_N^2(z) - k^2(M))E_y^a, \\ \frac{\partial^2 E_z^a}{\partial y^2} + k_N^2(z)E_z^a - \frac{\partial^2 E_y^a}{\partial y \partial z} = (k_N^2(z) - k^2(M))E_z^a. \end{cases} \quad (5)$$

E_τ и $\frac{\partial E_\tau}{\partial n}$ непрерывны на границах разрыва σ , τ — касательная к границе. На бесконечности E_y^a и E_z^a удовлетворяет условию излучения.

От дифференциальной задачи легко перейти к интегральным уравнениям для E_x и для E_y и E_z . В двумерном случае тензор Грина имеет специальный вид [1]:

$$\hat{G}(M, M_0) = \begin{pmatrix} G_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & G_{yy} & G_{yz} \\ 0 & G_{zy} & G_{zz} \end{pmatrix} \quad (6)$$

В этом случае интегральные представления имеют вид:

При Е-поляризации

$$E_x(y, z) = E_x^N(y, z) + \int_S G_{xx}(y - y^0, z, z^0) j_x(y^0, z^0) dy^0 dz^0. \quad (7)$$

При Н-поляризации

$$E_y(y, z) = E_y^N(y, z) + \int_S (G_{yy}(y - y^0, z, z^0) j_y(y^0, z^0) + G_{yz}(y - y^0, z, z^0) j_z(y^0, z^0)) dy^0 dz^0, \quad (8)$$

$$E_z(y, z) = E_z^N(y, z) + \int_S (G_{zy}(y - y^0, z, z^0) j_y(y^0, z^0) + G_{zz}(y - y^0, z, z^0) j_z(y^0, z^0)) dy^0 dz^0, \quad (9)$$

где $\bar{j} = (\sigma - \sigma_N) \bar{E}$. Если в (7-9) точка $M(y, z) \in S$, то получаем интегральные уравнения, из которых определяем $\bar{E}(y, z)$ в S . Зная $\bar{E}(y, z)$ при $M(y, z) \in S$ по (7-9) можно вычислить $\bar{E}(y, z)$ в любой точке.

Обычно интегральные уравнения (7-9) решаются блочным методом [2-3]. Для этого область S разбивают на подобласти $S_p, p \in [1, P]$, в которых предполагают, что

$$\bar{E}(y, z) \approx \bar{E}^{(m)} = const \text{ при } M(y, z) \in S_m. \quad (10)$$

Тогда интегральное уравнение (7) можно записать в виде:

$$E_x^{(m)} = E_x^{Nm} + \sum_{p=1}^P E_x^{(p)} \int_{S_p} (\sigma - \sigma_N) G_{xx}(y_m - y^0, z_m, z^0) dy^0 dz^0, \quad (11)$$

где $M(y_m, z_m)$ – центральная точка области S_m . Определив из (11) $E_x^m, m \in [1, P]$, легко вычислить электрическое поле в точке измерения $M_s(y^{(s)}, z^{(s)})$:

$$E_x(y^{(s)}, z^{(s)}) = E_x^N(z^{(s)}) + \sum_{p=1}^P E_x^{(p)} \int_{S_p} (\sigma - \sigma_N) G_{xx}(y^{(s)} - y^0, z^{(s)}, z^0) dy^0 dz^0 \quad (12)$$

Этот метод обладает определенным недостатком. Дело в том, что для выполнения условий (10) необходимо, чтобы линейный размер l_m подобласти S_m удовлетворял требованиям:

$$k_m l_m \ll 1; l_m \ll l_0, \quad (13)$$

где k_m – волновое число в подобласти S_m, l_0 – характерная длина существенного изменения электрического поля. Это означает, что на высоких частотах необходимо выбирать подобласти малой величины, что приводит к алгебраическим системам большой размерности.

Метод интегральных токов

Возможен другой подход [4] с использованием интегральных токов. Пусть расстояние от центра подобласти до точки измерения много больше линейных размеров подобласти. Тогда выражение (7) можно записать в виде:

$$E_x(y^{(s)}, z^{(s)}) = E_x^N + \sum_{p=1}^P I_x^{(p)} G_{xx}(y^{(s)} - y^{(p)}, z^{(s)}, z^{(p)}), \quad (14)$$

где $I_x^{(p)}$ – интегральный ток в подобласти S_p , равный

$$I_x^{(p)} = \int_{S_p} j_x(y^0, z^0) dy^0 dz^0. \quad (15)$$

Выражение (14) существенно отличается от (12). Для использования (14) необходимо написать уравнение для интегрального тока. Для этого умножим уравнение (7) на $(\sigma - \sigma_N)$ и проинтегрируем по области S_m .

Тогда получим

$$I_x^{(m)} = I_x^{0m} + \sum_{p=1}^P \int_{S_p} j_x(y^0, z^0) dy^0 dz^0 \int_{S_m} G_{xx}(y - y^0, z, z^0) (\sigma - \sigma_N) dy dz, \quad (16)$$

где

$$I_x^{0m} = \int_{S_m} E_x^N(y, z) (\sigma - \sigma_N) dy dz. \quad (17)$$

Можно считать, что усредненная функция Грина G_{xx} по подобласти S_m слабо зависит от $M_0(y^0, z^0) \in S_p$, и поэтому (16) можно записать в виде:

$$I_x^{(m)} = I_x^{0m} + \sum_{p=1}^P \alpha_{mp} I_x^{(p)}, \quad (18)$$

где

$$\alpha_{mp} = \int_{S_m} G_{xx}(y - y^{(p)}, z, z^{(p)}) (\sigma - \sigma_N) dy dz. \quad (19)$$

Таким образом, мы получили алгебраическую систему для определения интегральных токов.

Метод интегральных токов достаточно эффективен, но содержит условие о том, что точка измерения поля должна быть удалена на расстояние много больше размеров подобласти. Обычно при расчете поля для глубинных аномалий это условие легко выполняется. Однако при расчете поля от приповерхностных неоднородностей для выполнения этого условия требуется брать очень малые подобласти.

Метод интегральных токов можно модернизировать, убрав требование о том, что точка измерения поля находится достаточно далеко от неоднородности. Прежде всего отметим, что уравнение для интегральных токов (18) не зависит от точки наблюдения, поэтому (18) всегда дает правильный интегральный ток. Следовательно, необходимо исправить формулу (14) пересчета поля в точку $M_s(y^{(s)}, z^{(s)})$.

Для этого рассмотрим выражение (7) и запишем его в виде:

$$E_x(y, z) = E_x^N(y, z) + \sum_{p=1}^P \int_{S_p} G_{xx}(y - y^0, z, z^0) j_x(y^0, z^0) dy^0 dz^0.$$

Если известен интегральный ток $I_x^{(p)}$, то можно считать, что в среднем

$$j_x(y^0, z^0) \approx \frac{I_x^{(p)}}{S_p} \text{ при } M_0(y^0, z^0) \in S_p.$$

Тогда формула пересчета будет иметь следующий вид:

$$E_x(y, z) = E_x^N(y, z) + \sum_{p=1}^P I_x^{(p)} \frac{1}{S_p} \int_{S_p} G_{xx}(y - y^0, z, z^0) dy^0 dz^0. \quad (20)$$

Таким образом, (18) и (20) определяют модифицированный метод интегральных токов, позволяющий брать достаточно небольшое число подобластей, что существенно сокращает время счета при численной реализации задачи.

Описанный метод легко переносится на задачу для Н-поляризованного поля и на трехмерный случай. На основе этого метода создана система математического моделирования магнитотеллурического зондирования двумерной неоднородной среды. При этом различные характеристики магнитотеллурического поля рассчитываются как на земной поверхности, так и вблизи дна моря в случае морских зондирований.

Анализ эффективности метода интегральных токов

Численный анализ эффективности модернизированного метода интегральных токов был проведен для случая Н-поляризованного поля для модели слоистой среды с двумерной неоднородностью, расположенной во втором слое. Все параметры модели зафиксированы кроме глубины H залегания неоднородного включения (рис. 1).

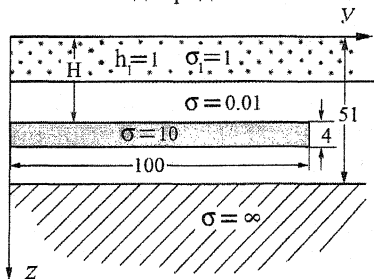


Рис. 1

Эта модель может быть использована при анализе морских зондирований. Измерения магнитотеллурического поля проводятся на дне моря при $z = h_1 = 1$.

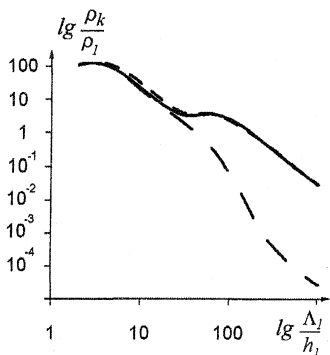


Рис. 2. Кривые кажущегося сопротивления, рассчитанные при $N_y = 5, N_z = 2$

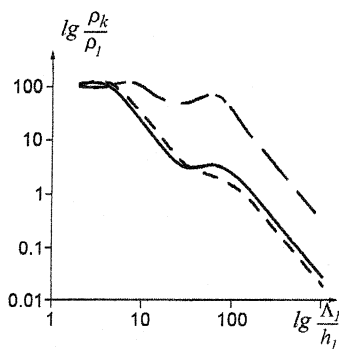


Рис. 3. Кривые кажущегося сопротивления, рассчитанные при $N_y = 2, N_z = 1$

На рис.2 приведены результаты расчетов кажущегося сопротивления

$$\frac{\rho_k}{\rho_1} = \frac{1}{\omega \mu \rho_1} \frac{E_y^2}{H_x^2} \quad (21)$$

в зависимости от $\frac{\Lambda_1}{h_1} = \frac{2\pi}{h_1 \operatorname{Re} k_1}$ над центром неоднородности. Кривые построены в билгарифмическом масштабе для случая $H = 6$ и числа разбиений неоднородности по y ($N_y = 5$), по z ($N_z = 2$). На рисунке приведены: точная кривая (сплошная линия), кривая, полученная модернизированным методом интегральных токов (пунктир), и кривая, полученная обычным методом интегральных токов (крупный пунктир). Легко видеть, что результаты, полученные по модернизированному методу интегральных токов, практически совпадают с точным решением, а результаты, полученные обычным методом интегральных токов, на низких частотах существенно отличаются от точной кривой. На рис.3 приведены аналогичные результаты для разбиения неоднородности: $N_y = 2, N_z = 1$. Видно, что даже при таком малом разбиении на подобласти модернизированный метод интегральных токов дает результаты, близкие к точному решению. Обычный метод интегральных

токов дает очень плохой результат. Совпадение результатов для двух модификаций метода интегральных токов получается при разбиении $N_y \geq 10, N_z \geq 2$. Если глубина погружения неоднородности уменьшается, то число разбиений увеличивается, но всегда модифицированный метод требует существенно меньшего числа разбиений. На основе проведенных аналогичных многочисленных сравнений двух методов, можно утверждать, что модифицированный метод интегральных токов позволяет в двумерном случае уменьшить число разбиений на порядок, в трехмерном случае на два порядка. Малое число разбиений области на подобласти существенно уменьшает время расчета, что особенно важно при решении обратных задач.

Моделирование морских МТЗ

С помощью модернизированного метода интегральных токов было проведено большое число расчетов морских магнитотеллурических зондирований. При этом проводились вычисления как кажущегося сопротивления (21), так и магнитного параметра

$$M = \frac{10^3}{H_x} \frac{\partial H_x}{\partial y}. \quad (22)$$

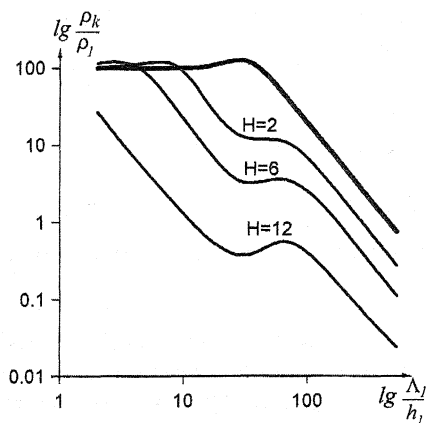


Рис.4. Частотные кривые кажущегося сопротивления для различных значений глубины погружения неоднородности

На рис.4 приведены частотные кривые кажущегося сопротивления $\frac{\rho_k}{\rho_1}$, рассчитанные для модели на рис.1 над центром неоднородности, при

различных значениях глубины погружения неоднородности. Толстой линией приведена кривая кажущегося сопротивления для среды без неоднородности, кривые оцифрованы по параметру H . Видно, что неоднородность оказывает влияние на поведение кривой кажущегося сопротивления почти во всем частотном диапазоне. Кривые сильно зависят от глубины залегания неоднородности, что делает эти кривые информативными относительно этого параметра.

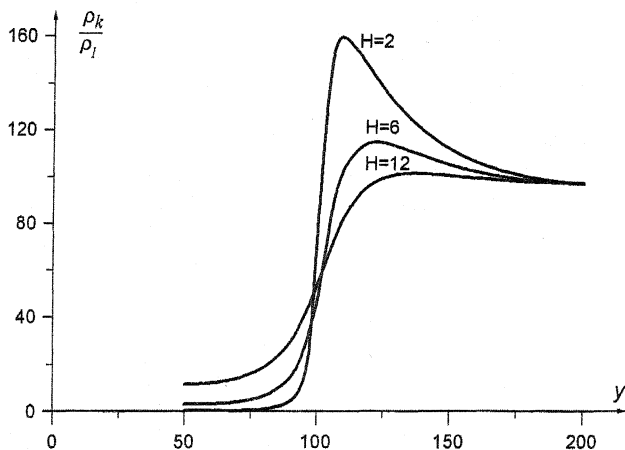


Рис.5. Профильные кривые кажущегося сопротивления для различных значений глубины погружения неоднородности

На рис.5 приведены профильные кривые кажущегося сопротивления, построенные при $\frac{\Lambda_1}{h_1} = 40$. Как и ранее, кривые оцифрованы по параметру H . На этих кривых четко проявляется граница неоднородности, где кривые достигают максимального значения. Можно сказать, что профильная кривая кажущегося сопротивления “оконтуривает” неоднородность, причем, чем выше расположена неоднородность, тем максимум более резко выражен. Такое поведение профильных кривых кажущегося сопротивления делает их информативными относительно наличия и расположения неоднородного включения.

На рис.6 и рис.7 приведены соответственно частотные и профильные кривые модуля магнитного параметра, определенной формулой (22). Частотные кривые модуля магнитного параметра (рис.6), как и кривые кажущегося сопротивления, построены в билогарифмическом масштабе, профильные кривые построены при

$\frac{\Lambda_1}{h_1} = 40$ и $z^{(s)} = 100$ (над краем неоднородности), все кривые оцифрованы по параметру H .

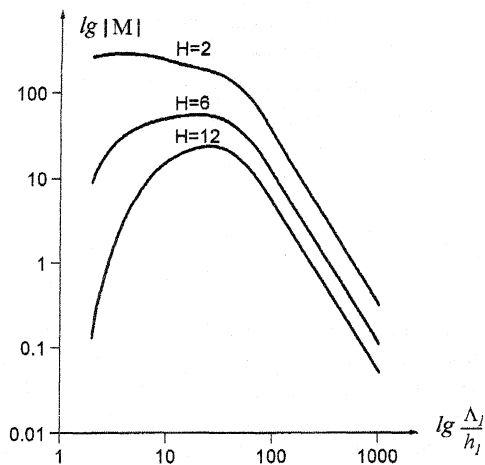


Рис.6. Частотные кривые модуля магнитного параметра для различных значений глубины погружения неоднородности

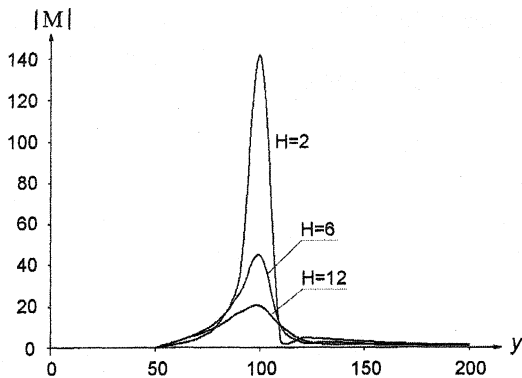


Рис.7. Профильные кривые модуля магнитного параметра для различных значений глубины погружения неоднородности

Как видно из рис.6, частотные кривые модуля магнитного параметра также сильно зависят от глубины залегания неоднородности. Профильная кривая модуля магнитного параметра (рис.7) аналогично профильной кривой кажущегося сопротивления имеет четко выраженный максимум над границей неоднородности, причем величина максимума зависит от глубины залегания неоднородности.

Анализ поведения кривых кажущегося сопротивления и магнитного параметра, измеренных на дне моря, позволяет судить о наличии неоднородного проводящего включения и определить его параметры.

Литература

1. Дмитриев В.И., Белкин П.С., Мерщикова Н.А. Метод интегральных уравнений в моделировании двумерных задач геоэлектрики. Прикладная математика и информатика №18, МАКС Пресс, 2004, 5-16.
2. Дмитриев В.И., Фарзан Р.Х. Об алгебраизации интегральных уравнений математической физики. Вестник Моск. ун-та сер.15 Вычислительная математика и кибернетика №1,1989, 9-15.
3. Дмитриев В.И., Позднякова Е.Е. Метод и алгоритм расчета электромагнитного поля в слоистой среде с локальной неоднородностью в произвольном слое. В кн. Методы математического моделирования и вычислительной диагностики, Изд-во Моск. ун-та, 1990, 133-142.
4. Michel S. Zhdanov, Vladimir I. Dmitriev, and Alexander V. Gribenko. Integral Electric Current Method in 3-D Electromagnetic Modeling for Large Conductivity Contrast. IEEE Transaction on Geoscience and remote sensing. 2007, Vol. 45, Num.5. P. 1282-1290.