В.И. Дмитриев, И.С. Барашков

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ РАСЧЁТА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Введение

В прикладной электродинамике часто необходимо проводить математическое моделирование электромагнитных полей в проводящих неоднородных средах. Одной из наиболее значимых проблем является построение методов решения прямых и обратных задач электромагнитного зондирования неоднородной среды с целью определения её строения. В частности, такие задачи лежат в основе теории электроразведки, электрокаротажа и электромагнитных методов глубинного исследования Земли. В этом случае фундаментальной моделью строения среды является неоднородная область V_H с произвольным изменением неоднородной электропроводности $\sigma_H(M)$, расположенная в слоистой среде $\sigma_C(z)$ (электропроводность изменяется только с глубиной). Такие задачи часто решаются с помощью интегральных уравнений. Метод интегральных уравнений показал свою высокую эффективность. Однако при вычислениях полей в проводящих средах при низких частотах расчеты показали, что с уменьшением частоты необходимо пропорционально уменьшать шаг сетки, на которой интегральное уравнение сводится к алгебраической системе. Причём это явление проявляется в случае контрастных проводящих сред, когда проводящая неоднородность находится в плохо проводящей среде.

Анализ интегрального уравнения в этом случае в работе [1] показал, что это происходит из-за поведения тензорной функции Грина для уравнения Максвелла для слоистой контрастной среды. В слое с малой электропроводностью необходимо аппроксимировать ядро уравнения с более высокой точностью, что приводит к уменьшению шага сетки. Численному анализу этого явления и посвящена настоящая статья. В статье также показана эффективность борьбы с этим явлением с помощью метода повышения фоновой проводимости.

Эффект контрастности среды наиболее сильно проявляется в случае *H*-поляризованного двумерного электромагнитного поля в неоднородной среде. Поэтому численный эксперимент проводится именно для этого случая.

1. Постановка задачи для H – поляризованного поля в слоистой среде

Рассмотрим двумерную проводящую среду (рис. 1), в которой зона неоднородности V_H с электропроводностью σ_H находится в трёхслойной горизонтально однородной слоистой среде. Причём второй слой, в котором находится неоднородность, имеет проводимость

$$\sigma_2 \ll \sigma_1 \quad \text{и} \quad \sigma_2 \ll \sigma_H.$$

Для этой среды будем решать задачу расчёта электромагнитного поля возбуждаемого плоской волной, вертикально падающей на земную поверхность. Задача с таким возбуждением поля называется задачей магнитотеллурического зондирования (МТЗ).

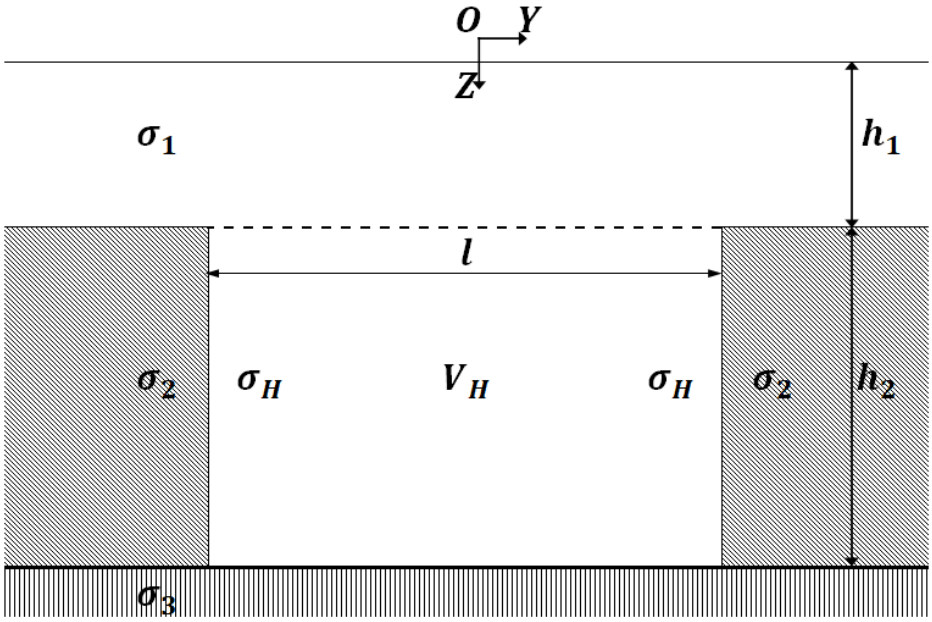

Рис.1. Стандартная модель строения неоднородной среды.

В двумерном случае электромагнитное поле распадается на две независимых поляризации. Пусть среда и источники поля не зависят от координаты x. Тогда в уравнениях Максвелла

$$\begin{cases} rot\,H = \sigma E, \\ rot\,E = i\omega\mu H \end{cases} \tag{1}$$

положим

$$\frac{\partial}{\partial x} \equiv 0 \tag{2}$$

и получим:

1. E – поляризованное поле $E = (E_x, 0, 0)$, $H = (0, H_y, H_z)$:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \sigma E_x, \tag{3}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = i\omega\mu H_y \ , \qquad \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega\mu H_z \, . \tag{4}$$

2. H – поляризованное поле $E = (0, E_y, E_z)$, $H = (H_x, 0, 0)$:

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \sigma E_y \ , \tag{5}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} = -\sigma E_z \, , \tag{6}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega\mu\, H_x \, . \tag{7}$$

Подробно рассмотрим случай H–поляризации, когда

$$\frac{\partial}{\partial x} \equiv 0 \, , \qquad E_x = 0 \, ,$$

$$H = (H_x, 0, 0) \, , \qquad E = (0, E_y, E_z) \, .$$

Из уравнения (7) найдём H_x:

$$H_x = \frac{1}{i\omega\mu}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right). \tag{8}$$

Это выражение для H_x подставим в уравнения (5) и (6). Тогда при $z > 0$ получим систему уравнений для электрического поля

$$E_y = E_y(y,z) \, , \qquad E_z = E_z(y,z) \, .$$

Система имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) = i\omega\mu\sigma E_y \ , \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) = -i\omega\mu\sigma E_z \tag{10}$$

с краевыми условиями в задаче магнитотеллурического зондирования (МТЗ), в которой поле возбуждается плоской волной, вертикально падающей на земную поверхность

$$E_z(y,z)\Big|_{z=0} = 0 \, , \qquad E_z(y,z)\Big|_{z=\infty} = 0, \qquad E_z(y,z)\Big|_{y=\pm\infty} = 0, \tag{11}$$

$$H_x\Big|_{z=0} = \frac{1}{i\omega\mu}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\Big|_{z=0} = -\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial E_y}{\partial z}\Big|_{z=0} = 1, \tag{12}$$

$$E_y(y,z)\Big|_{z=\infty}=0, \qquad E_y(y,z)\Big|_{y=\pm\infty}=E_y^0(z) \tag{13}$$

и условиями непрерывности тангенциальных компонент поля на границах разрыва проводимости $\sigma(y,z)$

$$\lfloor E_y \rfloor = 0 \tag{14}$$

на горизонтальных границах разрыва проводимости $\sigma(y,z)$,

$$[E_z]=0 \tag{15}$$

на вертикальных границах разрыва проводимости $\sigma(y,z)$, где $E_y^0(z)$ – поле в горизонтально однородной слоистой среде стандартной модели, а квадратными скобками обозначен разрыв функции.

В задаче требуется найти импеданс $Z(y,z=0)$ на поверхности земли

$$Z(y,z=0)=\frac{E_y(y,z=0)}{H_x(y,z=0)}. \tag{16}$$

Согласно граничному условию нормировки (12) на поверхности земли для магнитного поля H_x при вычислении импеданса Z на поверхности земли достаточно знать только горизонтальную компоненту электрического поля E_y.

Система интегральных уравнений для решения задачи (9)-(15) в случае H – поляризации по конечной прямоугольной области V_H получена в работе [4] и имеет вид:

$$E_y(M)-\int_{V_H}\left\{G_{yy}\left[\sigma_H(M^0)-\sigma_2(M^0)\right]E_y(M^0)+G_{yz}\left[\sigma_H(M^0)-\sigma_2(M^0)\right]E_z(M^0)\right\}ds_{M^0}=$$

$$=E_y^0(z), \tag{17}$$

$$E_z(M)-\int_{V_H}\left\{G_{zy}\left[\sigma_H(M^0)-\sigma_2(M^0)\right]E_y(M^0)+G_{zz}\left[\sigma_H(M^0)-\sigma_2(M^0)\right]E_z(M^0)\right\}ds_{M^0}=$$

$$=0, \tag{18}$$

где

$$G_{yy}\left(y-y^0,z,z^0\right),\ G_{yz}\left(y-y^0,z,z^0\right),\ G_{zy}\left(y-y^0,z,z^0\right),\ G_{zz}\left(y-y^0,z,z^0\right)$$

являются компонентами двумерного тензора Грина для горизонтально однородной слоистой среды стандартной модели с проводимостью

$$\sigma_C(z)=\begin{cases}\sigma_1(z) & при \quad 0<z<h_1,\\ \sigma_2 & при \quad h_1<z<h_1+h_2,\\ \sigma_3(z) & при \quad z>h_1+h_2,\end{cases} \tag{19}$$

а

$$E_y^0(z)=\frac{1}{\sigma_C(z)}\frac{\partial H_x^0(z)}{\partial z} \tag{20}$$

является одномерным нормальным электрическим полем в стандартной горизонтально однородной слоистой среде с этой проводимостью, нормированным таким образом, что соответствующее одномерное магнитное поле равно единице на поверхности земли

$$H_x^0(z)\Big|_{z=0} = 1. \tag{22}$$

Компоненты двумерного тензора Грина для случая H – поляризации построены в работе [4].

2. Описание метода повышения фоновой проводимости

В работе [1] предлагается следующий подход, позволяющий не уменьшать шаг сетки при понижении частоты поля. На рис. 1 показана стандартная модель строения неоднородной среды с неоднородностью в области V_H ширины l, которая имеет проводимость $\sigma_H(M) = \sigma_1$.

Согласно предложенному методу надо провести расширение модели неоднородности до ширины L с увеличением электропроводности слоя на расстоянии $0{,}5(L-l)$ от неоднородности.

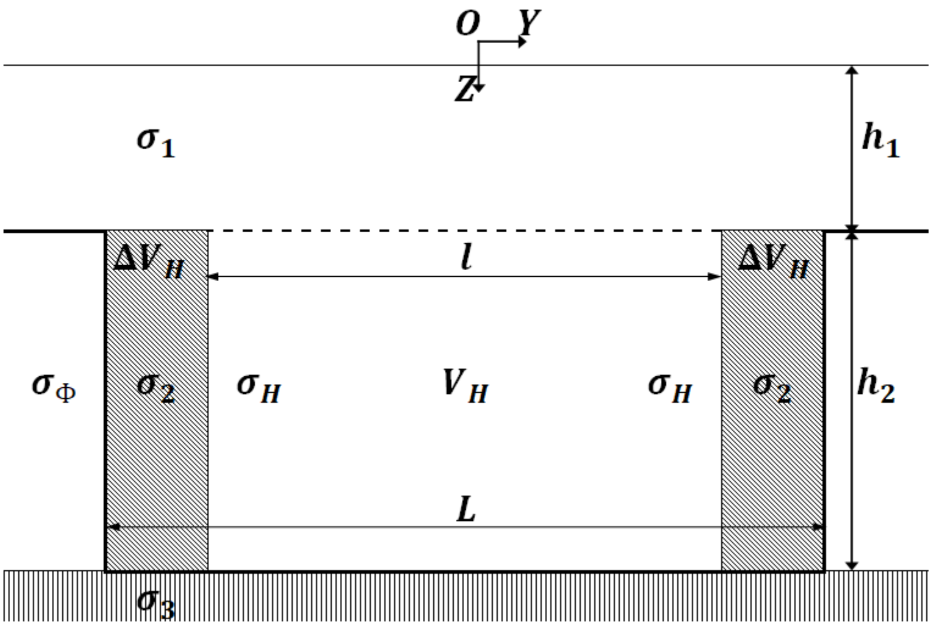

Рис. 2. Расширенная модель неоднородной зоны с повышением фоновой проводимости

Такая расширенная модель неоднородной зоны с повышением фоновой проводимости показана на рисунке 2. В этой модели зона неоднородности V_H увеличена на ΔV_H. Эта дополнительная область окружает область V_H, а её проводимость равна σ_C . Вне этой расширенной области

$V_H + \Delta V_H$ проводимость слоя, в котором находится $V_H + \Delta V_H$, равна фоновой $\sigma_\Phi >> \sigma_C$. Ясно, что всегда существует такое расширение области неоднородности ΔV_H, что наличие фоновой неоднородности практически не сказывается на результат моделирования поля в окрестности зоны V_H. Размер расширения зависит от частоты поля. Его можно определить с помощью следующего подхода. Наличие σ_Φ не должно практически влиять на нормальное поле в области V_H.

Рассмотрим расширенную область

$$S = \{-L/2 < y < L/2, \quad h_1 < z < h_1 + h_H\}. \tag{23}$$

Доопределим функцию $\sigma_H(M)$ на всю расширенную область S и эту доопределённую функцию будем обозначать через $\tilde{\sigma}_H(M)$:

$$\tilde{\sigma}_H(M) = \begin{cases} \sigma_H(M) & \textit{при} \quad |y| < l/2, \\ \sigma_2 & \textit{при} \quad l/2 < |y| < L/2. \end{cases} \tag{24}$$

Система интегральных уравнений в случае H–поляризации по конечной расширенной прямоугольной области S имеет вид:

$$E_y(M) - \int_S \left\{ \tilde{G}_{yy}\left[\tilde{\sigma}_H(M^0) - \sigma_\Phi(M^0)\right]E_y(M^0) + \tilde{G}_{yz}\left[\tilde{\sigma}_H(M^0) - \sigma_\Phi(M^0)\right]E_z(M^0)\right\} ds_{M^0} =$$

$$= E_y^\Phi(z), \tag{25}$$

$$E_z(M) - \int_S \left\{ \tilde{G}_{zy}\left[\tilde{\sigma}_H(M^0) - \sigma_\Phi(M^0)\right]E_y(M^0) + \tilde{G}_{zz}\left[\tilde{\sigma}_H(M^0) - \sigma_\Phi(M^0)\right]E_z(M^0)\right\} ds_{M^0} =$$

$$= 0, \tag{26}$$

где

$$\tilde{G}_{yy}(y - y^0, z, z^0),\ \tilde{G}_{yz}(y - y^0, z, z^0),\ \tilde{G}_{zy}(y - y^0, z, z^0),\ \tilde{G}_{zz}(y - y^0, z, z^0)$$

являются компонентами двумерного тензора Грина для фоновой горизонтально однородной слоистой среды с проводимостью

$$\tilde{\sigma}_\Phi(z) = \begin{cases} \sigma_1(z) & \textit{при} \quad 0 < z < h_1, \\ \sigma_\Phi & \textit{при} \quad h_1 < z < h_1 + h_2, \\ \sigma_3(z) & \textit{при} \quad z > h_1 + h_2, \end{cases} \tag{27}$$

а

$$E_y^\Phi(z) = \frac{1}{\tilde{\sigma}_\Phi(z)} \frac{\partial H_x^\Phi(z)}{\partial z} \tag{28}$$

является одномерным нормальным электрическим полем в фоновой горизонтально однородной слоистой среде с этой проводимостью, нормированным таким образом, что соответствующее одномерное магнитное поле равно единице на поверхности земли

$$H_x^\Phi(z)\Big|_{z=0} = 1. \tag{29}$$

Компоненты двумерного тензора Грина для случая H – поляризации построены в работе [4].

После того, как поле в неоднородности уже найдено, можно рассчитать поле вне неоднородности по формулам пересчёта:

$$E_y(M)=$$
$$=\int_S \left\{\widetilde{G}_{yy}\left[\widetilde{\sigma}_H(M^0)-\sigma_\Phi(M^0)\right]E_y(M^0)+\widetilde{G}_{yz}\left[\widetilde{\sigma}_H(M^0)-\sigma_\Phi(M^0)\right]E_z(M^0)\right\}ds_{M^0}+$$
$$+E_y^\Phi(z), \tag{30}$$

$$E_z(M)=$$
$$=\int_S \left\{\widetilde{G}_{zy}\left[\widetilde{\sigma}_H(M^0)-\sigma_\Phi(M^0)\right]E_y(M^0)+\widetilde{G}_{zz}\left[\widetilde{\sigma}_H(M^0)-\sigma_\Phi(M^0)\right]E_z(M^0)\right\}ds_{M^0}. \tag{31}$$

3. Результаты методических расчётов

На рисунке 3 показаны результаты методических расчётов модулей электрических полей на поверхности земли при $z = 0$ для двумерной задачи магнитотеллурического зондирования в случае H – поляризации над двумерной неоднородностью в виде грабена для трёхслойной среды методом интегральных уравнений с фоновым слоем с проводимостью

$$\sigma_\Phi / \sigma_1 = 0{,}8 \tag{32}$$

и конечно-разностным методом без введения фонового слоя. Пунктирной линией показано значение модуля одномерного нормального поля $E_y^0(z)$ на поверхности земли при $z = 0$ для одномерной среды стандартной исходной модели с проводимостью

$$\sigma_C(z)=\begin{cases}\sigma_1(z) & при \quad 0<z<h_1,\\ \sigma_2 & при \quad h_1<z<h_1+h_2,\\ \sigma_3(z) & при \quad z>h_1+h_2.\end{cases}$$

Параметры модели были выбраны следующим образом:

$$\sigma_2/\sigma_1=0{,}01; \qquad \sigma_3/\sigma_1=0{,}001; \qquad \sigma_H/\sigma_1=1;$$
$$h_2/h_1=1; \quad l/h_1=10; \quad L/h_1=20; \quad \lambda_1/h_1=32,$$

где λ_1 – длина волны в первом слое.

Расчёты показали, что введение фонового слоя очень мало влияет на поле над неоднородностью в виде грабена, которая расположена в области V_H.

На рисунке 4 показано поведение модуля горизонтальной компоненты электрического тока

$$J_y = \sigma E_y \tag{33}$$

в области S и выше, а на рисунке 5 показано поведение модуля вертикальной компоненты электрического тока

$$J_z = \sigma E_z \tag{34}$$

в области S и выше.

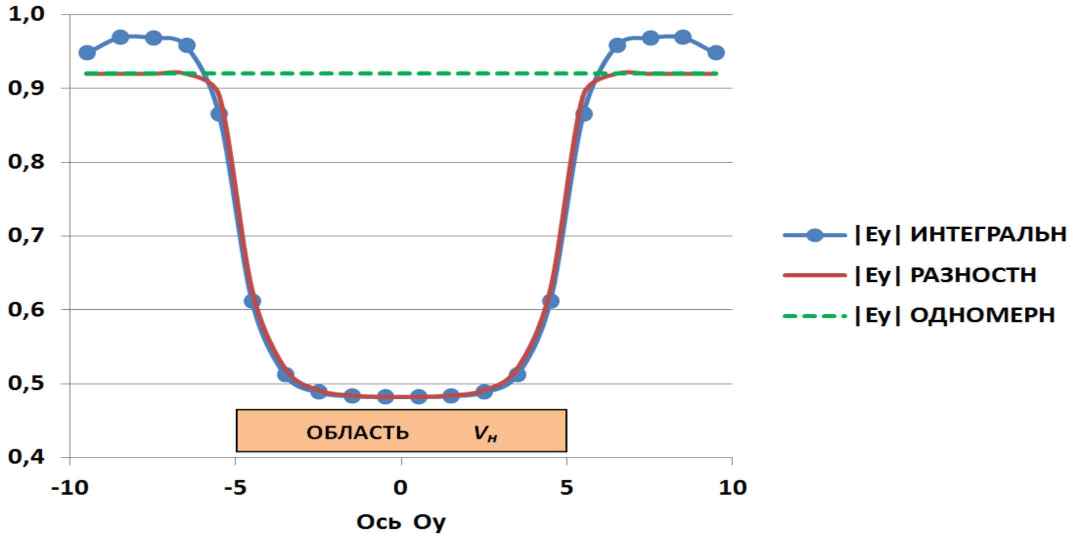

Рис.3. Сравнение модулей электрических полей над неоднородностью

Поверхности земли $z = 0$ соответствует та часть рисунка, где показана ось Y. Противоположная сторона рисунка соответствует глубине $z = 2$, на которой расположена нижняя граница неоднородной области S.

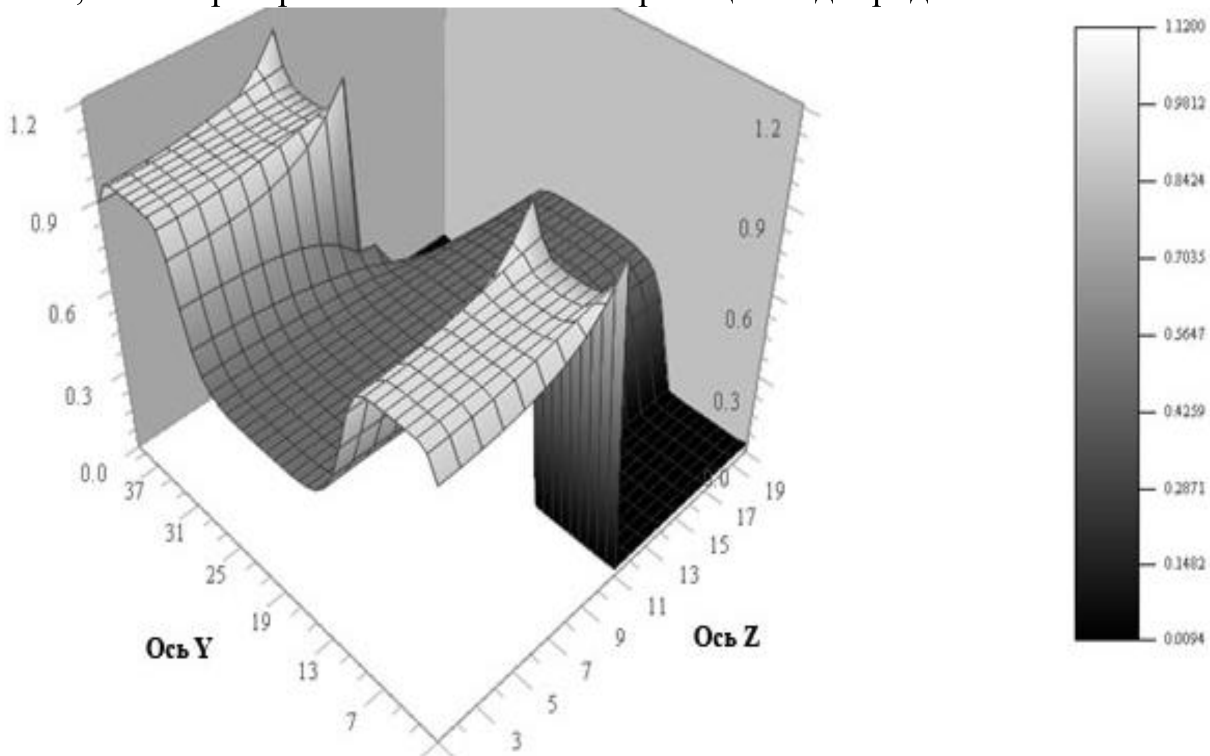

Рис. 4. Модуль горизонтальной компоненты электрического тока $|J_y|$ при $\sigma_\Phi / \sigma_1 = 0{,}8$

На средней глубине при $z = 1$ находится верхняя граница неоднородной области S. Центр неоднородной области S по горизонтали находится посередине отрезка, который на рисунке обозначен как ось Y.

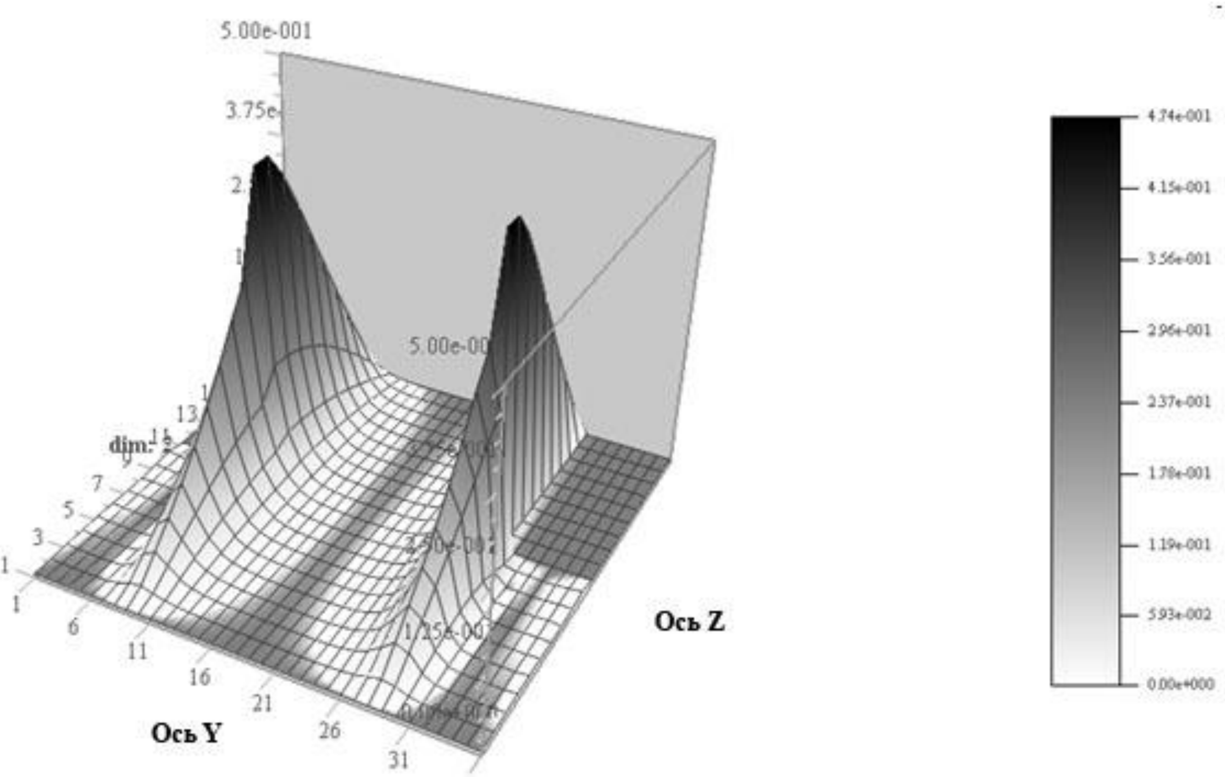

Рис. 5. Модуль вертикальной компоненты электрического тока $|J_z|$ при $\sigma_\Phi / \sigma_1 = 0{,}8$

Из рисунка 4 видно, что горизонтальный ток внутри неоднородности в области S, посчитанный из системы интегральных уравнений (25)-(26) и горизонтальный ток над неоднородностью выше области S, посчитанный по формуле пересчёта (30) хорошо состыковываются. На верхней границе области S при $z = 1$ не возникает какого-либо скачка функции $|J_y|$. Это соответствует физическому смыслу функции J_y и свидетельствует о правильности вычислений.

Из рисунка 5 видно, что ток, текущий в первом верхнем слое начинает заворачивать вниз в неоднородность уже при малой глубине z. Ниже этот ток складывается с током, который завернул вниз при несколько большей глубине z. Поэтому функция $|J_z|$ возрастает по z при $0 < z < 1$ над вертикальной боковой границе грабена. Попав внутрь грабена пришедший ток постепенно поворачивается и меняет направление на горизонтальное. Поэтому функция $|J_z|$ убывает по z при $1 < z < 2$. Это соответствует физическому смыслу функции J_z и свидетельствует о правильности вычислений.

Для случая *H*-поляризации хорошо известно, что электрическое поле слева и справа от неоднородности в стандартной исходной модели строения неоднородной среды, изображённой на рисунке 1, быстро выходит на одномерное нормальное поле $E_y^C(z)$ для одномерной среды стандартной исходной модели с проводимостью $\tilde{\sigma}_C(z)$.

На рисунке 3 быстрый выход на одномерное нормальное поле $E_y^C(z)$ наблюдается только для кривой, посчитанной по разностному методу. В разностном методе на левой и правой границе сетки задаётся краевое условие первого рода, в котором указываются точные значения поля $E_y^C(z)$, посчитанного из одномерной задачи. Этим и объясняется хорошая точность разностного метода на левой и правой границе среды.

Воспользуемся аналогичным приёмом для интегрального метода. Вместо слишком больших значений $|E_y|$ слева и справа от неоднородности возьмём значение $|E_y^C(0)|$, посчитанное из одномерной задачи. На рисунке 6 показан полученный подправленный и уточнённый результат.

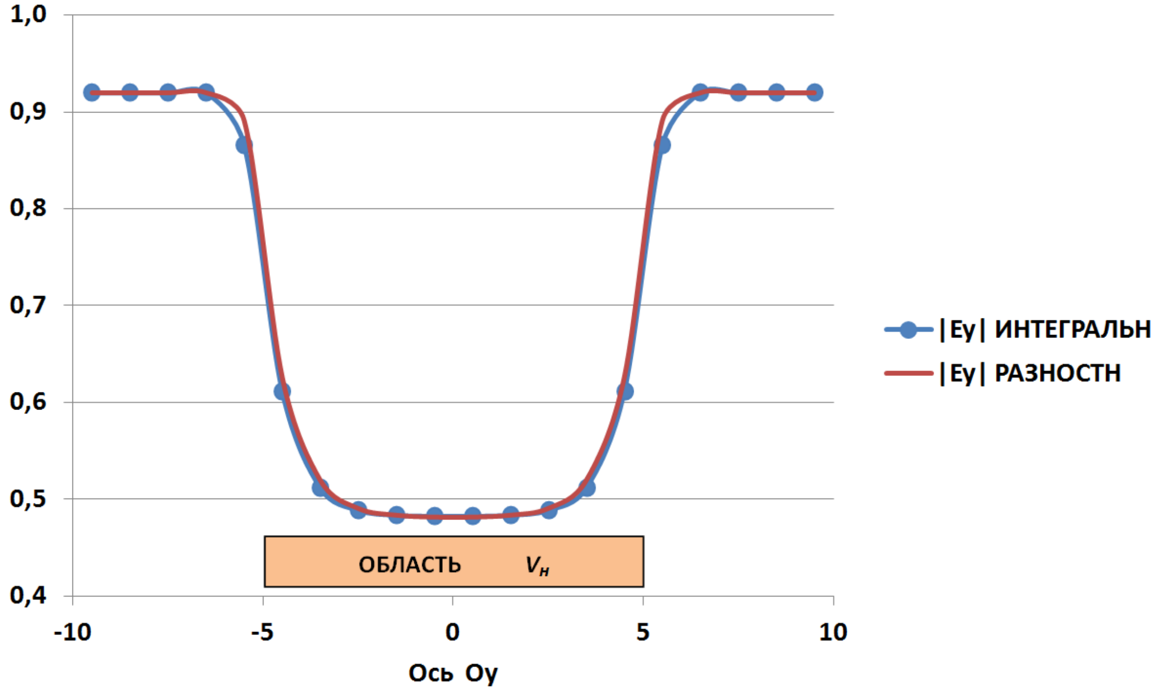

Рис.6. Сравнение модулей электрических полей над неоднородностью после уточнения.

Теперь результаты, посчитанные по разностной и по интегральной программе, практически полностью совпадают.

При уменьшении значения параметра σ_Φ результаты расчётов методом интегральных уравнений ухудшаются. На рисунках 7-9 приводятся результаты при $\sigma_\Phi / \sigma_1 = 0{,}38$.

На рисунке 7 показан модуль горизонтальной компоненты электрического поля $|E_y|$ на поверхности земли при $\sigma_\Phi / \sigma_1 = 0{,}8$ и при $\sigma_\Phi / \sigma_1 = 0{,}38$. При уменьшенном значении параметра $\sigma_\Phi / \sigma_1 = 0{,}38$ над областью неоднородности V_H получается волнистая кривая, которая проходит рядом с правильным графиком. Такой волнистый результат характерен для случая, когда задача решается неустойчиво.

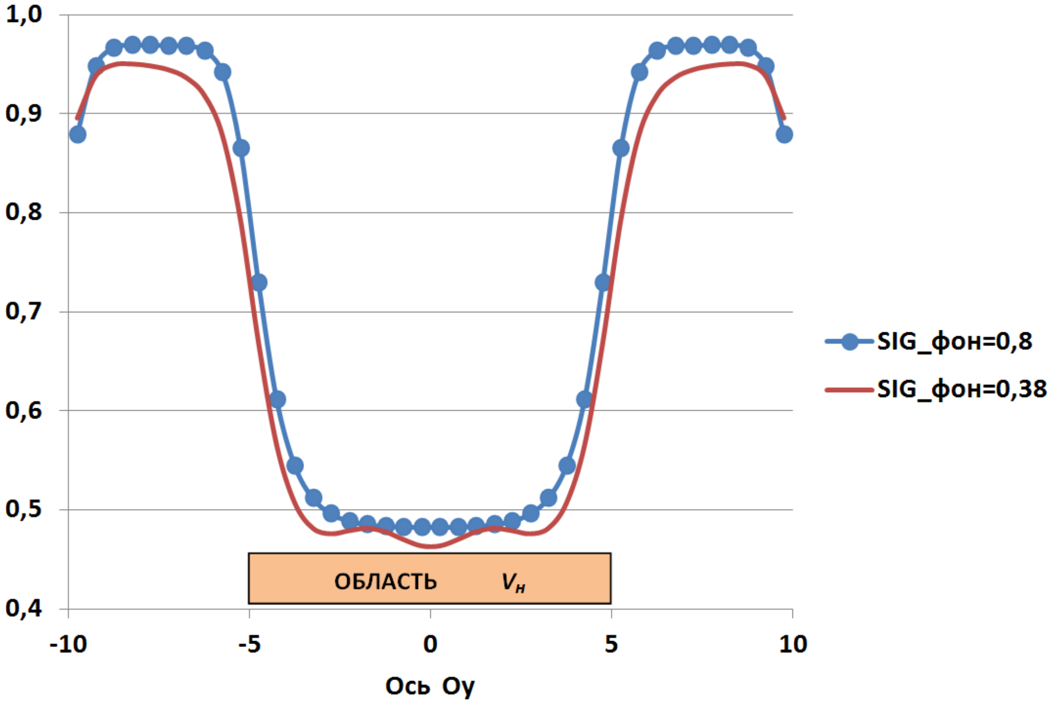

Рис. 7. Модуль горизонтальной компоненты электрического поля $|E_y|$ на поверхности земли при $\sigma_Ф/\sigma_1 = 0{,}8$ и при $\sigma_Ф/\sigma_1 = 0{,}38$

Ещё больше эффект неустойчивости с очень большой амплитудой волнистости виден на рисунках 8 и 9 в подобласти V_H области S, в которой решается система интегральных уравнений (25)-(26). При пересчёте поля на поверхность земли по формулам (30) и (31) с помощью интегрального оператора происходит некоторое сглаживание этой сильной волнистости. Поэтому на рисунке 7 уже наблюдается более плавное поведение кривой при $\sigma_Ф/\sigma_1 = 0{,}38$, которое маскирует и скрывает очень большой разброс значений для неустойчивого решении в подобласти V_H области S.

Поведение поля на рисунках 4 и 5 легко можно было объяснить геофизически. Для рисунков 8 и 9 это уже невозможно сделать. Сильную волнистость на рисунках 8 и 9 можно объяснить с помощью линейной алгебры. При $\sigma_Ф/\sigma_1 = 0{,}8$ матрица системы линейных алгебраических уравнений, к которой сводятся интегральные уравнения (25)-(26) является невырожденной. Поэтому система линейных алгебраических уравнений решается устойчиво.

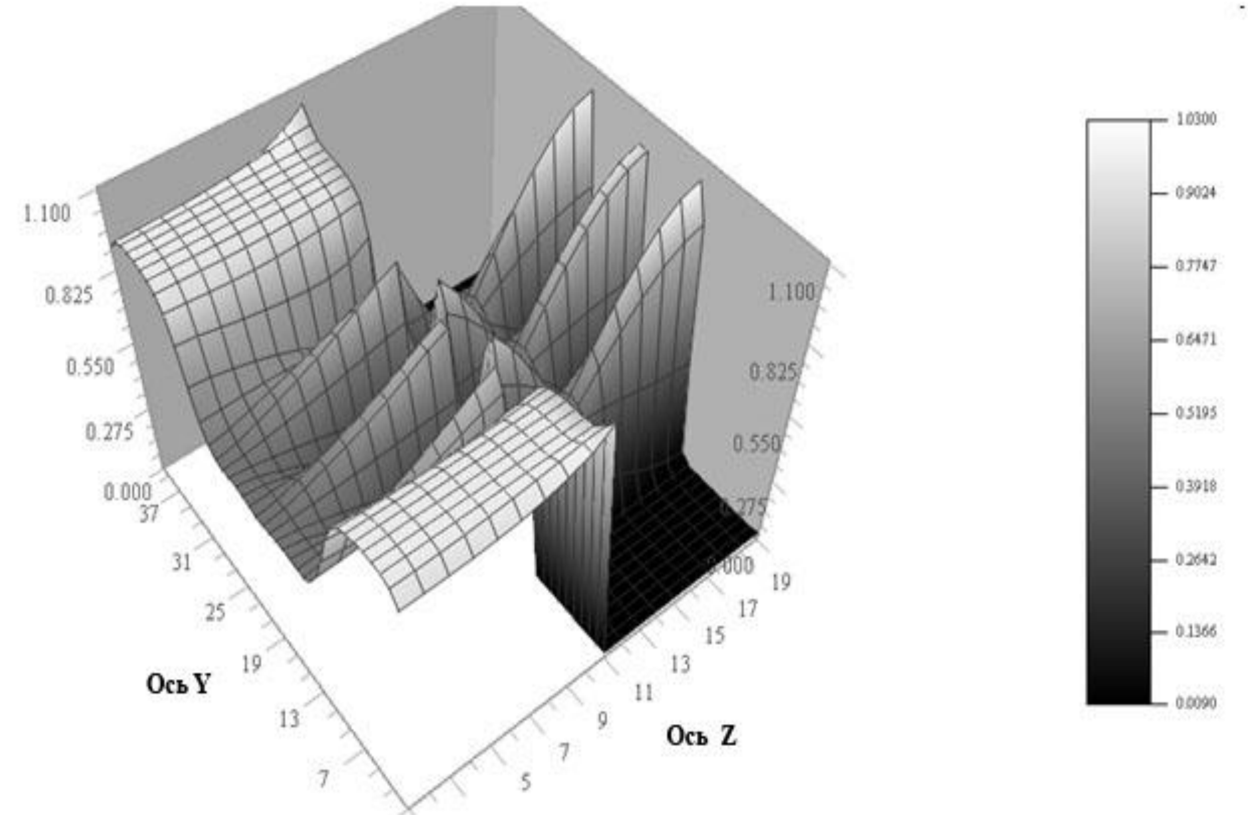

Рис. 8. Модуль горизонтальной компоненты электрического тока $|J_y|$ при $\sigma_\Phi / \sigma_1 = 0{,}38$

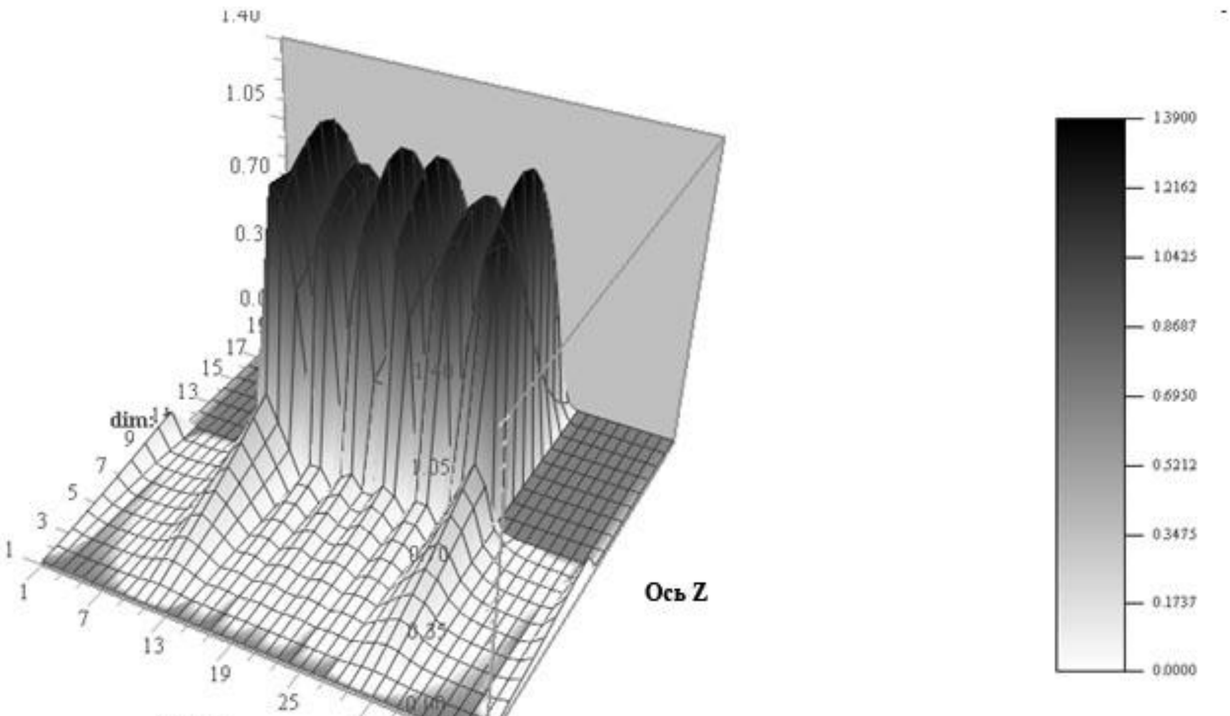

Рис. 9. Модуль вертикальной компоненты электрического тока $|J_z|$ при $\sigma_\Phi / \sigma_1 = 0{,}38$

При уменьшении фоновой проводимости до значения $\sigma_{\Phi} / \sigma_1 = 0{,}38$ утрачивается свойство невырожденности у матрицы системы линейных алгебраических уравнений. Она становится близкой к вырожденной. Такая система решается уже неустойчиво.

Таким образом, параметр σ_{Φ}, предложенный в работе [1], является актуальным параметром регуляризации, использование которого расширяет область применения метода интегральных уравнений.

Литература

1. *Дмитриев В.И.,* Об использовании метода интегральных уравнений в низкочастотной электродинамике неоднородных контрастных сред. Прикладная математика и информатика. Труды Прикладная математика и информатика. Выпуск № 54, 2017 год. Стр. 50 – 56.
2. *Дмитриев В.И., Захаров Е.В.* Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике.- М. МАКСПресс. 2008,-316с.
3. *Дмитриев В.И.* Морские электромагнитные зондирования. –М. АРГАМАК МЕДИА, 2004,-192с.
4. *Дмитриев В.И., Белкин П.С., Мерщикова Н.А*. Метод интегральных уравнений в моделировании двумерных задач геоэлектрики // Прикладная математика и информатика № 18, М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2004, с. 5-16.