

О восстановлении среды итерационно-асимптотическим методом

Введение

В современной геофизике для разведки полезных ископаемых и изучения глубинного строения Земли активно используется магнитотеллурическое зондирование. В этом методе исследования недр Земли измеряются естественные электромагнитные поля Земли, вызванные токами, протекающими в ионосфере. Экологическая чистота и безопасность магнитотеллурики выгодно отличает этот метод исследования от других геофизических методов, например, от сейсмических зондирований, требующих проведения довольно мощных взрывов. В то же время в магнитотеллурическом методе есть свои трудности, связанные с измерением информации и ее интерпретацией. При магнитотеллурических зондированиях измеряются естественные электромагнитные поля на поверхности Земли и уже на первом этапе обработки, как правило в полевых условиях, устанавливаются устойчивые линейные связи между компонентами магнитного и электрического полей – так называемый тензор импеданса $Z(\omega, x, y)$, где ω - частота зондирования, (x, y) – точка земной поверхности (за исключением некоторых задач глобального зондирования, поверхность Земли в магнитотеллурике считается плоской). В простейшей модели, когда все параметры Земли и полей считаются меняющимися только по высоте (глубине), тензор импеданса сводится к скалярной функции, равной отношению величин электрического и магнитного полей. В общем случае тензор $Z(\omega, x, y)$ имеет 4 скалярных компонента (иногда шесть), и по этим комплекснозначным функциям трех переменных (одна переменная - частота ω , две другие - координаты точки земной поверхности, для которой измерен тензор импеданса) нужно восстановить строение Земли, чаще всего под этим подразумевается восстановление распределения электропроводности Земли – вещественной функции трех переменных $\sigma(x, y, z)$.

До настоящего времени большая часть интерпретации данных магнитотеллурических зондирований (МТЗ) проводится в рамках одномерной модели. В этой модели считается, что проводимость Земли зависит только от глубины: $\sigma = \sigma(z)$, и первичное электромагнитное поле является плоской волной, вертикально падающей на земную поверхность. В этом случае по скалярной функции одной переменной $Z(\omega)$ (ω - частота зондирования) требуется восстановить функцию одной переменной $\sigma(z)$ – распределение электропроводности Земли по глубине. Исторически сложилось так, что в магнитотеллурике чаще для обработки используют не импеданс $Z(\omega)$, а так называемые кривые кажущегося сопротивления $\rho(\omega) = |Z|^2 / \omega \mu$, где μ - магнитная проницаемость, которая в большинстве задач принимается равной магнитной проницаемости вакуума μ_0 . Для одномерных задач развита подробная теория, разработаны эффективные методы решения [1], [2].

Развитие геофизики и потребности разведки полезных ископаемых ставят задачи более детального описания параметров внутреннего строения Земли. Это требует перехода к двумерным и трехмерным моделям и, соответственно, решения двумерных и трехмерных задач, то есть задач восстановления либо двумерного

распределения электропроводности $\sigma(x,y)$, либо трехмерного $\sigma(x,y,z)$ соответственно по тензору импеданса $Z(\omega,x)$ или $Z(\omega,x,y)$.

Общий случай, без достаточно жестких предположений о виде функции σ отличается огромной неустойчивостью решения из-за некорректности обратной задачи. Наиболее адекватным, и с точки зрения устойчивости решения, и с точки зрения описания реальных ситуаций является класс так называемых квазислоистых сред [3]. Функции этого класса $\sigma(x,y,z)$ характеризуются медленным изменением вдоль горизонтальных переменных x,y , потому для каждой точки поверхности (x_0,y_0) соответствующая одномерная среда с проводимостью $\sigma(x_0,y_0,z)$ (так называемый локальный разрез) служит хорошим начальным приближением. Для таких сред предложен итерационно-асимптотический метод интерпретации (квазиодномерный метод решения многомерных обратных задач) [4]. Этот метод заключается в следующем. Начальное приближение получается путем интерпретации данных МТЗ в рамках одномерной модели. Для полученного приближения $\sigma_0(x,y,z)$ решается прямая задача МТЗ. Если близость рассчитанных и экспериментально измеренных полей устраивает исследователя, то решение считается найденным: $\sigma = \sigma_0$. Если же поля заметно отличаются, то экспериментальные данные специальным образом изменяются, и для этих измененных данных опять решается обратная задача в рамках одномерной модели. В случае необходимости процесс повторяется дальше. В работе [5] показана сходимость приближений $\sigma_k(x,y,z)$ к решению обратной задачи $\sigma(x,y,z)$. Описанный метод удобен тем, что требует решения только одномерных обратных задач, а многомерная прямая задача по расчету полей решается лишь несколько раз – один раз на каждом шаге итерации.

В настоящей статье осуществлена конкретная реализация итерационно-асимптотического метода, ориентированная на определенную модель среды, на определенный метод решения одномерной обратной задачи и определенный вид представления данных МТЗ.

Особенности предлагаемой модификации метода учитывают сложившуюся практику представления данных МТЗ и ориентированы на решение прямой многомерной задачи с граничным условием первого рода – задачи Дирихле, а не с импедансным граничным условием. Последняя задача, как известно, значительно труднее для численного решения. Указанное упрощение достигается с помощью построения так называемых синтезированных электромагнитных полей на поверхности Земли по тензору импеданса. Эти поля вычисляются один раз, и граничные значения некоторых компонент этих полей служат граничным условием для решений многомерных прямых задач [3], [6], [7].

§1. Постановка прямой и обратной задач

Рассмотрим двумерную модель Земли для случая Е-поляризации (рис. 1.).

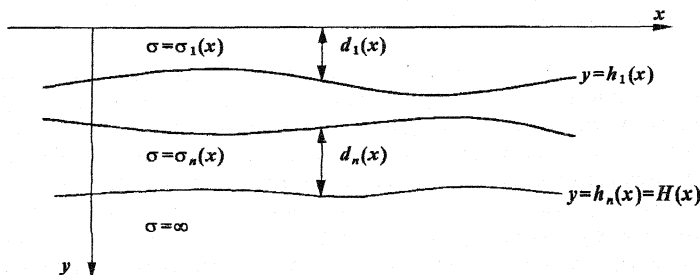


Рис.1. Распределение проводимостей в двумерной модели Земли;
 x – горизонтальная координата, y – глубина.

Будем предполагать, что коэффициент $\sigma(x,y)$ определен в криволинейной полосе D : $D = \{(x,y), x \in R, 0 < y < H(x)\}$.

Потребуем выполнения следующих условий для $\sigma(x,y)$:

А) Полоса D разбита на конечное число более узких криволинейных полос, в каждой из которых $\sigma(x,y)$ есть бесконечно дифференцируемая функция. Другими словами, существуют функции $h_j(x) \in C^{(\infty)}(-\infty, \infty)$, $j=0,1,\dots,n$, такие, что $0 = h_0(x) < h_1(x) < \dots < h_n(x) = H(x)$, причем внутри каждой полосы $h_{j-1}(x) < y < h_j(x)$ будет $\sigma(x,y) = \sigma_j(x)$, $j=1,2,\dots,n$, $-\infty < x < \infty$, где $\sigma_j(x)$ – бесконечно дифференцируемые функции в своих областях определения.

Б) Функции $h_j(x), \sigma_j(x,y)$ при всех допустимых значениях аргументов удовлетворяют оценкам:

$C_j \leq h_j(x) \leq D_j, j=1,2,\dots,n$, причем $C_1 > 0, C_{j+1} > D_j, j=1,2,\dots,n-1$;

$$\left| \frac{\partial^k h_j(x)}{\partial x^k} \right| \leq E_{jk}, \quad 0 < L_j \leq \sigma_j(x) \leq P_j, \quad \left| \frac{\partial^k \sigma_j(x)}{\partial x^k} \right| \leq K_{jk}, \quad j=1,2,\dots,n, \quad k=1,2,\dots$$

Здесь $C_j, D_j, E_{jk}, L_j, P_j, K_{jk}$ – некоторые константы.

Рассмотрим решение уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + i\omega\mu\sigma U = 0 \quad (1.1)$$

в криволинейной неограниченной полосе

$$D = \{(x, y): -\infty < x < \infty, 0 < y < H(x)\} \quad (1.2)$$

с коэффициентом

$$\sigma(x, y) = \begin{cases} \sigma_1(x), & 0 = h_0(x) < y < h_1(x) \\ \sigma_2(x), & h_1(x) < y < h_2(x) \\ \dots \\ \sigma_n(x), & h_{n-1}(x) < y < h_n(x) = H(x) \end{cases} \quad (1.3)$$

и граничными условиями

$$U|_{y=0} = \varphi(x, \omega); \quad U|_{y=H(x)} = 0; \quad U = O(1), (x, y) \in D \quad (1.4)$$

Функция $\varphi(x, \omega)$ из (1.4) представляет собой синтезированное электрическое поле. В этой работе останавливаться на алгоритме его нахождения мы не будем. Отметим только, что первичное поле является плоской волной, вертикально проникающей в Землю [3].

На границе разрыва коэффициента σ выполняются условия сопряжения

$$[U] \Big|_{y=h_j(x)} = 0, \quad \left[\frac{\partial U}{\partial y} \right] \Big|_{y=h_j(x)} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.5)$$

Определение 1. Решением задачи (1.1)-(1.5) назовем функцию $U(x, y, \lambda)$, непрерывно дифференцируемую в D , удовлетворяющую в областях непрерывности коэффициента σ уравнению (1.1) и принимающую на границе D значения (1.4).

Потребуем также, чтобы функция U была ограничена в D : $|U| \leq R_1, (x, y) \in D$.

Теорема 1. Решение задачи (1.1)-(1.5) в смысле определения 1 при условиях А), Б) существует и единственно.

Доказательство теоремы приведено в [5].

Для уравнения (1.1) определим понятие решения прямой задачи.

Введем функцию

$$\psi(x, \omega) = \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=0}. \quad (1.6)$$

Определение 2. Прямой задачей для уравнения (1.1) назовем задачу нахождения функции $\psi(x, \omega)$ по известным функциям $\sigma_i(x), d_i(x), i=1, 2, \dots, n$.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 решение прямой задачи существует и единственно и является бесконечно дифференцируемой функцией.

Доказательство теоремы приведено в [5].

С функцией $\psi(x, \omega)$ связана комплексная величина импеданса Z следующим соотношением:

$$Z(x, \omega) = i\omega\mu \frac{U}{\partial U / \partial y} \Big|_{y=0}. \quad (1.7)$$

Именно импеданс $Z(x, \omega)$ является экспериментальной исходной информацией для решения обратной задачи по восстановлению электропроводности $\sigma(x, y)$ из (1.1). Как уже отмечалось, в настоящей работе будет использован подход, когда известен не только импеданс Z , но и функция $\varphi(x, \omega) = U|_{y=0}$ из (1.4). Это позволяет значительно упростить решение прямой многомерной задачи.

Наряду с импедансом будем рассматривать так называемые кривые кажущегося сопротивления ρ_k

$$\rho_k = \frac{|Z|^2}{\omega\mu}. \quad (1.8)$$

Определение 3. Обратной задачей для уравнения (1.1) назовем задачу нахождения функций $\sigma_i(x), d_i(x), i=1, 2, \dots, n$ по функциям $\varphi(x, \omega)$ из (1.4) и $\psi(x, \omega)$ из (1.6).

Отметим, что при фактическом решении обратных задач мы будем использовать кажущиеся сопротивления $\rho_k(x, \omega)$, вычисляемые по формулам (1.7) и (1.8).

§2. Исследование обратной задачи

Решение обратной двумерной задачи находится с помощью решений обратных одномерных задач, зависящих от x как от параметра

$$\psi(x, \omega, \varepsilon) = \left. \frac{\partial U(x, y, \omega, \varepsilon)}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (2.1)$$

с коэффициентом

$$\text{границными условиями} \quad \sigma(y) = \begin{cases} \sigma_1, & 0 = h_0 < y < h_1 \\ \sigma_2, & h_1 < y < h_2 \\ \dots & \dots \end{cases} \quad (2.2)$$

$$U|_{y=0} = \varphi(\omega^n); \quad h_{n-1} < y < h_n = H \quad U|_{y=H} = 0 \quad (2.3)$$

и условиями сопряжения на границе разрыва коэффициента σ

$$[U]|_{y=h_j} = 0, \quad \left[\frac{\partial U}{\partial y} \right]_{y=h_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.4)$$

Обратная одномерная задача восстановления структуры геоэлектрического разреза решается методом подбора [8], состоящем алгоритмически в многократном решении прямой одномерной задачи и построении такого вектора параметров среды из множества допустимых решений, который минимизировал бы некоторый функционал невязки $\Phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n, d_1, \dots, d_n)$ между модельной и экспериментальной характеристиками поля.

Решение прямой одномерной задачи ведется по известному [2] рекуррентному соотношению между импедансами $Z(y_l)$ и $Z(y_{l+1})$ на верхней и нижней границах l -го слоя

$$Z(y_l) = \frac{\omega\mu \left[\frac{\omega\mu}{k_l} + Z(y_{l+1}) \right] - \left[\frac{\omega\mu}{k_l} - Z(y_{l+1}) \right] e^{2ik_l d_l}}{k_l \left[\frac{\omega\mu}{k_l} + Z(y_{l+1}) \right] + \left[\frac{\omega\mu}{k_l} - Z(y_{l+1}) \right] e^{2ik_l d_l}},$$

где волновое число l -го слоя

$$k_l = \sqrt{i\omega\mu\sigma_l}, \quad \text{Im } k_l > 0$$

Расчет ведется путем последовательных рекурсий. Начальным является значение импеданса на поверхности безграничного однородного основания

$$Z(y_L) = \omega\mu/k_L, \quad (L=n).$$

Полученная модельная характеристика поля сравнивается с экспериментальной по функционалу невязки, минимизация которого производится методом покоординатного спуска [9].

Полученные значения параметров среды для каждого из s узлов принимаем за нулевое приближение решения обратной двумерной задачи.

Коротко изложим смысл итерационно-асимптотического метода.

Введем в уравнение (1.1) малый параметр ε :

$$\varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + i\omega\mu\sigma U = 0 \quad (2.5)$$

Появление этого параметра объясняется следующим образом. Предположим, что все параметры, задающие среду, плавно меняются вдоль оси x , т.е. удовлетворяют соотношениям типа $|h_2'(x)| \ll h_2(x)$. Введем переменную $z = \varepsilon^3 x$, выбрав параметр ε так, чтобы производные функций по x и сами функции стали одного порядка. В переменных z, y уравнение Гельмгольца запишется с параметром ε . Обозначая переменную z снова буквой x , получаем (2.5). При практических расчетах никакого преобразования переменной делать, разумеется, не нужно, а надо полагать $\varepsilon = 1$.

Будем считать, что для (2.5) справедливы соотношения (1.2)-(1.5), а также выполняются условия А) и Б). Нормальная производная решения уравнения (2.5) зависит от параметра ε :

$$\psi(x, \omega, \varepsilon) = \left. \frac{\partial U(x, y, \omega, \varepsilon)}{\partial y} \right|_{y=0}$$

Тогда обратная задача в смысле определения 3 решается в следующем смысле: строятся последовательности функций $\sigma_{1m}(x, \varepsilon), \dots, \sigma_{nm}(x, \varepsilon), d_{1m}(x, \varepsilon), \dots, d_{nm}(x, \varepsilon)$, асимптотически сходящиеся к соответствующим функциям $\sigma_1(x), \dots, \sigma_n(x), d_1(x), \dots, d_n(x)$.

Нулевые приближения получены при решении обратной задачи для одномерного уравнения (2.1), которое получается из (2.5) при $\varepsilon = 0$.

Дальнейшие приближения получаются однотипно.

Пусть уже известен набор функций $p_m(x, y, \varepsilon) = \{\sigma_{1m}(x, \varepsilon), \dots, \sigma_{nm}(x, \varepsilon), d_{1m}(x, \varepsilon), \dots, d_{nm}(x, \varepsilon)\}$. Приближение $p_{m+1}(x, y, \varepsilon)$ строится следующим образом. Для $p_m(x, y, \varepsilon)$ находятся решения прямых задач для уравнения (2.5) $\psi_m(x, \omega, \varepsilon)$ и для одномерного уравнения (2.1) $\psi_m(\omega, \varepsilon)$. Введем функцию $\xi_m(x, \omega, \varepsilon) = \psi(x, \omega, \varepsilon) - \psi_m(x, \omega, \varepsilon) + \psi_m(\omega, \varepsilon)$. Функция $\xi_m(x, \omega, \varepsilon)$ связана с $\rho_k^m(x, \omega, \varepsilon)$ соотношениями (1.7) и (1.8), где вместо $\partial U / \partial y$ участвует $\xi_m(x, \omega, \varepsilon)$. Приближение $p_{m+1}(x, y, \varepsilon)$ получается решением обратной одномерной задачи по функции $\rho_k^m(x, \omega, \varepsilon)$.

§3. Модельный пример восстановления геоэлектрического разреза

Приведенный выше алгоритм применим для восстановления трехслойной модели Земли (рис.2). В качестве исходных данных возьмем результаты решения прямой задачи для параметров среды, приведенных ниже.

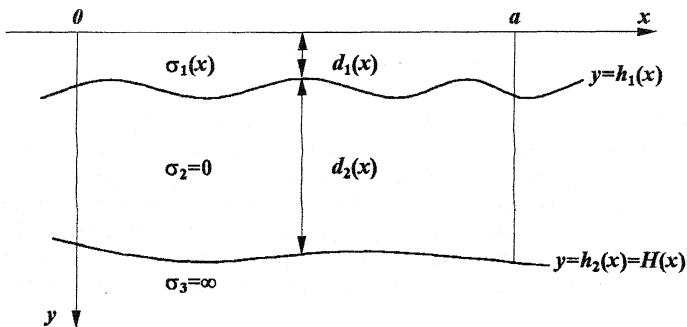


Рис.2. Трехслойная модель Земли.

Прямая двумерная задача решалась в предположении бесконечно тонкого приповерхностного слоя с интегральной проводимостью $S(x)=\sigma_1(x) \cdot d_1(x)$. Решим прямую задачу при следующих безразмерных значениях характеристик разреза:

$$S(x) = 1 + \frac{4}{5} \sin \frac{x}{50}, \quad \sigma_2(x) = 0, \quad d_2(x) = 100$$

и заданной функции $\varphi(x, \omega)$ (граничным условием) вида

$$\varphi(x, \omega) = 1 + \frac{1}{2} \cos \frac{x}{t}, \quad (3.1)$$

где параметр t характеризует плавность изменения граничной функции.

Полученные данные будут моделировать экспериментальную информацию, которую и требуется интерпретировать.

Обратную задачу по восстановлению структуры разреза решим итерационно-асимптотическим методом, заключающемся алгоритмически в многократном решении прямых задач и построении вектора параметров среды, минимизирующего некоторый функционал невязки между модельной и экспериментальной характеристиками.

В двумерной прямой задаче используется модель с бесконечно тонким приповерхностным слоем конечной переменной проводимости, а при решении обратной задачи используются модели с конечной толщиной приповерхностного слоя. Таким образом, модели для решения прямой двумерной задачи и обратных одномерных задач намеренно не согласованы, что также отражает реальную ситуацию.

Пусть имеется априорная информация о среде, позволяющая выделить множество допустимых решений, содержащее точное модельное решение:

$$\sigma_1=1, \quad \sigma_2=0, \quad \sigma_3=\infty, \quad d_1 \in [0.01; 10], \quad d_2 \in [1; 1000].$$

На отрезке $[0; 800]$ по оси x выберем s узлов, для каждого из которых будем искать минимум функционала невязки для значений кажущихся сопротивлений ρ на определенном экспериментальном наборе частот ω

$$\Phi(\vec{\sigma}, \vec{d}) = \sum_{k=1}^{k_m} \left(\frac{\rho_{\text{эк}} - \rho_k}{\rho_{\text{эк}}} \right)^2$$

где $\rho_{\text{эк}}$ – экспериментальное значение кажущегося сопротивления на частоте ω_k , ρ_k – полученное решением прямой задачи кажущееся сопротивление на частоте ω_k для параметров среды $\sigma_1, \sigma_2, d_1, d_2$ из множества возможных решений.

Минимизация функционала невязки производится методом покоординатного спуска.

Полученные значения толщин слоев принимаем за нулевые приближения. Применяя итерационно-асимптотический метод корректируем значения Z , вычисляем кажущееся сопротивление ρ_k и повторяем решение обратной задачи.

На приведенных графиках, иллюстрирующих работу итерационно-асимптотического метода, нижний индекс в подписях к кривым обозначает номер слоя, верхний индекс – номер итерации; отсутствие верхнего индекса означает исходную модельную кривую. Для значения параметра $t=100$ из (3.1) они имеют вид, представленный на рис.3, 4.

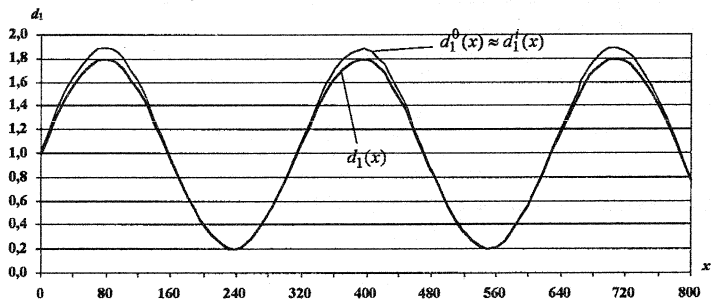


Рис.3. Восстановление толщины первого слоя $d_1(x)$ при $t=100$.

Вычисления показывают, что приповерхностный слой восстанавливается достаточно хорошо уже на нулевой итерации.

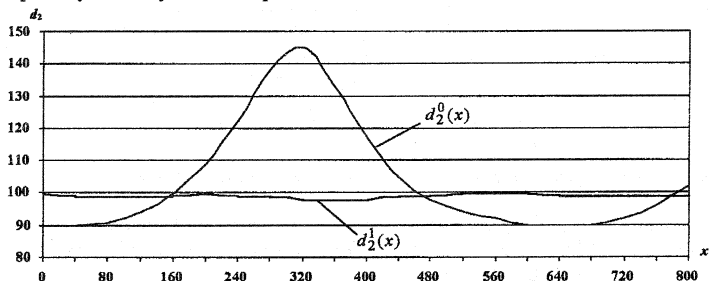


Рис.4. Восстановленные толщины второго слоя $d_2(x)$ при $t=100$ на нулевой и первой итерациях.

Для восстановления толщины второго слоя $d_2(x)$ с точностью до 1,5% потребовалось две итерации.

Проанализируем возможности метода, меняя параметр t , т.е. уменьшая плавность изменения граничной функции $\varphi(x, \omega)$ из (3.1).

Для значения параметра $t=30$ результаты представлены на рис.5 и 6.

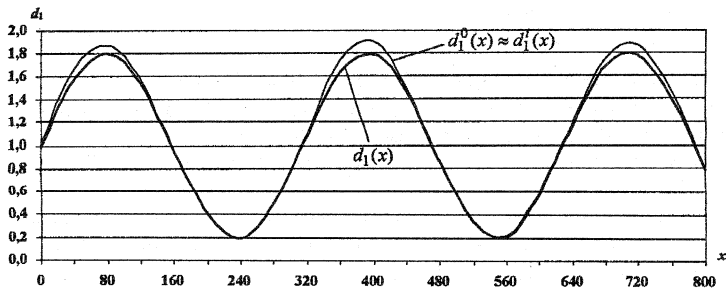


Рис.5. Восстановление толщины первого слоя $d_1(x)$ при $t=30$.

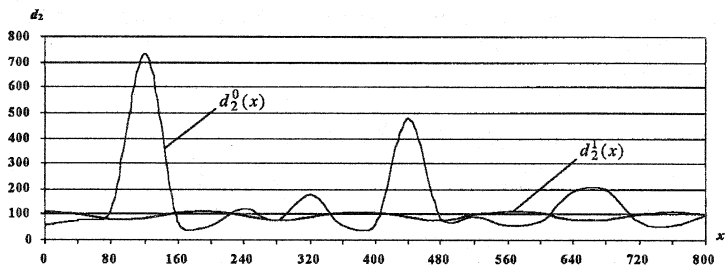


Рис.6а. Восстановленные толщины второго слоя $d_2(x)$ при $t=30$ на нулевой и первой итерациях.

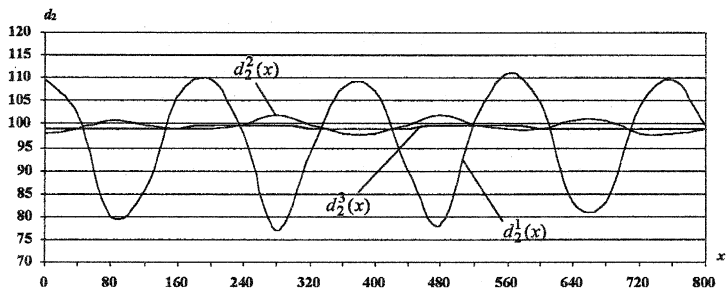


Рис.6б. Восстановленные толщины второго слоя $d_2(x)$ при $t=30$ на первой, второй и третьей итерациях.

Толщина первого слоя $d_1(x)$ довольно точно восстанавливается опять уже на нулевой итерации (рис.5). Для восстановления $d_2(x)$ с точностью до 1,5% на этот раз потребовалось 3 итерации (рис.6а, 6б).

Далее было проанализировано влияние шумов в исходных данных на возможности метода. Для этого в экспериментальную характеристику $Z(x, \omega)$ была введена погрешность уровня γ .

Для значения $\gamma=0,1$ (уровень шума $\approx 10\%$) в точке $x=320$ приведем вид кривой кажущегося сопротивления с "шумом" (рис.7).

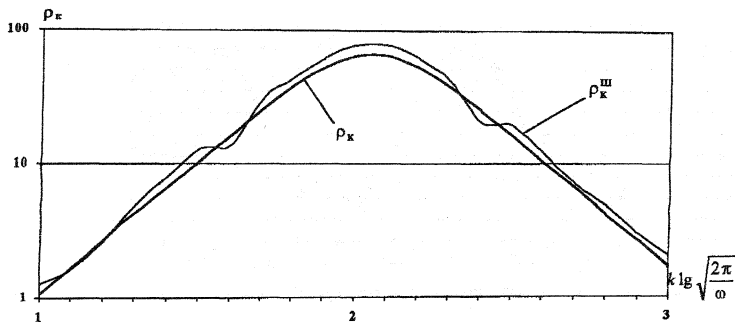


Рис.7. Кривые кажущегося сопротивления: экспериментальная (модельная) и с "шумом", построенные в билогарифмическом масштабе. Чтение таких кривых слева направо, т.е. от высоких частот к низким, отвечает нормальному ходу зондирования от малых глубин к большим.

Для параметра $t=100$ из (3.1) и уровня шума $\gamma=0,1$ графики восстановленных значений $d_1(x)$ и $d_2(x)$ представлены на рис.8 и 9.

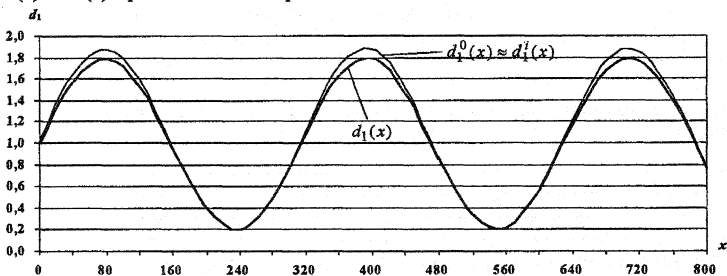


Рис.8. Восстановление толщины первого слоя $d_1(x)$ при $t=100$ и $\gamma=0,1$.

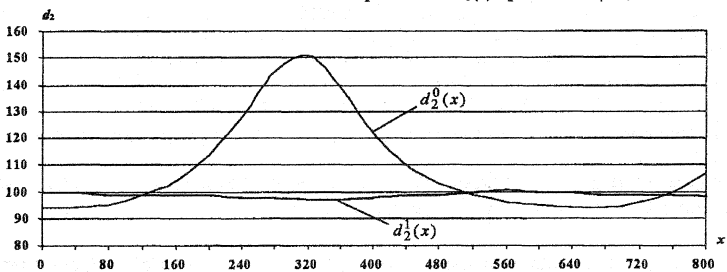


Рис.9. Восстановленные толщины второго слоя $d_2(x)$ при $t=100$ и $\gamma=0,1$ на нулевой и первой итерациях.

Наличие шумов в этом случае мало влияет на результат. Для восстановления $d_2(x)$ с точностью до 1,5% потребовалось две итерации.

Для значения параметра $t=30$ из (3.1) и уровня шума $\gamma=0,1$ результаты представлены на рис.10 и 11.

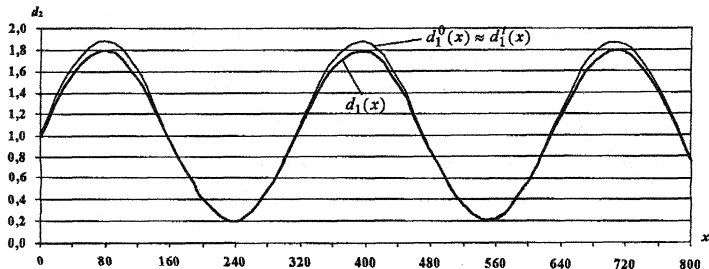


Рис.10. Восстановление толщины первого слоя $d_1(x)$ при $t=30$ и $\gamma=0,1$.

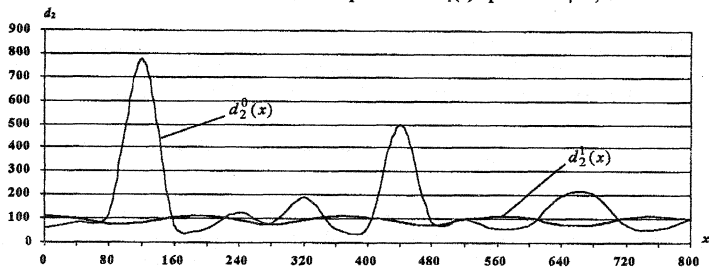


Рис.11а. Восстановленные толщины второго слоя $d_2(x)$ при $t=30$ и $\gamma=0,1$ на нулевой и первой итерациях.

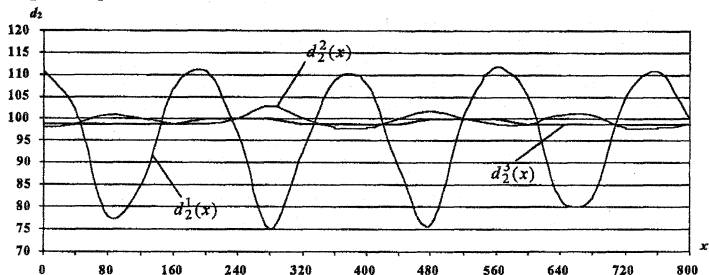


Рис.11б. Восстановленные толщины второго слоя $d_2(x)$ при $t=30$ и $\gamma=0,1$ на первой, второй и третьей итерациях.

Для восстановления $d_2(x)$ с точностью до 1,5% опять потребовалось три итерации. Наличие шумов и в этом случае мало влияет на результат.

Заключение. Численное моделирование показало эффективность итерационно-асимптотического метода для восстановления структуры геоэлектрического разреза с плавно меняющимися параметрами. Отметим хорошие скорость и точность метода при восстановлении толщины второго слоя $d_2(x)$. Толщина первого слоя восстанавливается уже на нулевой итерации (т.е. при интерпретации в одномерной модели). При некоторых значениях x ее ошибка достигает 5%, что, по-видимому, объясняется несогласованностью моделей при решении прямой двумерной и обратных задач.

Литература

1. Тихонов А.Н. К математическому обоснованию теории электромагнитных зондирований // Журн. вычислит. матем. и матем. физики, 1965, т.5, № 3, с. 545-548.
2. Бердичевский М.Н., Дмитриев В.И. Магнитотеллурическое зондирование горизонтально-однородных сред. М.: Недра, 1992.
3. Бердичевский М.Н., Дмитриев В.И., Новиков Д.Б., Пастушан В.В. Анализ и интерпретация магнитотеллурических данных. М.: Диалог-МГУ, 1997.
4. Барашков А.С., Дмитриев В.И. Решение обратных задач в классе квазиодномерных функций. В кн.: Методы математического моделирования, автоматизации обработки наблюдений и их приложения. М.: Изд-во МГУ, 1986, с.160-175.
5. Barashkov A.S. Small Parameter Method in Multidimensional Inverse Problems. VSP, Utrecht, Netherlands, 1998.
6. Дмитриев В.И., Барашков И.С. Метод численного исследования синтезированных полей для трехмерной задачи дифракции на импедансной плоскости // Актуальные вопросы прикладной математики. М.: Изд-во МГУ, 1989, с. 173-182.
7. Барашков А.С. Восстановление электромагнитных полей на поверхности Земли по тензору импеданса // Изв. АН СССР. Физика Земли, 1986, № 5, с. 57-56.
8. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
9. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.