

*В.И. Дмитриев, Ж.Г. Ингтем, Н.А. Мерщикова,  
Я.А. Филиппова.*

## **ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ДАННЫХ ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКИ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ.\***

### **Введение.**

Использование дифференциальных методов электроразведки при поиске полезных ископаемых показало свою эффективность [1], но из-за технических трудностей не получило широкого распространения. В настоящее время разработан устойчивый метод численного дифференцирования неточно заданных функций [2]. Использованию этого метода в обработке данных электромагнитных зондирований и посвящена настоящая статья.

### **1. Метод численного дифференцирования.**

Для устойчивого дифференцирования неточных данных в работе [2] был предложен метод интегрального сплайна. Мы рассмотрим построение аппроксимационного интегрального сплайна второго порядка. В этом случае задается кусочно-постоянная вторая производная сплайна

$S(x)$ ,  $x \in [0, l]$  на сетке  $x_n = nh$ ;  $h = \frac{l}{N}$ ,  $n \in [0, N]$ .

$$S''(x) = S''\left(x + \frac{1}{2}h\right) = a_n = const \text{ при } x \in [x_n, x_{n+1}], n \in [0, N-1]$$

Если задать начальные условия  $S(x=0) = S_0$ ;  $S'(x=0) = p_0$ , то первую производную сплайна можно определить в виде:

$$S'(x) = p_0 + \int_0^x S''(x)dx = p_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k h + a_n (x - x_n), \quad (1)$$
$$x \in [x_n, x_{n+1}], n \in [0, N-1].$$

а сама сплайн - функция равна:

---

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 13-05-12018 офи\_м)

$$S(x) = S_0 + p_0x + \int_0^x d\xi \int_0^\xi S''(x)dx = S_0 + p_0x + x \int_0^x S''(x)dx - \int_0^x \xi S''(\xi)d\xi$$

или

$$S(x) = S_0 + p_0x + xh \sum_{k=0}^{n-1} a_k + a_n x(x - x_n) - h \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left( x_k + \frac{h}{2} \right) - \frac{a_n}{2} (x^2 - x_n^2)$$

откуда

$$S(x) = S_0 + p_0x + h \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left( x - x_k - \frac{h}{2} \right) + \frac{a_n}{2} (x - x_n)^2, \quad x \in [x_n, x_{n+1}],$$

$$n \in [0, N - 1] \quad (2)$$

Таким образом, построенный сплайн зависит от переменной  $x$  и от  $N + 2$  параметров  $\bar{q} = (S_0, p_0, a_1, \dots, a_N)$ .

Если нам необходимо восстановить функцию  $u(x)$  и её производную  $u'(x)$  по приближённым данным на сетке  $u(x_n) = \tilde{u}_n$ ,  $x_n = nh$ ,  $n \in [0, N]$ , то задача сводится к определению параметров  $\bar{q}$  из вариационной задачи:

$$\min \left( \sum_{n=0}^N (S(x_n) - \tilde{u}_n)^2 + \alpha \sum_{n=1}^N (S(x_n) - S(x_{n-1}))^2 \right) \quad (3)$$

где  $\alpha$ -параметр регуляризации, а стабилизатор

$\Omega(S) = \sum_{n=1}^N (S_n - S_{n-1})^2$  требует плавности изменения сплайна  $S(x)$ . Из

условия минимума функционала (3), получаем:

$$\sum_{n=0}^N (S(x_n) - \tilde{u}_n) \frac{dS(x_n)}{dq_i} + \alpha \sum_{n=1}^N (S(x_n) - S(x_{n-1})) \frac{d(S(x_n) - S(x_{n-1}))}{dq_i},$$

$$i \in [1, N + 2] \quad (4)$$

Так как сплайн-функция  $S(x)$  линейно зависит от параметров  $\{q_i\}$ ,  $i \in [1, N + 2]$ , то (4) является линейной алгебраической системой относительно  $\bar{q}$ . Определив из (4)  $\bar{q}$ , находим  $u(x) \approx S(x)$  и  $u'(x) \approx S'(x)$ . Параметр регуляризации  $\alpha$  позволяет сгладить неточные данные  $\tilde{u}(x_n)$  и дает возможность устойчиво определить производную  $u'(x)$ .

## 2. Применение численного дифференцирования при магнито-теллурическом зондировании неоднородных сред.

Анализ эффективности применения численного дифференцирования проведем на основе моделирования МТ-полей в двумерных неоднородных средах. Весь вычислительный эксперимент проводился следующим образом:

– Расчет кажущегося сопротивления для неоднородной среды для фиксированной частоты в зависимости от  $x$  на земной поверхности;

– Внесение погрешностей в кажущееся сопротивление случайным образом;

– Вычисление  $\frac{d\rho}{dx}$  и  $\frac{d^2\rho}{dx^2}$  и их анализ.

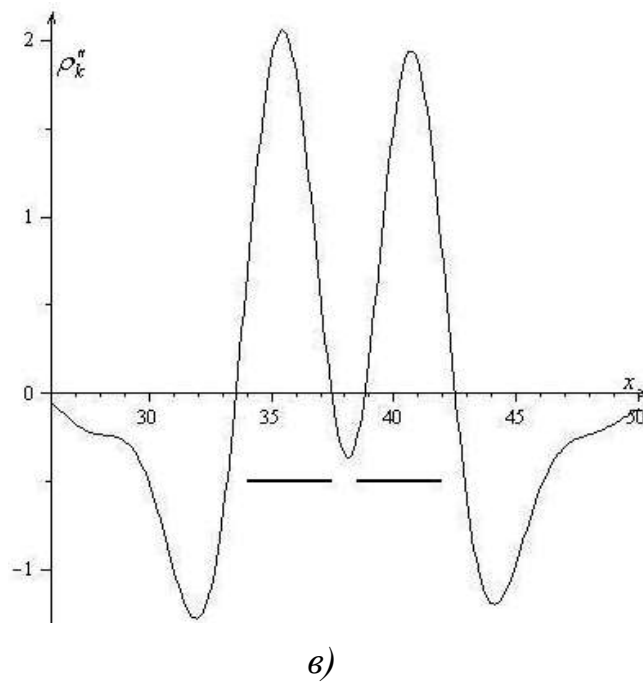
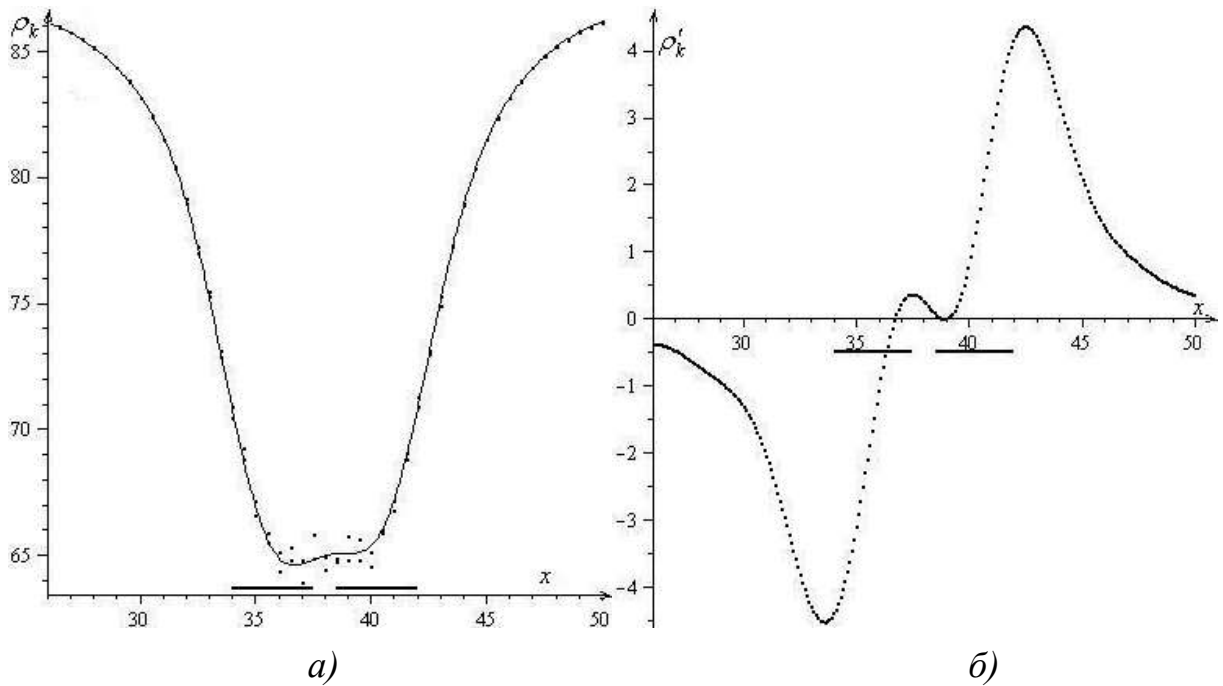
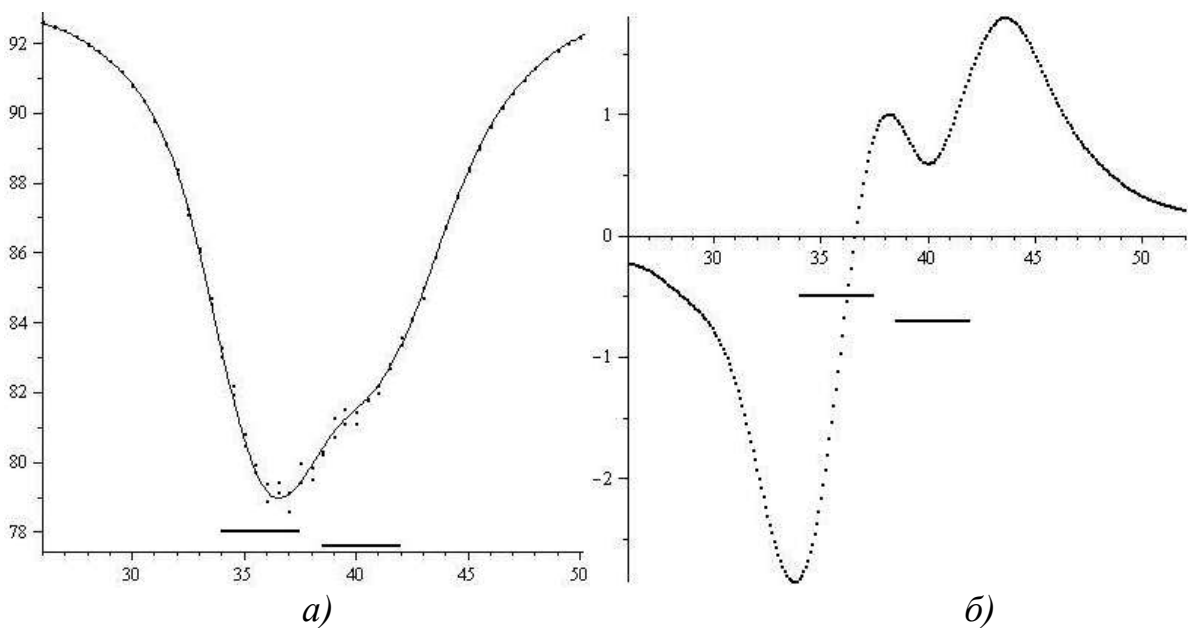
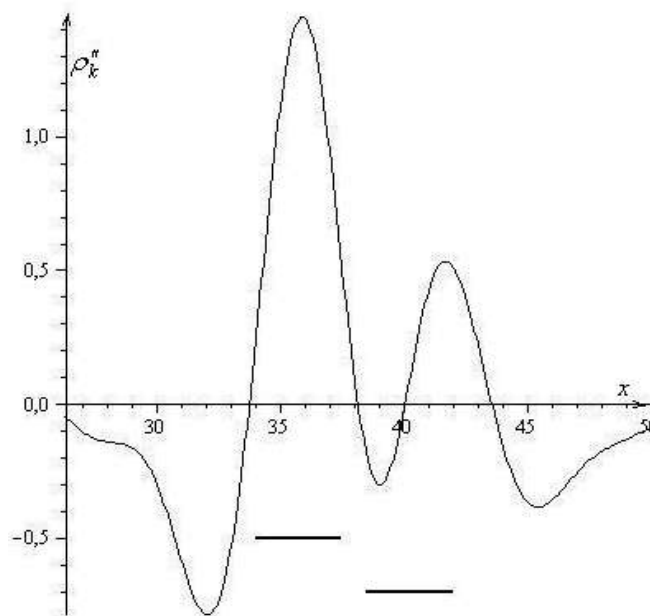


Рис 1 Пример разделения аномалий от двух тел.

На рис. 1 приведены графики профильных кривых кажущегося сопротивления  $\rho_k(x)$ , его первой и второй производных:  $\rho'_k(x)$  и  $\rho''_k(x)$  на частоте  $\frac{\lambda_1}{h_1} = 1024$ . Рассматривается случай двух неоднородностей находящихся в двухслойной среде с толщиной  $h_1 = 1$ ; и с электропроводностями  $\sigma_1 = 1$ ;  $\sigma_2 = 0.01$ . Проводимость неоднородностей  $\sigma_n = 10$ , их глубина залегания  $z = 2$ , неоднородность расположена при  $x \in [34; 37.5]$  и  $x \in [38.5; 42]$ , т.е. расстояние между неоднородностями  $l = 1$ . Погрешность в  $\rho_k$  равна 5% от среднего аномалии  $\rho_k$ . Из рис. 1а видно, что по  $\rho_k$  различить аномалии от каждого тела практически невозможно (точками показаны неточные данные). Первая производная рис. 1б уже разделяет неоднородности, а вторая производная рис. 1в даёт чёткое положение каждой неоднородности.

На рис. 2 приведены результаты для тех же двух неоднородностей, но расположенных на разных глубинах ( $z = 2$  для первой неоднородности,  $z = 3$  для второй неоднородности). Погрешность 1%. Частотный параметр  $\frac{\lambda_1}{h_1} = 2048$ . Легко видеть, что в этом случае кажущееся сопротивление практически не чувствует вторую неоднородность (рис. 2а). В то время как вторая производная (Рис. 2в) чётко выделяет два тела (аномалия от второго тела в два раза меньше аномалии от первого тела). Следовательно, можно определить не только расположение тел, но и их глубину.





в)

Рис.2 Пример разделения аномалий от двух тел на разной глубине.

При электроразведке неструктурных залежей углеводородов, которые можно представить в виде неоднородного горизонтального слоя, возникает важная задача определения зон с контрастной электропроводностью. В этом случае численное дифференцирование данных вдоль профиля измерений дает возможность выделить зоны с различными проводимостями. На рис. 3 приведена модель с неоднородным слоем представленная в виде двухслойной модели  $h = 1$ ,  $\sigma_1 = 1$ ,  $\sigma_2 = 0,01$  со сложной неоднородностью толщиной  $H = 1$  состоящей из чередующихся блоков с разными электропроводностями  $\sigma_3 = 10$ ,  $\sigma_4 = 1$  и  $\sigma_5 = 0.1$  и соответствующими протяженностями  $l_3 = 2$ ,  $l_4 = 3$  и  $l_5 = 3$

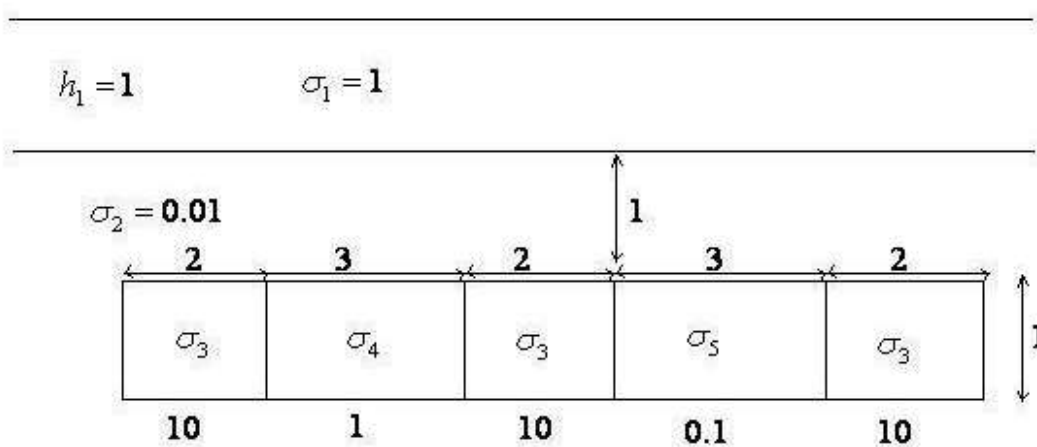
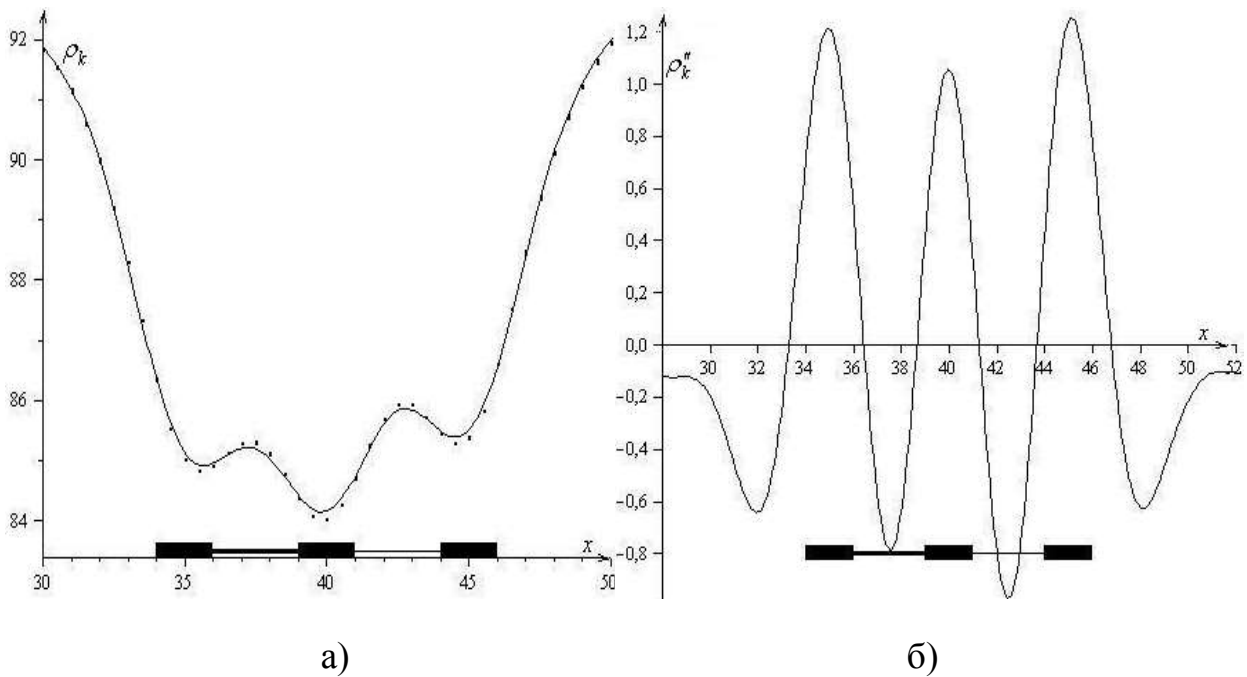


Рис.3 Модель неоднородного слоя.

Для этой модели были проведены расчеты кажущегося сопротивления  $\rho_k$  при частоте  $\frac{\lambda_1}{h_1} = 2048$ . Была внесена погрешность в 1% от среднего значения аномалии  $\rho_k$  и проведено вычисление  $\rho_k'$  и  $\rho_k''$ . На рис. 4 приведены графики  $\rho_k(x)$  (рис. 4а) и  $\rho_k''(x)$  (рис. 4б). Легко видеть, что на графике  $\rho_k(x)$  аномалия слабо отражает неоднородность слоя, а на графике  $\rho_k''(x)$  четко разделяются зоны большой и малой проводимости. Над зонами большой проводимости ( $\sigma = 10$ ) имеем максимумы второй производной (на рис. 4б эти зоны отмечены жирными вставками), а над зонами с малой электропроводностью имеем минимумы  $\rho_k''(x)$ , причем, чем проводимость меньше, тем минимумы глубже. Таким образом, применение метода численного дифференцирования дает возможность достаточно точного разделения зон с различными электропроводностями.



*Рис. 4 Пример разделения аномалий с различными электропроводностями.*

Приведённые примеры показывают эффективность применения численного дифференцирования профильных кривых для повышения разрешающей способности МТЗ при выделении особенностей строения среды вдоль земной поверхности.

## Литература

1. Дмитриев В.И., Мерщикова Н.А. Использование дифференциальных характеристик магнитного поля при решении обратной задачи электромагнитного зондирования двумерно-неоднородных сред// Физика Земли 1991 № 6 с. 59-64.
2. Dmitriev V.I., Dmitrieva I.V., Ingtem J.G. Integral form of the spline function in approximation problems // *Computational Mathematics and Modeling, Consultants Bureau (United States)* 2013, том 24, № 4, с. 488-497.