

*В.И. Дмитриев М.С. Кругляков*

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЯ ВЕРТИКАЛЬНОГО МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ В ДВУМЕРНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ\***

### **Введение**

Одним из интенсивно развивающихся направлений современной геофизики является исследование возможности применения мощных контролируемых источников для зондирования Земли. Особый интерес представляет использование стационарного источника, расположенного на суше, для зондирования морского дна. Основная сложность, связанная с математическим моделированием таких источников, заключается в практической невозможности моделирования реальной картины растекания тока по суше вблизи такого источника. Данное обстоятельство вынуждает использовать различные эквивалентные источники вместо реального. Простейшим эквивалентным источником является вертикальный магнитный диполь, расположенный на суше.

Поскольку источник находится на берегу и канализация тока вдоль берега — береговой эффект оказывает существенное влияние на распределение электромагнитного поля внутри моря, необходимо использовать двумерную или трехмерную модели среды. Для достаточно большого числа задач можно считать море бесконечно протяженным в каком-то направлении и пренебрегать кривизной берегов — т.е. применять двумерную модель среды. Если при этом источник создает трехмерное поле, то получается типичная квази-трехмерная задача.

### **Постановка задачи о береговом эффекте**

Рассмотрим двуслойную среду (Рис. 1), состоящую из двух полупространств — воздуха с удельной проводимостью равной  $\sigma_0 = 0$  См/м, и нижнего полупространства — суши с удельной проводимостью равной  $\sigma_b = 10^{-3}$  См/м.

В нижнем полупространстве расположена вставка, бесконечно протяженная в направлении  $X$ , с прямоугольным сечением  $S$ , которая моделирует море. Глубину моря обозначим  $h_s$ , а ширину —  $L$ . При этом удельная проводимость моря считается равной  $\sigma_s = 3$  См/м. Магнитный диполь,

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проект 09-05-12016 офи-м и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 годы.

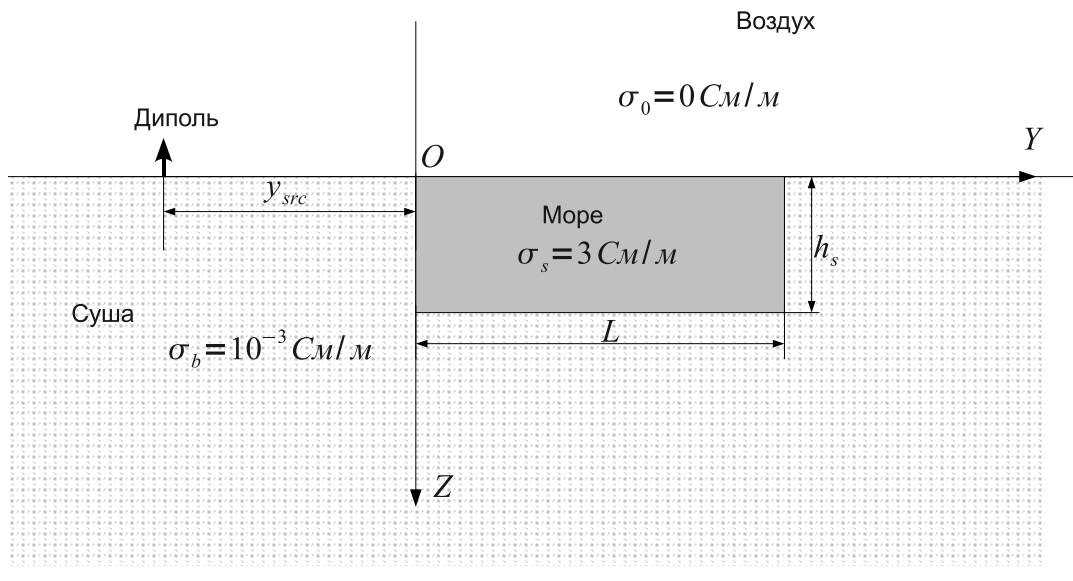


Рис. 1. Вертикальное сечение модели в задаче о береговом эффекте

моделирующий источник, расположен на поверхности суши на расстоянии  $y_{src} = 40$  км от моря.

Выберем систему координат как показано на Рис. 1, расположив начало координат на берегу моря напротив диполя и направив ось  $Z$  вниз. Ось  $Y$  направлена вправо, а ось  $X$  — так, чтобы оси координат образовывали левую тройку.

### Квази-трехмерный метод в задаче о береговом эффекте

Для электрического поля, наведенного в море вертикальным магнитным диполем, справедливо следующее трехмерное векторное интегральное уравнение [1]:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(x, y, z) - \Delta_\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \int_S \hat{G}_E(x - x_0, y - y_0, z, z_0) \mathbf{E}(x_0, y_0, z_0) dz_0 dy_0 dx_0 = \\
 = \mathbf{E}^0(x, y, z), \\
 \Delta_\sigma = \sigma_a - \sigma_b,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\mathbf{E}^0(x, y, z)$  — первичное электрическое поле, т.е. поле, наведенное вертикальным магнитным диполем в слоистой среде,  $\hat{G}_E$  — тензор Грина электрического типа [1]. Если решение этого уравнения  $\mathbf{E}$  известно, то для электромагнитного поля во всем пространстве справедливы следующие

щие интегральные соотношения [1]:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x, y, z) &= \Delta_\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \int_S \widehat{G}_E(x - x_0, y - y_0, z, z_0) \mathbf{E}(x_0, y_0, z_0) dz_0 dy_0 dx_0 + \\ &+ \mathbf{E}^0(x, y, z), \\ \mathbf{H}(x, y, z) &= \Delta_\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \int_S \widehat{G}_H(x - x_0, y - y_0, z, z_0) \mathbf{E}(x_0, y_0, z_0) dz_0 dy_0 dx_0 + \\ &+ \mathbf{H}^0(x, y, z),\end{aligned}\quad (2)$$

где  $\mathbf{H}^0$  — первичное магнитное поле,  $\widehat{G}_H$  — тензор Грина магнитного типа [1].

Интегралы в формулах (1), (2) являются интегралами свертки по переменной  $x$ . Это позволяет применить преобразование Фурье по переменной  $x$  к этим соотношениям и перейти от трехмерных соотношений к параметрическому семейству двумерных. При этом уравнение для образа электрического поля  $\mathbf{e}(y, z)$  примет вид:

$$\mathbf{e}(y, z) - \Delta_\sigma \int_S \widehat{g}_E(y, z, y_0, z_0) \mathbf{e}(y_0, z_0) dy_0 dz_0 = \mathbf{e}^0(y, z), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{e}(y, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(x, y, z) e^{i\xi x} dx, \\ \mathbf{e}^0(y, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}^0(x, y, z) e^{i\xi x} dx, \\ \widehat{g}_E(y, z, y_0, z_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{G}_E(x, y, z, 0, y_0, z_0) e^{i\xi x} dx\end{aligned}\quad (4)$$

Формулы пересчета для образов Фурье электрического  $\mathbf{e}(y, z)$  и магнитного  $\mathbf{h}(y, z)$  полей принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}(y, z) &= \mathbf{e}^0(y, z) + \Delta_\sigma \int_S \widehat{g}_E(y, z, y_0, z_0) \mathbf{e}(y_0, z_0) dy_0 dz_0 \\ \mathbf{h}(y, z) &= \mathbf{h}^0(y, z) + \Delta_\sigma \int_S \widehat{g}_H(y, z, y_0, z_0) \mathbf{e}(y_0, z_0) dy_0 dz_0,\end{aligned}\quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}
 \mathbf{h}(y, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(x, y, z) e^{i\xi x} dx, \\
 \mathbf{h}^0(y, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}^0(x, y, z) e^{i\xi x} dx, \\
 \widehat{g}_H(y, z, y_0, z_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{G}_H(x, y, z, 0, y_0, z_0) e^{i\xi x} dx
 \end{aligned} \tag{6}$$

Таким образом, решение трехмерной задачи сведено к решению параметризованного множества двумерных задач для некоторого множества параметров преобразования Фурье  $\{\xi\}$ . Такой способ решения трехмерных задач принято называть квази-трехмерным методом. Решать двумерное интегральное уравнение (3) значительно проще, чем трехмерное уравнение (1). Вычислив по формулам (5) образы Фурье искомых полей, найдем сами поля в требуемых точках с помощью обратного преобразования Фурье:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(x, y, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{e}(\xi, y, z) e^{-i\xi x} d\xi, \\
 \mathbf{H}(x, y, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(\xi, y, z) e^{-i\xi x} d\xi.
 \end{aligned} \tag{7}$$

При решении реальных задач множество  $\{\xi\}$  всегда состоит из конечного числа  $p$  элементов  $\xi_k, k = 1 \dots p$ . Что бы квази-трехмерный метод был более эффективен, чем решение полной трехмерной задачи, требуется возможность восстановления электромагнитного поля по формулам (7) с требуемой точностью при сравнительно небольшом  $p$ .

### Определение необходимого множества $\{\xi_k\}$

В прикладных задачах нас интересует поле не во всем пространстве, а только в некоторых его точках. Это позволяет выбирать множество значений  $\{\xi_k\}$  так, чтобы электромагнитное поле восстанавливалось по его образу Фурье с требуемой точностью именно в этих точках, не следя за погрешностью его восстановления во всем остальном пространстве.

Для определения необходимого множества значений  $\{\xi_k\}$  удобно использовать DE-метод [2], одним из важных свойств которого являет-

ся зависимость множества значений аргумента  $\{\xi_k\}$ , в которых вычисляется подинтегральная функция в (7), от значения  $x$ . Обозначим за  $s$  шаг сетки, а за  $N_1, N_2$  — наименьший и наибольший индексы слагаемых в квадратурной формуле из DE-метода. Тогда определение множества  $\{\xi_k\}$ , необходимого для вычисления поля по формулам (7) при фиксированном значении  $x$ , сводится к определению этих трех параметров. Фактически задача определения необходимого количества гармоник Фурье сводится к уменьшению величины  $N_2 - N_1 + 1$  (которая и является количеством гармоник), при сохранении точности расчета преобразования. Для опре-

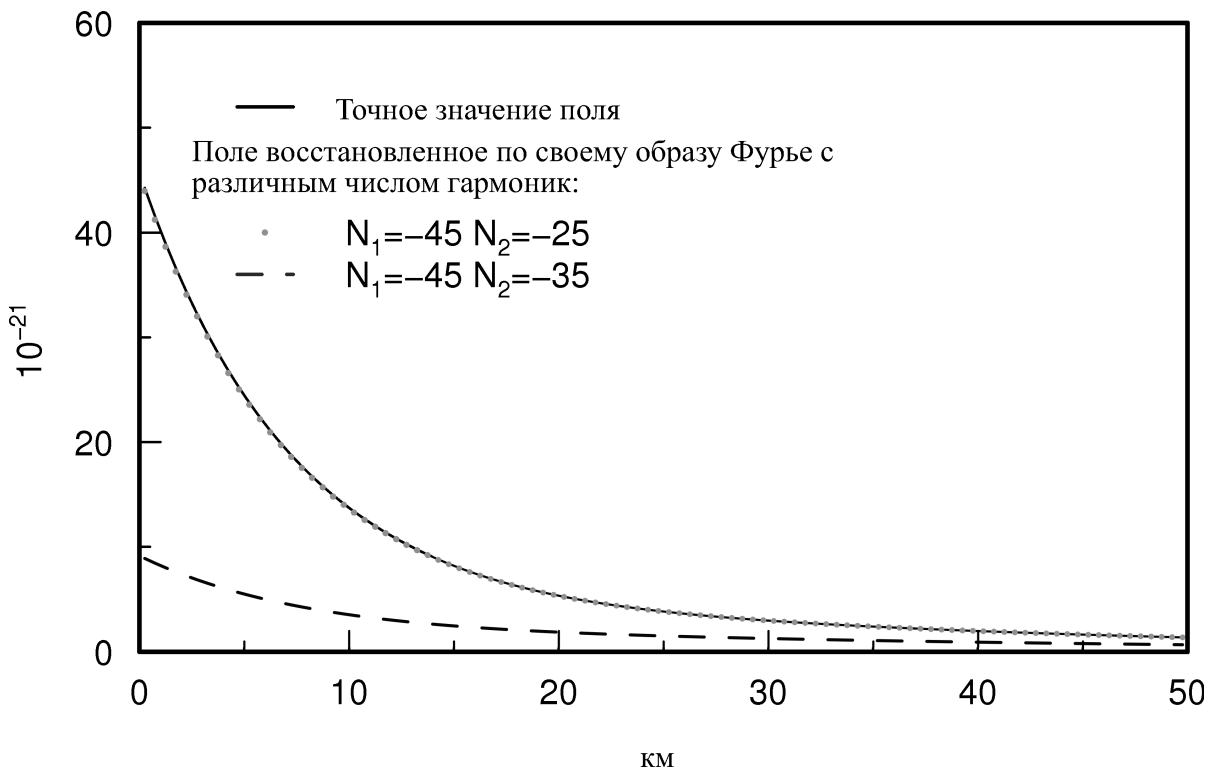


Рис. 2. Модуль компоненты  $E_x^1$  для модели слоистой среды, восстановленный по своему образу Фурье, с использованием различного числа гармоник

деления требуемых значений  $s, N_1, N_2$  использовался следующий подход. Аномалия, моделирующая море, заменялась бесконечным горизонтально-однородным слоем той же глубины  $h_s$  и проводимости  $\sigma_s$ , что и у моря. Для получившейся 3-х слойной среды проводился расчет компонент электромагнитного поля  $E^1, H^1$ , наведенных вертикальным диполем в требуемых точках. Затем для фиксированного значения  $s$  и  $N_1 = -100, N_2 = 100$  проводился расчет 201-го значения  $\xi$ , и для этих значений вычислялся образ Фурье  $e^1(\xi), h^1(\xi)$  электромагнитного поля. После этого проводилось восстановление поля  $E^1, H^1$  по его образу  $e^1(\xi), h^1(\xi)$ , но при этом использовались не 201-но  $(N_2 - N_1 + 1)$  слагаемое, а только часть из них,

так, чтобы поле было восстановлено с точностью до 1 процента.

В ходе этого вычислительного эксперимента было получено, что при  $s = \pi/40$  и  $N_1 = -45$ ,  $N_2 = -25$  требуемая точность восстановления поля в такой слоистой среде достигается — см. Рис.2.

Определив таким образом множество значений  $\{\xi_k\}$ , перейдем к выводу формул для тензоров  $\widehat{g}_E(y, z, y_0, z_0)$ ,  $\widehat{g}_H(y, z, y_0, z_0)$ .

## Тензорная функция Грина для квазитрехмерной задачи

Для решения квазитрехмерной задачи нам необходимо знать образы Фурье тензорной функции Грина  $\widehat{g}_E(y, z, y_0, z_0)$ . В [1] показано, что тензоры  $\widehat{G}_E$ ,  $\widehat{G}_H$ , могут быть выражены через три скалярные функции  $G_1$ ,  $G_2$  и  $g$  следующим образом:

$$\widehat{G}_E = \left\{ \begin{array}{ccc} G_1 + \frac{1}{k^2} \left( \frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 g}{\partial^2 x \partial z} \right) & \frac{1}{k^2} \left( \frac{\partial^2 G_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 g}{\partial x \partial y \partial z} \right) & \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 G_2}{\partial x \partial z} \\ \frac{1}{k^2} \left( \frac{\partial^2 G_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 g}{\partial x \partial y \partial z} \right) & G_1 + \frac{1}{k^2} \left( \frac{\partial^2 G_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 g}{\partial^2 y \partial z} \right) & \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 G_2}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{k^2} \left( \frac{\partial^2 G_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^3 g}{\partial x \partial^2 z} \right) & \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{1}{k^2} \left( \frac{\partial^2 G_1}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^3 g}{\partial y \partial^2 z} \right) & G_2 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 G_2}{\partial z^2} \end{array} \right\} \quad (8)$$

$$\widehat{G}_H = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - \frac{\partial G_1}{\partial z} & \frac{\partial G_2}{\partial y} - \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} & \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} \\ -\frac{\partial G_1}{\partial y} & \frac{\partial G_1}{\partial x} & 0 \end{array} \right\} \quad (9)$$

Величина  $k^2 = i\omega\sigma\mu$ , где  $\omega = 2\pi f$  — круговая частота,  $\sigma$  — кусочно-постоянная функция проводимости,  $\mu = \mu_0 = 4\pi 10^{-7}$  Гн/м — универсальная магнитная постоянная. Применив преобразование Фурье по переменной  $x$  к тензорным функциям Грина (8)-(9) получим:

$$\widehat{g}_E = \left\{ \begin{array}{ccc} \widetilde{G}_1 - \frac{\xi^2}{k^2} \left( \widetilde{G}_1 + \frac{\partial \widetilde{g}}{\partial z} \right) & \frac{i\xi}{k^2} \left( \frac{\partial \widetilde{G}_1}{\partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} \right) & \frac{i\xi}{k^2} \frac{\partial \widetilde{G}_2}{\partial z} \\ \frac{i\xi}{k^2} \left( \frac{\partial \widetilde{G}_1}{\partial y} + \frac{\partial^2 \widetilde{g}}{\partial y \partial z} \right) & \widetilde{G}_1 + \frac{1}{k^2} \left( \frac{\partial^2 \widetilde{G}_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 \widetilde{g}}{\partial^2 y \partial z} \right) & \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 \widetilde{G}_2}{\partial y \partial z} \\ i\xi \widetilde{g} + \frac{i\xi}{k^2} \left( \frac{\partial \widetilde{G}_1}{\partial z} + \frac{\partial^2 \widetilde{g}}{\partial z^2} \right) & \frac{\partial \widetilde{g}}{\partial y} + \frac{1}{k^2} \left( \frac{\partial^2 \widetilde{G}_1}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^3 \widetilde{g}}{\partial y \partial^2 z} \right) & \widetilde{G}_2 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 \widetilde{G}_2}{\partial z^2} \end{array} \right\} \quad (10)$$

$$\widehat{g}_H = \left\{ \begin{array}{ccc} -i\xi \frac{\partial \widetilde{g}}{\partial y} & \frac{\partial^2 \widetilde{g}}{\partial y^2} - \frac{\partial \widetilde{G}_1}{\partial z} & \frac{\partial \widetilde{G}_2}{\partial y} - \frac{\partial^2 \widetilde{g}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial \widetilde{G}_1}{\partial z} + \xi^2 \widetilde{g} & i\xi \frac{\partial \widetilde{g}}{\partial y} & -i\xi \widetilde{G}_2 + i\xi \frac{\partial \widetilde{g}}{\partial z} \\ -\frac{\partial \widetilde{G}_1}{\partial y} & -i\xi \widetilde{G}_1 & 0 \end{array} \right\} \quad (11)$$

где  $\widetilde{G}_1$ ,  $\widetilde{G}_2$  и  $\widetilde{g}$  — образы Фурье функций  $G_1$ ,  $G_2$  и  $g$ . Используя представление функций  $G_1$ ,  $G_2$  и  $g$ , в виде преобразование Бесселя [1] и известное соотношение между преобразованием Бесселя и двойным преобразованием

ем Фурье [3], получаем, что функции  $\tilde{G}_1$ ,  $\tilde{G}_2$ ,  $\tilde{g}$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\tilde{G}_1 &= \frac{i\omega\mu_0}{2\pi} \int_0^\infty u_1^0(z, z_0, \xi^2 + \nu^2) \cos(\nu(y - y_0)) d\nu \\ \tilde{G}_2 &= \frac{i\omega\mu_0}{2\pi} \int_0^\infty u_\sigma^0(z, z_0, \xi^2 + \nu^2) \cos(\nu(y - y_0)) d\nu \\ \tilde{g} &= \frac{i\omega\mu_0}{2\pi} \int_0^\infty \left( u_\sigma^1(z, z_0, \xi^2 + \nu^2) - \frac{du_1^0(z, \xi^2 + \nu^2)}{dz} \right) \frac{\cos(\nu(y - y_0)) d\nu}{\xi^2 + \nu^2},\end{aligned}\tag{12}$$

где  $u_\gamma^\delta(z, z_0, \xi^2 + \nu^2) = U_\gamma^\delta(z, z_0, \sqrt{\xi^2 + \nu^2})$ .  $U_\gamma^\delta(z, z_0, \sqrt{\xi^2 + \nu^2})$  — фундаментальная функция слоистой среды [1]. Для рассматриваемой двуслойной среды справедливы следующие формулы для  $U_1^0(z, z_0, \lambda)$ ,  $U_\sigma^0(z, z_0, \lambda)$ ,  $U_\sigma^1(z, z_0, \lambda)$ , при  $z \geq 0$ ,  $z_0 \geq 0$ :

$$\begin{aligned}U_1^0(z, z_0, \lambda) &= \frac{e^{-\eta|z-z_0|}}{\eta} - \frac{\lambda - \eta}{\eta(\lambda + \eta)} e^{-\eta(z+z_0)}, \\ U_\sigma^0(z, z_0, \lambda) &= \frac{e^{-\eta|z-z_0|}}{\eta} - \frac{1}{\eta} e^{-\eta(z+z_0)}, \\ U_1^1(z, z_0, \lambda) &= \text{sign}(z - z_0) e^{-\eta|z-z_0|} - e^{-\eta(z+z_0)},\end{aligned}\tag{13}$$

где  $\eta = \sqrt{\lambda^2 - i\omega\mu\sigma_b}$ .

Для численного решения интегрального уравнения (3) при фиксированном  $\xi$  использовался модифицированный метод интегральных токов [4]. Из формул (12), (13) следует, что двукратное интегрирование ядра уравнения (3), которое используется в этом методе, не составляет особой сложности. Интегралы по  $y$ ,  $y_0$ ,  $z$ ,  $z_0$  могут быть внесены под знак интегрирования по  $\nu$  в (12) и взяты аналитически.

## Результаты численного моделирования

Для исследуемой модели (Рис. 1) были проведены расчеты электромагнитного поля на частоте  $\nu = 1$  Гц для различных значений  $L$ . Поле при этом вычислялось в точках с координатами  $(x_r, y_r, h_s)$ ,  $y_r \in (0, L)$ ,  $x_r = 1000$  м — т.е. на линейном профиле, перпендикулярном берегу и расположенном на дне моря.

Одна из особенностей решения интегральных уравнений электродинамики модифицированным методом интегральных токов заключается в

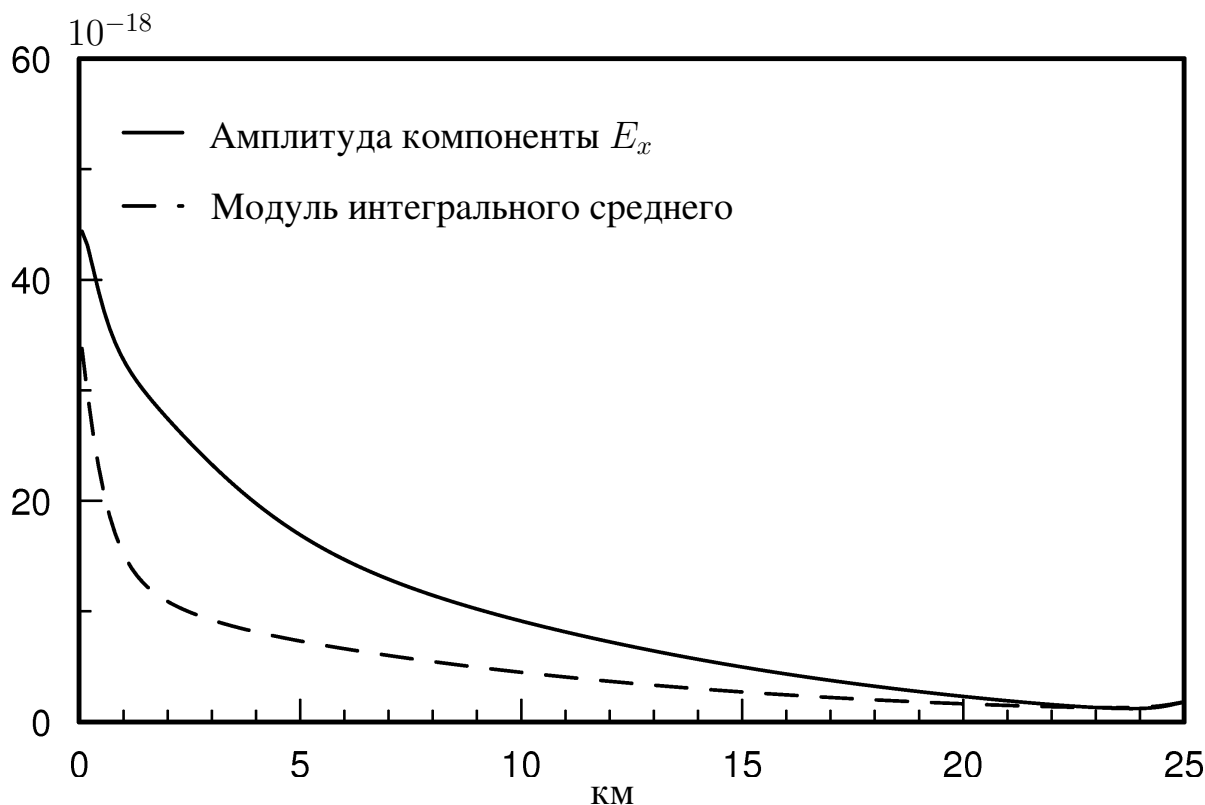


Рис. 3. Модули компоненты  $E_x$  и модули её интегральных средних, рассчитанные для различных размеров подобластей

том, что внутри аномалии получаются два приближения к точному значению электрического поля — собственно поле, рассчитанное в данной точке, и интегральное среднее по области, содержащей эту точку. На Рис.3 приведены амплитуда компоненты  $E_x$  на дне моря и её интегральное среднее по придонному слою, при дискретизации на подобласти размером 60 м по вертикали и 500 м по горизонтали.

Как видно из этого графика они существенно отличаются, что довольно неожиданно для случая, когда вертикальный размер подобласти примерно в 60 раз меньше длины волны в аномалии. Дело в том, что в исследуемом классе задач, амплитуда компоненты  $E_x$  существенно возрастает с глубиной — см. Рис. 4. Впервые этот эффект был обнаружен при решении квази-трехмерной задачи морского зондирования.

Такое поведение поля, вызванное подкачкой энергии подо дном, так же может наблюдаться и внутри проводящего слоя в простейшей 3-х слойной модели: воздух, сильно проводящий слой, изолирующее полупространство, если источником поля является вертикальный магнитный диполь, расположенный в воздухе или на границе воздуха и проводящего слоя.

Исследуем вопрос о влиянии правого берега на результат измере-



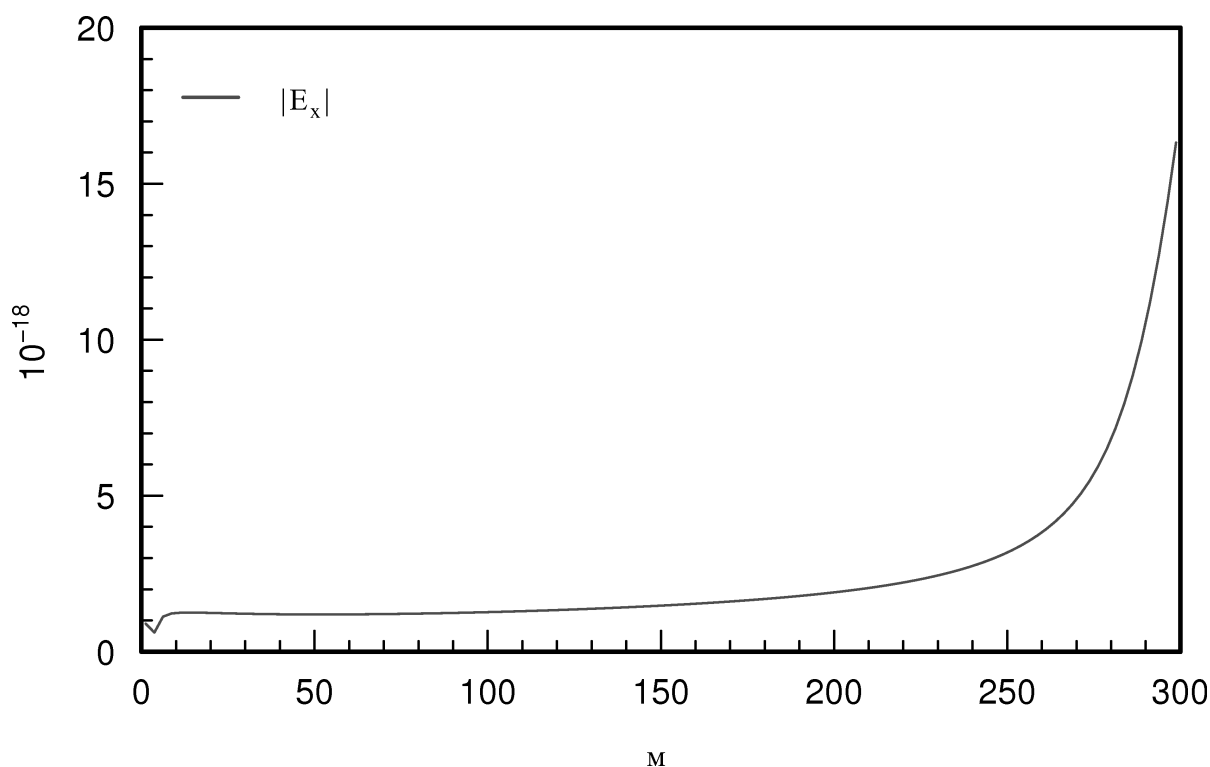


Рис. 4. Модуль компоненты  $E_x$  электрического поля на различных глубинах.

ний — т.е. насколько величина  $L$  влияет на поле, наблюдаемой в точках  $0 \leq y \leq Y < L$ , где  $Y$  — расстояние от левого берега до самой дальней точки наблюдения. На Рис 5 приведены амплитуды компоненты  $E_x$  для случаев  $L = 25$  км и  $L = 50$  км.

Как видно из этих графиков правый берег оказывает влияние только в непосредственной близости от него. Это позволяет при решении задач морского зондирования выбирать  $L$  не как реальную ширину моря, а исходя из расстояния от левого берега до точки наблюдения. Важным вопросом, возникающим при морском зондировании, является вопрос о береговом эффекте — канализации тока вдоль берега. Особый интерес представляет определение ширины такого канала. Поскольку  $E_x$  достаточно быстро убывает с ростом  $Y$ , то, как видно из Рис. 3, явно выделить такой канал анализируя электрическое поле довольно трудно. Гораздо удобнее определять его по изменению магнитного поля. На Рис. 6 приведены графики для компонент  $H_y$  и  $H_z$  магнитного поля на дне моря. Из графика для  $H_z$  хорошо видно, что ширина прибрежного токового канала на частоте 1 Гц составляет 2 км — именно на этом участке просиходит резкий скачок вертикальной компоненты магнитного поля, а дальше она монотонно убывает.

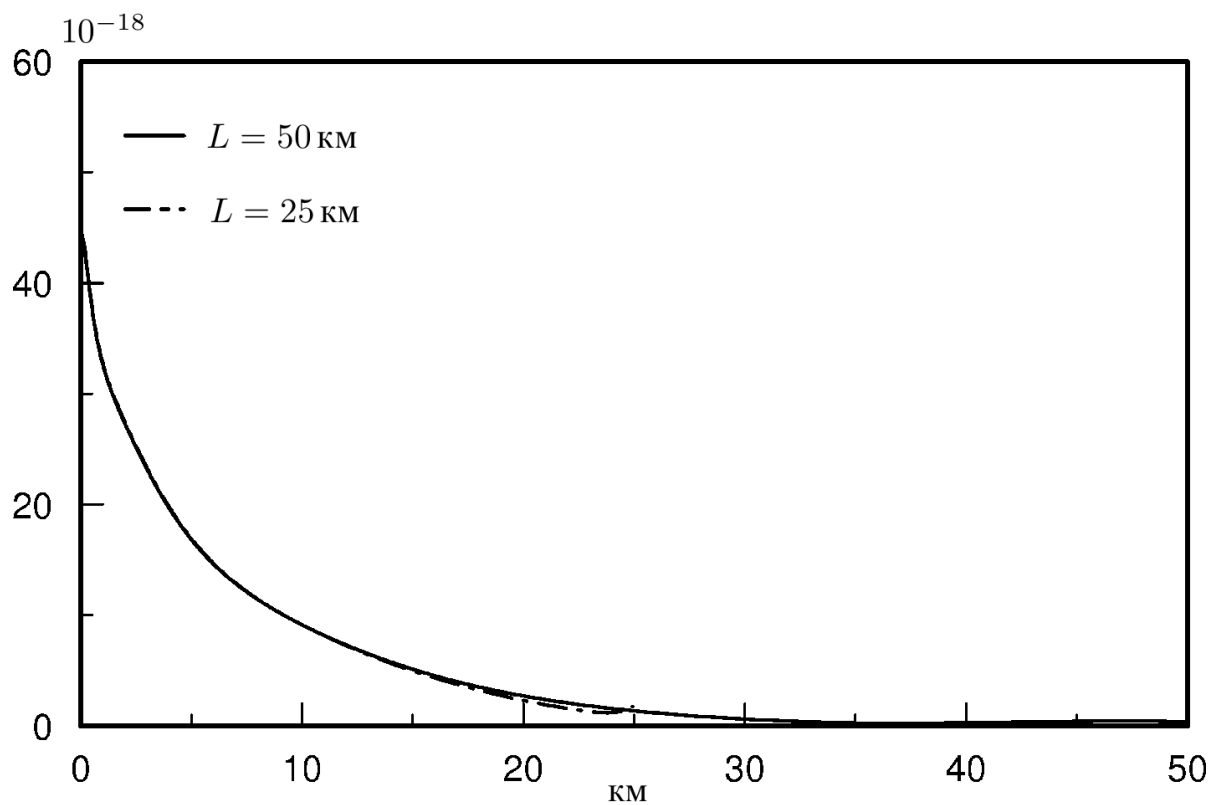


Рис. 5. Модуль компоненты  $E_x$  на дне для различных значений  $L$ .

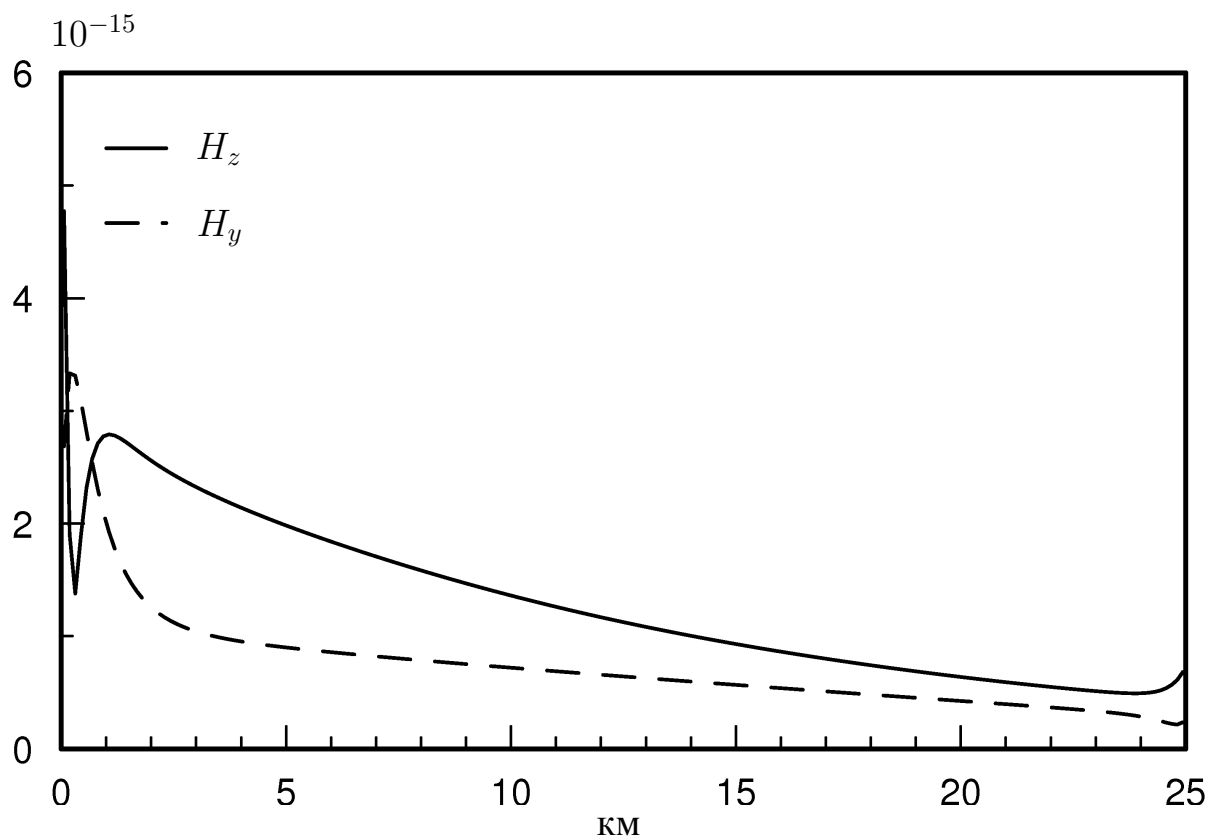


Рис. 6. Модули компонент  $H_y$  и  $H_z$  на дне.

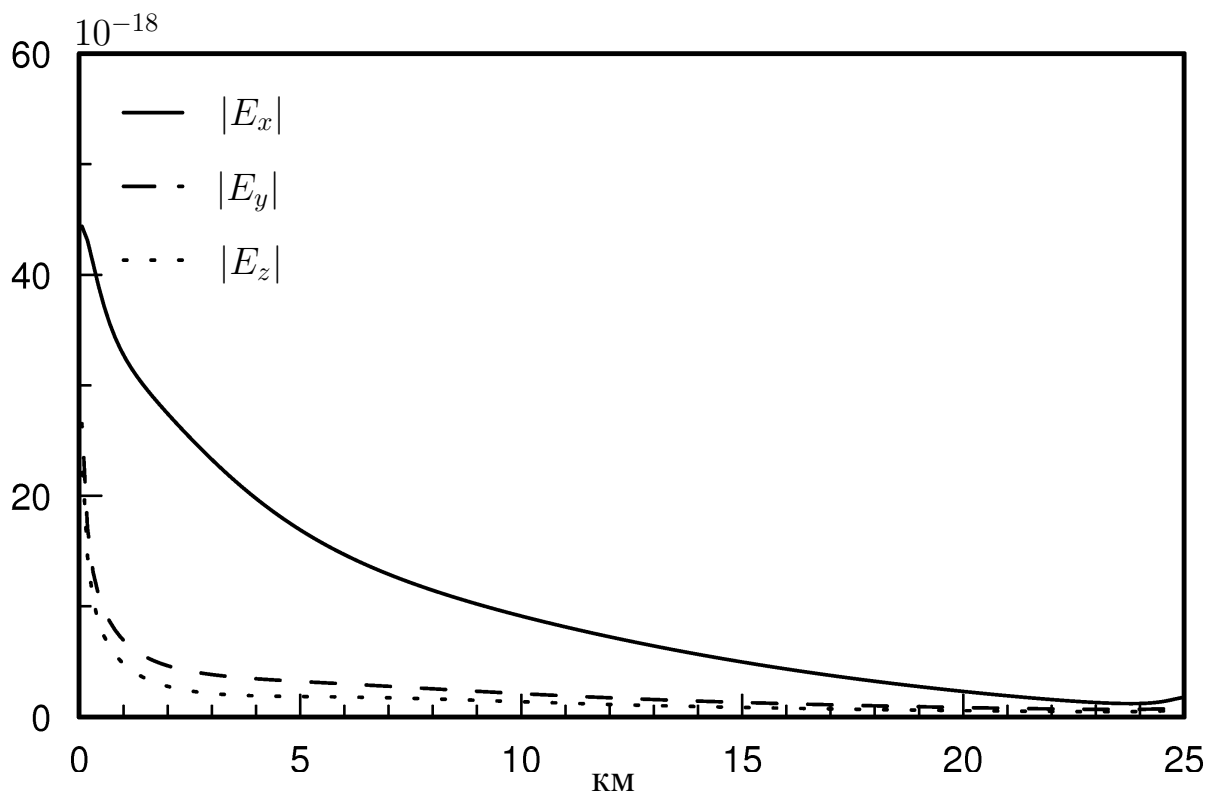


Рис. 7. Амплитуды компонент электрического поля

На Рис. 7 приведены амплитуды всех 3-х компонент электрического поля. Как и следовало ожидать из геометрических соображений компонента  $E_x$  в несколько раз превосходит компоненты  $E_y$  и  $E_z$ . Однако, в отличие от первичного поля, в котором  $E_z^0 = 0$ , считать компоненты  $E_y$  и  $E_z$  равными нулю по сравнению с  $E_x$  нельзя.

## Литература

- [1] Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике. М., МАКС Пресс, 2008.
- [2] T.Ooura, M.Mori., A robust double exponential formula for fourier type integrals, J. Comput. Appl.Math., №112, 1999, pp 229–241.
- [3] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, М.: Издательство МГУ, 2004.
- [4] М.С. Кругляков. Модифицированный метод интегральных токов в электродинамике неоднородных сред, Прикладная математика и информатика №35 М.: МАКС Пресс 2010. с. 25–35.