

О БЫСТРОМ МЕТОДЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОЛЯ ВЕРТИКАЛЬНОГО МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ НАД СЛОИСТОЙ СРЕДОЙ ¹

1 Введение

В настоящее время при решении геологических и экологических задач активно используются методы аэроэлектронзондирования. Конечной целью аэрозондирования является определение распределения электропроводности в верхних (до 500 м) областях Земли по измеренным на разных частотах компонентам магнитного поля. Одним из методов зондирования является дипольное индукционное профилирование. В этом методе источником электромагнитного поля является рамка с током (магнитный диполь), находящаяся на самолете или вертолете. Измеряемыми величинами являются компоненты магнитного поля, которые определяются датчиками в гондole, связанной с летательным аппаратом. Отметим, что, как правило, измеряется не полное поле в точке измерения, а так называемое вторичное (отраженное) поле – т.е. поле, возникающее при отражении электромагнитной волны, излучаемой нашим источником, от Земли. Это вызвано тем, что первичное поле – поле, наведенное непосредственно источником на приемник, превосходит отраженное поле по величине на порядки, что не позволяет определять какие-либо свойства среды по непосредственно измеренному полному полю.

Определение распределения электропроводности в Земле по измеряемым компонентам магнитного поля является обратной задачей, и для её решения необходимо иметь алгоритм быстрого вычисления магнитного поля для различных моделей строения подстилающей среды. Таким образом мы приходим к задаче расчета магнитного поля, возбуждаемого вертикальным магнитным диполем над подстилающей слоистой средой.

Легко видеть, что эта задача обладает аксиальной симметрией [1], и в цилиндрической системе координат имеем следующие представления для электрического поля:

$$\vec{E} = (0, E_{\varphi}(\rho, z), 0)$$

¹Работа выполнена при поддержке по проектам РФФИ 05-01-00244 и 07-05-00523.

и для магнитного поля:

$$\vec{H} = (H_\rho(\rho, z), 0, H_z(\rho, z)),$$

причем магнитное поле определяется через электрическое:

$$H_\rho = \frac{i}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_\varphi}{\partial z}; \quad H_z = -\frac{i}{\omega\mu_0\rho} \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho E_\varphi), \quad (1)$$

где $\omega = 2\pi\nu$ – круговая частота поля, совпадающая с рабочей частотой источника, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ гн/м – магнитная проницаемость вакуума. Угловая компонента электрического поля E_φ является решением следующей задачи:

$$\frac{\partial}{\partial\rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} (\rho E_\varphi) \right) + \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2} + k^2(z) E_\varphi = -k^2(z) E_\varphi^0, \quad (2)$$

где $k^2 = i\omega\mu_0\sigma(z)$ – волновое число, $\sigma(z)$ – электропроводность слоистой среды, $\sigma(z) = 0$, при $z > 0$, E_φ^0 – угловая компонента первичного поля вертикального магнитного диполя. Как уже отмечалось, $E_\varphi^0(\rho, z)$ имеет аналитическое представление:

$$E_\varphi^0(\rho, z) = i\omega\mu_0 \frac{m\rho}{\left((z - h_{src})^2 + \rho^2 \right)^{3/2}}, \quad (3)$$

где h_{src} – высота источника над Землей, m – момент магнитного диполя ($m_z = \pi r_0^2 I$).

Электрическое поле $E_\varphi(\rho, z)$ и его нормальная производная $\frac{\partial E_\varphi}{\partial z}$ непрерывны на границах разрыва электропроводности $\{z = z_i, i = 0, 1 \dots N\}$, $z_0 = 0$

тиг земная поверхность. На бесконечности E_φ стремится к нулю. Таким образом, имеем следующую задачу для отыскания E_φ :

$$\left\{ \begin{array}{l} L E_\varphi + k_i^2 E_\varphi = -k_i^2 E_\varphi^0 \\ \text{при } z_i < z < z_{i-1} \leq 0 \\ k_i^2 = k^2(z) \text{ при } z_i < z < z_{i-1} \leq 0, i = 1, 2 \dots N \\ L E_\varphi = 0 \text{ при } z > z_0 = 0 \\ [E_\varphi]_{z_i} = 0 \quad \left[\frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right]_{z_i} = 0 \text{ при } i = 0, 1 \dots N \\ E_\varphi \rightarrow 0 \text{ при } \rho^2 + z^2 \rightarrow \infty \\ L V \equiv \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} (\rho V) \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{array} \right. \quad (4)$$

Применив к задаче (4) преобразование Бесселя первого порядка и воспользуемся его линейностью:

$$E_{\varphi} = i\omega\mu_0 m \int_0^{\infty} J_1(\lambda\rho)U(z, \lambda)\lambda d\lambda, \quad (5)$$

где образ поля $U(z, \lambda)$ по переменной z удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} U''_{zz} - \eta_i^2 U = -k_i^2 e^{-(h_{src}-z)\lambda} \\ \text{при } z \leq 0 \quad i = 1, 2 \dots n \\ U''_{zz} - \lambda^2 U = 0 \text{ при } z > 0 \\ [U]_{z_i} = 0; \quad [U'_z]_{z_i} = 0; \quad i = 0, 1 \dots n \\ U \rightarrow 0 \text{ при } |z| \rightarrow \infty \\ \eta_i^2 = \lambda^2 - k_i^2 \quad \text{Re } \eta > 0. \end{cases} \quad (6)$$

Формулы (1) и (5)-(6) дают нам выражения для определения вторичного электромагнитного поля вертикального магнитного диполя с моментом m , расположенного в точке $(0, 0, h_{src})$:

$$\begin{aligned} E_{\varphi}(\rho, z) &= i\omega\mu_0 m \int_0^{\infty} J_1(\lambda\rho)U(z, \lambda)\lambda d\lambda, \\ H_{\rho}(\rho, z) &= -m \int_0^{\infty} J_1(\lambda\rho) \frac{\partial U(z, \lambda)}{\partial z} \lambda d\lambda, \\ H_z(\rho, z) &= m \int_0^{\infty} J_0(\lambda\rho)U(z, \lambda)\lambda^2 d\lambda, \end{aligned} \quad (7)$$

Можно показать, что при $z \geq 0$ решение задачи (6) всегда представимо в следующем виде:

$$U(z, \lambda) = q(\lambda)e^{-\lambda(h_{src}+z)}, \quad (8)$$

причем функция $q(\lambda)$ всегда может быть выписана в аналитическом, хотя и весьма громоздком, виде. Для частного случая $N = 2$, $\sigma_1 \neq 0$, $q(\lambda)$ имеет вид:

$$q(\lambda) = \frac{(\lambda - \eta_1)(\eta_1 + \eta_2) + (\lambda + \eta_1)(\eta_1 - \eta_2)e^{-2\eta_1 h_1}}{(\lambda + \eta_1)(\eta_1 + \eta_2) + (\lambda - \eta_1)(\eta_1 - \eta_2)e^{-2\eta_1 h_1}}. \quad (9)$$

Отметим, что формула (8), показывающая образ *измеряемого* поля при $z \geq 0$, содержит экспоненциальный множитель $e^{-\lambda(h_{src}+z)}$, независимо от количества слоев, что позволяет говорить о её быстром убывании по λ . Так же можно показать, что образы *полных* полей внутри слоистой системы содержат в явном виде экспоненциальные множители вида $e^{-\lambda h_{src}}$.

Одной из стандартных нормировок, которые используют в аэроэлектроразведке является нормировка на полусумму высот источника и приемника. Прделав такую нормировку, получим следующие представление функции U в точке измерения:

$$U(\lambda) = q(\lambda)e^{-2\lambda}. \quad (10)$$

Из (7),(10) видно, что расчет вторичных электромагнитных полей в воздухе, возбуждаемых магнитным диполем, сводится к вычислению интегралов следующего вида:

$$\begin{aligned} E_\varphi &= i\omega\mu_0 m \int_0^\infty J_1(\lambda\rho)q(\lambda)e^{-2\lambda}\lambda d\lambda, \\ H_\rho &= m \int_0^\infty J_1(\lambda\rho)q(\lambda)e^{-2\lambda}\lambda^2 d\lambda, \\ H_z &= m \int_0^\infty J_0(\lambda\rho)q(\lambda)e^{-2\lambda}\lambda^2 d\lambda, \end{aligned} \quad (11)$$

Следовательно, для быстрого расчета поля необходимо иметь эффективный алгоритм вычисления интегрального преобразования Бесселя на нашем классе функций q .

2 Методы вычислений

Поскольку подынтегральные функции в (7) содержат экспоненту, то их можно вычислять по стандартным квадратурным формулам, заменив область интегрирования с полупрямой на отрезок. Взяв достаточно большое число точек и относительно небольшой отрезок (экспонента быстро убывает), можно проводить вычисления по квадратурным формулам с любой наперед заданной абсолютной точностью, но при этом возникают следующие проблемы:

- требуется вычислять функцию $f(\lambda)$ в большом числе точек;
- требуется вычислять соответствующую функцию Бесселя в большом числе точек.

Ясно, что такой метод назвать быстрым затруднительно, но он обладает и несомненным достоинством. Для него легко оценивается абсолютная погрешность, что и позволяет его использовать как способ вычислений "точного" значения интеграла.

В настоящее время для вычисления преобразования Бесселя наиболее часто используется метод, предложенный Андерсоном [2]. Однако для нашего случая, когда подынтегральная функция содержит быстро затухающую экспоненту, метод Андерсона дает большие погрешности. Недавно в работе [3] был предложен метод интерполяции подынтегральной функций линейной комбинацией N экспонент с заданными показателями ε_j . Затем полученные интегралы от произведения экспонент на Бесселевскую функцию вычисляются аналитически.

К сожалению, для наших задач такой метод оказался неприемлемым. Был проведен ряд вычислительных экспериментов, показавших, что взаимосвязь между размером сетки, выбором ε_j и устойчивостью для наших задач весьма необычна. В частности при $N = 20$ и $N = 50$ решение возникающей системы линейных уравнений методом отражений, одним из самых вычислительно устойчивых, дает невязку порядка 10^2 , что не приемлемо, тогда как при $N = 53$ невязка имеет порядок 10^{-6} . Но даже такой порядок нельзя назвать удовлетворительным при применении методов интерполяции. Дело в том, что система линейных уравнений, возникающая при построении интерполирующей функции, обладает матрицей с довольно большим числом обусловленности – порядка 10^{17} . Для ряда задач, в частности для модельных примеров из [3], это не приводит к серьёзным проблемам, однако для наших задач столь большое число обусловленности оказалось критическим.

Анализ этого эффекта показал, что необходимо не интерполировать, а аппроксимировать подынтегральную функцию с некой точностью, что позволило существенно улучшить метод [3] для наших задач.

3 Аппроксимационный вариант метода

Рассмотрим наш класс функций q более подробно.

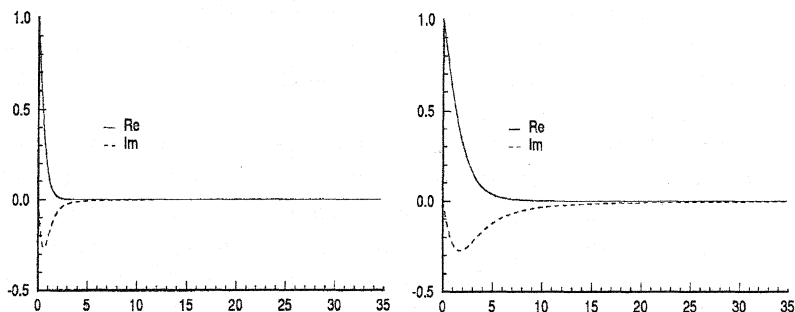


Рис 1: Типичное поведение функции $q(\lambda)$

Можно показать, что $q(\lambda)$ быстро убывает при $\lambda \rightarrow \infty$. В сочетании с наличием подынтегральной экспоненты, можно утверждать что значение интегралов вида (7) определяется поведением $q(\lambda)$ при сравнительно малых λ . Таким образом нам достаточно аппроксимировать нашу функцию на относительно малом отрезке, но это нужно сделать с достаточно высокой точностью. Это позволяет выдвинуть гипотезу, что для вычисления наших интегралов (7) с хорошей точностью, можно воспользоваться аналогом метода из [3], используя аппроксимации наших функций системой из небольшого $\approx 10 - 20$ числа экспонет.

Таким образом имеем следующую задачу аппроксимации – найти такие a_j $j = 1 \dots M$, что бы погрешность аппроксимации

$$\left\| q - \sum_{j=0}^M a_j e^{-\varepsilon_j \lambda} \right\|_{E_h}^2 = \sum_{i=0}^N \left(q(\lambda_i) - \sum_{j=0}^M a_j e^{-\varepsilon_j \lambda_i} \right)^2 \quad (12)$$

на нашей сетке была наименьшей. При этом особый интерес представляет случай, когда $M \approx 10 - 20$, $N \approx 50 - 60$. Решим эту задачу при фиксированной сетке и показателях экспонет. Продифференцируем выражение (12) по a_j , приравняем производные нулю и получим

следующую систему линейных уравнений M -го порядка

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^* \mathbf{G} \mathbf{a} &= \mathbf{G}^* \mathbf{q} \\ \mathbf{G} &= \{g_{i,j}\} = \{e^{-\lambda_i \varepsilon_j}\} \quad i = 0 \dots N \quad j = 0 \dots M \\ \mathbf{q} &= (q(\lambda_0), \dots, q(\lambda_N))^T \\ \mathbf{a} &= (a_0, \dots, a_M)^T \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом мы переходим от задачи вычисления преобразования Бесселя от функции U вида

$$U(\lambda) = q(\lambda)e^{-2\lambda},$$

к задаче вычисления преобразования Бесселя от функции

$$\hat{U} = \sum_{j=0}^M a_j e^{-(2+\varepsilon_j)\lambda},$$

которое можно вычислить аналитически.

Естественно возникает вопрос об вычислительной устойчивости данного метода. Понятно, что основная проблема устойчивости заключена в решении системы (13). Её число обусловленности $\text{cond}(\mathbf{G}^* \mathbf{G})$ имеет порядок $\approx 10^8$, что, хотя и существенно меньше чем в случае с интерполяцией, все же весьма велико. К счастью, опасения о вычислительной неустойчивости не оправдались. Расчеты, проведенные для различных функций f описывающих слоистую систему, показали, что величина невязки (12), при $M = 15$, $N = 50$ имеет порядок не больший чем 10^{-16} , что позволяет говорить о хорошей устойчивости решения системы, а следовательно и метода.

Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} r_j^{H_z}(\rho) &= \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) e^{-(2+\varepsilon_j)\lambda} \lambda^2 d\lambda = \frac{2(2+\varepsilon_j)^2 - \rho^2}{(\rho^2 + (2+\varepsilon_j)^2)^{\frac{5}{2}}} \\ \mathbf{r}^{H_z} &= (r_0^{H_z}, \dots, r_M^{H_z}) \\ r_j^{H_\rho}(\rho) &= \int_0^\infty J_1(\lambda \rho) e^{-(2+\varepsilon_j)\lambda} \lambda^2 d\lambda = \frac{3\rho(2+\varepsilon_j)}{(\rho^2 + (2+\varepsilon_j)^2)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\mathbf{r}^{H\rho} = (r_0^{H\rho}, \dots, r_M^{H\rho})$$

$$r_j^{E\varphi}(\rho) = i\omega\mu_0 \int_0^\infty J_1(\lambda\rho) e^{-(2+\varepsilon_j)\lambda} \lambda d\lambda = \frac{i\omega\mu_0\rho}{(\rho^2 + (2 + \varepsilon_j)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathbf{r}^{E\varphi} = (r_0^{E\varphi}, \dots, r_M^{E\varphi})$$

Тогда при известных a_j значение интегралов (7) будут вычисляться аналитически по следующим формулам:

$$H_z(\rho, \omega) = \sum_{j=0}^M r_j^{H_z}(\rho) a_j(\omega) = \mathbf{r}^{H_z} \mathbf{a}$$

$$H_\rho(\rho, \omega) = \sum_{j=0}^M r_j^{H_\rho}(\rho) a_j(\omega) = \mathbf{r}^{H_\rho} \mathbf{a} \quad (15)$$

$$E_\varphi(\rho, \omega) = \sum_{j=0}^M r_j^{E_\varphi}(\rho) a_j(\omega) = \mathbf{r}^{E_\varphi} \mathbf{a}$$

Рассмотрим соотношения (13), (14), (15), тогда

$$\mathbf{a} = (\mathbf{G}^* \mathbf{G})^{-1} (\mathbf{G}^* \mathbf{q})$$

$$H_z = \mathbf{r}^{H_z} \mathbf{a} = \{\mathbf{r}^{H_z} (\mathbf{G}^* \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^*\} \mathbf{q} = \mathbf{S}^{H_z}(\rho) \mathbf{q}(\omega)$$

$$H_\rho = \mathbf{r}^{H_\rho} \mathbf{a} = \{\mathbf{r}^{H_\rho} (\mathbf{G}^* \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^*\} \mathbf{q} = \mathbf{S}^{H_\rho}(\rho) \mathbf{q}(\omega)$$

$$E_\varphi = \mathbf{r}^{E_\varphi} \mathbf{a} = \{\mathbf{r}^{E_\varphi} (\mathbf{G}^* \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^*\} \mathbf{q} = \mathbf{S}^{E_\varphi}(\rho) \mathbf{q}(\omega)$$
(16)

Из соотношений (16) видно, что величины $\mathbf{S}^{E_\varphi}(\rho)$, $\mathbf{S}^{H_\rho}(\rho)$, $\mathbf{S}^{H_z}(\rho)$ зависят только от ρ , набора $\{\varepsilon_j\}$ и сетки. Это позволяет, выбрав ρ , $\{\varepsilon_j\}$ и сетку, один раз их вычислить, а после вычислять значения (7) по формулам из (16). Отметим, что если нас интересует измерения при нескольких ρ , то принципиального отличия не будет – в выражениях (14) и соответственно (16) будут фигурировать не векторы, а матрицы.

Соотношения (16) фактически позволяют вычислять наши интегралы за время линейное по размеру сетки N , а поскольку $N \approx 50$, то это весьма быстро. Как было сказано выше, наш класс интегралов можно вычислять с помощью стандартных квадратурных формул с наперед заданной абсолютной точностью. Это позволяет провести оценку погрешности аппроксимационного метода на нашем классе функций, просто сравнивая результаты вычислений интегралов разными способами. Расчеты показали, что относительная погрешность не превосходит 0.1%,

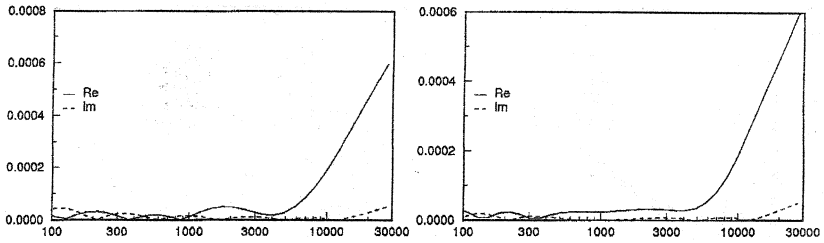


Рис 2: Погрешность расчета интегралов в зависимости от частоты (в герцах) для двухслойной и четырехслойной моделей

а на большинстве частот существенно меньше (см Рис. 2). Этот результат получен при следующих параметрах метода:

$$M = 15 \quad N = 50 \quad \lambda_i = 0.001 * (1.1912)^i \quad \varepsilon_j = 0.35 * (1.6846)^j \quad (17)$$

Легко видеть, что при низких частотах (наиболее важных для зондирования) погрешность вычислений весьма мала – менее 0.01%. При росте частоты ошибка возрастает, но до 30000 Гц остается менее 0.1%.

4 Вычислительный эксперимент

Были проведены расчеты поля для трехслойной модели с различными параметрами. На Рис.3 приведены расчеты магнитного поля для различной проводимости второго слоя, а на Рис.4 – для различных толщин слоя при постоянной его проводимости. Как видно из графиков, вертикальная компонента магнитного поля существенно зависит от параметров среды, что позволяет говорить о возможности решения обратной задачи.

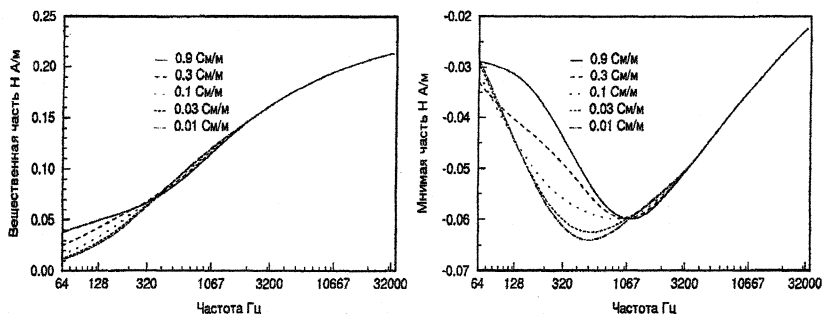


Рис 3: Вещественная и мнимая части вторичного поля для различных проводимостей второго слоя σ_2 .

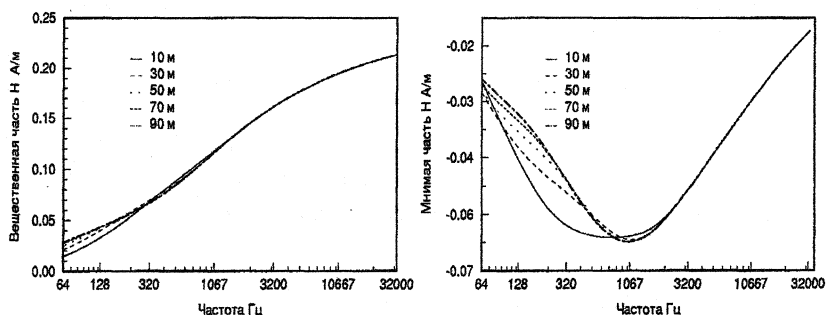


Рис 4: Вещественная и мнимая части вторичного поля для различных толщин второго слоя.

Литература

1. Дмитриев В.И., Электромагнитные поля в неоднородных средах. Издательство Московского Университета, Москва 1969г. с 131.
2. Anderson W.L. Numerical integration of related Hankel transforms of order 0 and 1 by adaptive digital filtering. Geophysics, 1979, 44, p. 1287-1305
3. Pravin K Gupta, Sri Niwas and Neeta Chaudhary. 2006 Fast computation of Hankel Transform using orthonormal exponential approximation of complex kernel function. Journal of Earth System Science Vol. 115, No. 3.