

Раздел II. Математическое моделирование

В.И. Дмитриев¹, Е.С. Куркина¹

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ, СВЯЗЫВАЮЩЕЙ РОСТ ВВП С ИЗМЕНЕНИЕМ ГОСУДАРСТВЕННОГО ДОЛГА *

Введение

В последнее время международные инвестиции начинают играть все большую роль в росте ВВП страны. С другой стороны, они приводят к образованию государственного долга и обременительной обязанности его обслуживания. Как это не парадоксально огромные государственные задолженности имеют не столько слабые развивающиеся страны, сколько ведущие мировые экономики[1]-[9]. Во многих странах Европы отношение государственного долга (ГД) к валовому внутреннему продукту (ВВП) растет после Второй Мировой Войны. У некоторых из стран, таких как Италия, Греция, Япония, США государственный долг превысил ВВП. Государственный долг и ВВП США в конце 2017 года составляли 21,676 и 19.5 трлн. долларов, соответственно (отношение составляло более 111%). Почти в два раза меньший долг у Японии – 12,9 трлн. долларов (она находится на втором месте.), но по отношению к ВВП (5.1 трлн долларов) Япония занимает первое место с 253%. Замыкает тройку Китай с долгом в 2.991 трлн. долларов и ВВП в 18.088 трлн. дол. Общемировой государственный долг в 2017 году достиг 60 триллионов долларов США.

По отношению к ВВП критический уровень задолженности считается от 60% по расчетам МВФ и от 80-100% по расчетам Всемирного банка. При превышении этого уровня погашение финансовой внешней долга идет за счет перебрасывания ресурсов, и вместо производства товаров и услуг для внутренних нужд государство производит товары для экспортной торговли.

Казалось бы, что кредитная финансовая задолженность перед другими странами для государства не несет в себе ничего хорошего – это неэффективное использование полученных в кредит денег, обслуживание кредитных обязательств, экономическая зависимость от страны-кредитора, ведущая к изменению политических отношений между государствами. Но эксперты экономики и финансов и во внешнем долге находят положительные стороны:

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект: 18-01-00619.

- любой иностранный заем улучшает экономическое положение страны-заемщика;
- приток иностранного капитала помогает в развитии определенных сфер экономики (например, транспортной, энергетической и т. д.);
- восстанавливается общий бюджет государства.

Но эти положительные аспекты начинают работать только в случае эффективного распределения заемных денежных средств. Эффективное использование долга может стать мощным фактором экономического роста, позволяющим сглаживать экономические флуктуации и дающим дополнительные финансовые ресурсы. С другой стороны, повышение государственного долга до критической отметки может стать серьезным негативным фактором не только экономического, но и политического значения. Следовательно, возникает необходимость управления и прогнозирования государственного долга. Это можно сделать с помощью математического моделирования. Адекватная динамическая математическая модель позволяет изучить степень влияния различных макроэкономических параметров на рост государственных задолженностей и выработать оптимальную стратегию.

В работе предложена достаточно общая математическая модель, описывающая взаимосвязь роста ВВП с изменением государственного долга (ГД). В основе ее лежит система двух линейных ОДУ. Целью работы является изучение влияния внешних инвестиций, приводящих к образованию государственного долга, на рост ВВП. В зависимости от значения параметров анализируется динамика модели. Найдены условия, когда внешние займы становятся мощным фактором устойчивого экономического роста. Определены критические параметры системы, при которых государство становится банкротом и не может платить по долгам. Исследованы условия наличия игры Понци (финансовой пирамиды) при росте государственной задолженности и др.

1. Модель взаимосвязанного роста государственного долга и ВВП

Как известно, возрастание ВВП определяется инвестициями, их долей в ВВП и превышением общего объема инвестиций над величиной капитала, потребленного в процессе производства. Ведущими факторами роста ВВП являются вовлечение в производство дополнительных ресурсов, а также увеличение производительности факторов производства за счет научно-технического прогресса, то есть модернизация производства, но которую тоже требуются инвестиции. Большую роль в этом играют государственные заимствования, которые приводят к образованию государственного долга.

В настоящее время в Интернете на сайтах известных международных организаций можно найти обширные базы данных по изменению ГД и ВВП различных стран [1]-[9]. Анализ этих данных показывает, что экономическое развитие и рост ВВП тесно связаны с иностранными займами и, следовательно, с ростом ГД. Даже в том случае, когда заемные средства не вкладываются непосредственно в экономику, а идут на решение крупных социальных, стихийных и других проблем, они позволяют сбалансировать бюджет и сохранить экономический рост.

Государственный долг может быть как внешним, так и внутренним. Внутренний долг, или долг государства перед своими же гражданами, означает внутренний трансферт между ними в пределах своей страны. Внешний долг – это чистый трансферт из страны, который ложится тяжелым бременем на экономику. Кроме того, он не может быть погашен с помощью денежной эмиссии, как внутренний долг, так как исчисляется в иностранной валюте.

Источником выплат по долгу в самом общем смысле является ВВП страны. Входящие в ВВП доходы страны от международной деятельности и внутренние доходы страны представляют собой источники поступлений в государственный бюджет. Выплаты как по внешнему, так и по внутреннему долгу происходят из первичного профицита бюджета. Страны кредитеры и международные финансовые институты, перед тем как делать инвестиции оценивают платежеспособность страны, объем инвестиций и договариваются об условиях и сроках погашения. Существуют модели управления долгом и модели платежеспособности, которые используются для расчетов возможности выплаты долга государством–заемщиком [10]-[12]. Они учитывают много экономических параметров, таких как курс валют, уровень инфляции, темп роста реального ВВП, сальдо торгового баланса и т.д. Слабым местом во всех этих моделях является долгосрочный прогноз значений всех этих параметров, а значит и финансового состояния заемщика и его способности выплачивать долги в будущем.

В настоящей работе предлагается достаточно общая математическая модель, описывающая совместный рост государственного долга (внешнего) и ВВП. Исследуются возможности роста ВВП за счет увеличения долга, возможности его погашения и другие аспекты влияния их друг на друга.

Обозначим через $Q(t)$ объем ВВП страны, а через $B(t)$ объем государственного долга; $Q(t)$ и $B(t)$ измеряются в долларах США. Для изменения ВВП и государственной задолженности можно вывести следующие уравнения:

$$\frac{dQ}{dt} = q(\alpha Q + I) - \mu Q - \beta Q - (r + w)B, \quad (1)$$

$$\frac{dB}{dt} = -wB + I + S, \quad (2)$$

где αQ – доля ВВП, направленная на развитие экономики, $0 \leq \alpha < 1$;

I – инвестиции в экономику за счет внешних государственных займов.

Будем считать, что $I = \gamma Q$, $0 \leq \gamma < 1$;

q – эффективность инвестиций;

μQ – затраты из ВВП, идущие на обслуживание ВВП, $0 < \mu < 1$,

βQ , S – соответственно доля ВВП и часть прироста долга (тоже равная какой-то доли ВВП), идущие на социальные или военные расходы, или на ликвидацию последствий стихийных бедствий или аварий, и другие расходы, не связанные непосредственно с развитием экономики, $0 \leq \beta < 1$, $S = \delta Q$, $0 \leq \delta < 1$;

$(r + w)B$ – выплаты кредиторам по государственному долгу, включающие в себя уплату по процентам $r(t)$ и выплату части $w(t)$ самих долгов, $0 < (r + w) < 1$,

Прокомментируем, полученную модель. Итак, государственный долг возникает, когда в бюджете не хватает средств (αQ) для инвестиций в экономику, или на другие расходы, не связанные с развитием ВВП (βQ). Тогда государство делает заем. Займы могут быть как разовыми (тогда ГД увеличивается скачком, изменяются доли выплат r и w , и может измениться темп роста ВВП), так и регулярными, в виде регулярных траншей в течение какого-то времени. Размер займов связан с объемом ВВП страны, поэтому естественно положить, что они равны какой-то доли ВВП: $I = \gamma Q$ и $S = \delta Q$.

Образовавшийся долг требует обслуживания, регулярных выплат в размере $(r + w)B$ из бюджета.

wB – это часть долга, которая регулярно гасится; только за счет нее государственный долг и может уменьшаться.

Все параметры, входящие в систему (1), (2), естественно могут изменяться со временем.

Возникает вопрос, какой размер долга является критическим, и как он зависит от параметров системы и ВВП. Нужно ли гасить госдолг, или выгоднее выплачивать проценты?

Начнем исследование системы с некоторого момента времени, который будем считать начальным $-t = 0$. ВВП страны и ГД в начальный момент времени соответственно равны.

$$Q(0) = Q_0, \quad B(0) = B_0. \quad (3)$$

Линейную систему (1), (2) запишем в виде:

$$\frac{dQ}{dt} = (\alpha_1 + q\gamma + \delta)Q - (r + w)B, \quad (4.1)$$

$$\frac{dB}{dt} = (\gamma + \delta)Q - wB, \quad (4.2)$$

где $\alpha_1 = q\alpha - \mu - \beta$ – показатель роста ВВП за счет внутренних ресурсов (он может быть и отрицательным). Коэффициенты линейной системы (4) имеют вид:

$$a_{11} = \alpha_1 + q\gamma + \delta, \quad a_{12} = -(r + w) < 0, \quad a_{21} = \gamma + \delta \geq 0, \quad a_{22} = -w < 0.$$

Будем учитывать, что государство, имеющее внешний долг, не может строить финансовую пирамиду для расплаты по старым долгам, то есть не может расплачиваться по старым долгам за счет новых внешних заимствований [10]. Отсутствие игры Понци означает, что проценты выплат по накопившемуся долгу в долгосрочной перспективе за время от t_0 до некоторого момента t_{max} должны быть больше, чем новые заимствования:

$$Z_B = \int_{t_0}^{t_{max}} (r + w)B dt > Z_Q = \int_{t_0}^{t_{max}} (\gamma + \delta)Q dt. \quad (5)$$

Это означает, что начиная с некоторого времени $t^* < t_{max}$ должно выполняться условие:

$$(r + w)B > (\gamma + \delta)Q, \quad (6)$$

или показатель Понци po должен быть меньше 1:

$$po = \frac{(\gamma + \delta)Q}{(r + w)B} < 1. \quad (7)$$

Пусть коэффициенты на каком-то отрезке времени не изменяются. Тогда решение системы (4) с начальными данными (3) имеет вид:

$$\begin{aligned} Q(t) &= \frac{Q_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \left((\lambda_2 - a_{11})e^{\lambda_1 t} - (\lambda_1 - a_{11})e^{\lambda_2 t} \right) + \frac{B_0 a_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}) \\ B(t) &= \frac{Q_0 a_{21}}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}) + \frac{B_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \left((\lambda_2 - a_{22})e^{\lambda_2 t} - (\lambda_1 - a_{22})e^{\lambda_1 t} \right) \end{aligned} \quad (8.1)$$

где λ_2 и λ_1 – собственные значения:

$$\lambda_{1,2} = 0.5 \left(Sp \mp \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}} \right), \quad (8.2)$$

$$Sp = \alpha_1 + q\gamma + \delta - w, \quad \Delta = -(\alpha_1 + q\gamma + \delta)w + (\gamma + \delta)(r + w).$$

Исследуем решения полученной модели в зависимости от значений параметров. Но сначала выведем и исследуем уравнение для относительного долга $b(t)$, который является важнейшим экономическим показателем

$$b(t) = B(t)/D(t). \quad (9)$$

2. Динамика относительного долга

Дифференцируя отношение (9) по времени и подставляя в полученное выражение производные $\frac{dQ}{dt}$ и $\frac{dB}{dt}$ из системы (4.1), (4.2) выведем уравнение для изменения относительного долга:

$$\frac{db(t)}{dt} = (r + w)b^2 - (\alpha_1 + q\gamma + \delta + w)b + (\gamma + \delta). \quad (10)$$

$$b_0 = b(0) = \frac{B_0}{D_0} \text{ — начальные условия.}$$

Правая часть уравнения (10) представляет собой квадратный трехчлен. Его корни вычисляются по формуле:

$$b_1 = \frac{(s - \sqrt{s^2 - 4(\gamma + \delta)(r + w)})}{2(r + w)}, \quad (11.1)$$

$$b_2 = \frac{(\gamma + \delta)}{(r + w)b_1} = po(b_1), \quad (11.2)$$

где $s = a_{11} - a_{22} = \alpha_1 + q\gamma + \delta + w$.

Корни b_1 и b_2 существуют и являются положительными, если дискриминант больше нуля:

$$Dic = s^2 - 4(\gamma + \delta)(r + w) > 0,$$

то есть

$$(\alpha_1 + q\gamma + \delta + w)^2 > 4(\gamma + \delta)(r + w).$$

Последнее неравенство выполняется, если справедливы следующие два неравенства:

$$\alpha_1 + q\gamma + \delta + w > 2(r + w), \quad (12.1)$$

$$\alpha_1 + q\gamma + \delta + w > 2(\gamma + \delta). \quad (12.2)$$

Слева в неравенствах (12) стоят параметры, определяющие скорость роста экономики, а справа – удвоенные доли выплат по долгу или новых заимствований. Для нормальной экономики эти неравенства выполняются. Если они не выполняются, это означает, что экономика не может справляться с бременем обслуживания государственного долга. В этом случае правая часть уравнения (10) больше нуля, и, следовательно, относительный государственный долг неограниченно возрастает, то есть государственный долг растет все время быстрее ВВП.

Рассмотрим случай, когда неравенства (12) выполняются. Тогда Корни b_1 и b_2 существуют. Они описывают стационарные состояния уравнения (10). Стационар b_1 является устойчивым, а стационар b_2 – неустойчивым. Если начальное значение $b_0 < b_1$, то относительный долг возрастает до значения b_1 , на котором стабилизируется. Если $b_1 < b_0 < b_2$, то относительный долг убывает и стремится к b_1 со временем. При

$b_0 < b_2$ экономика страны развивается благодаря внешним инвестициям и справляется с обслуживанием ГД. ВВП и ГД долг со временем растут параллельно.

Если $b_0 > b_2$, то относительный долг неограниченно возрастает. Таким образом, значение $b_0 = b_2$ является критическим.

Найдем условия отсутствия игры Понци. Для этого неравенство (5), описывающее соотношение между суммарными займами Z_Q и суммарными выплатами по долгу Z_B , преобразуем к виду:

$$\int_{t_0}^{t_{max}} (r + w)B \left(1 - \frac{(\gamma + \delta)}{(r+w)b(t)}\right) dt > 0. \quad (13)$$

Если относительный долг неограниченно возрастает, то есть экономика не справляется с обслуживанием ГД, то неравенство (13) выполняется, и игра Понци отсутствует.

Пусть стационары существуют и $b_0 < b_2$, тогда относительный долг стремится к стационару $b_1 (b(t) \rightarrow b_1)$, а выражение $\frac{(\gamma + \delta)}{(r+w)b(t)} \rightarrow b_2$, то есть к значению второго стационара, равному коэффициенту $po(b_1)$ (11.2). Если $po(b_1) > 1$, то интеграл (13) меньше нуля, а значит строится финансовая пирамида. Если $po(b_1) < 1$, то неравенство (13) выполняется, и игра Понци отсутствует. Таким образом, чтобы игра Понци не велась, необходимо и достаточно, чтобы второй стационар $b_2 < 1$. Поскольку $b_1 < b_2$, то и $b_1 < 1$, а значит и их произведение меньше 1. Отсюда получаем необходимое (но не достаточное) условие отсутствия игры Понци:

$$b_1 * b_2 = \frac{(\gamma + \delta)}{(r+w)} < 1. \quad (14)$$

Неравенство (14) означает, что новые займы в процентах от ВВП должны быть меньше, чем проценты выплат по ГД, или ставка процента по внешнему долгу должна превышать темп прироста ВВП в иностранной валюте за счет новых заимствований.

3. Условия роста ВВП с помощью государственного долга

Проведем анализ решений уравнений (4), (3) и (9) в зависимости от значений параметров и начальных данных.

1) Если новые займы не поступают ($\gamma = 0, \delta = 0$), то накопленный ранее ГД экспоненциально убывает с показателем w :

$$B(t) = B_0 e^{-wt}.$$

Изменение ВВП страны при этом описывается функцией:

$$Q(t) = Q_0 e^{\alpha_1 t} \left(1 - \frac{(r+w)B_0}{(\alpha_1 + w)Q_0} (1 - e^{-(w + \alpha_1)t})\right). \quad (15)$$

Проанализируем выражение (15). Если $\alpha_1 > 0$ (т.е. $q\alpha > \mu + \beta$, доходы превышают расходы), то в отсутствии долга, $B_0 = 0$, ВВП страны экспоненциально растет с показателем α_1 . Если имеется накопленный ГД, $B_0 > 0$, то растет или не растет ВВП зависит от объема долга. Если долг не слишком велик: $B_0 < Q_0 \frac{\alpha_1 + w}{r + w}$, то ВВП растет; в противном случае ($B_0 > Q_0 \frac{\alpha_1 + w}{r + w}$) ВВП убывает.

2) *Условия ускорения роста ВВП с помощью государственного долга.* Государственные займы, с одной стороны увеличивают государственный долг и расходы на его обслуживание, с другой стороны, могут привести к ускорению роста ВВП. Найдем значения параметров, когда это происходит.

Пусть ВВП и долг растут одновременно ($\frac{dQ}{dt} > 0$, $\frac{dB}{dt} > 0$). ВВП растет быстрее долга, если

$$(\alpha_1 + (q - 1)\gamma)Q - rB > 0.$$

α_1 – это скорость роста ВВП за счет внутренних ресурсов (в отсутствие долга), $(q - 1)\gamma$ – это скорость прироста ВВП за счет прироста долга при $q > 1$. Если эффективность инвестиций невелика $q \leq 1$, то они приводят только к увеличению долга и оттягивают из бюджета средства для его обслуживания (rB).

ВВП растет быстрее, чем в отсутствие долга, если:

$$(q - 1)\gamma Q > rB. \quad (16)$$

Неравенство (16) выполняется при эффективном вложении инвестиций ($q > 1$), и когда проценты выплат по долгу меньше, чем приток новых инвестиций, помноженных на эффективность. Если выполняется противоположное равенство, то скорость роста ВВП уменьшается, несмотря на инвестиции.

С учетом отсутствия игры Понци (6) получаем:

$$(q - 1)\gamma Q > rB > (\gamma + \delta)Q - wB. \quad (17)$$

Пусть заимствования на социальные нужды равны выплатам части долгов ($\delta Q = wB$). Тогда из неравенств (14) имеем:

$$(q - 1)\gamma Q > \gamma Q \text{ при } rB > \gamma Q$$

Отсюда следует, что эффективность вложений внешних займов в экономику должна быть по крайней мере больше двух, а выплаты по процентам превышать эти внешние займы. Если же заимствования на социальные нужды больше выплат части долгов ($\delta Q > wB$), то коэффициент эффективности должен быть еще больше.

Резюмируя, можем утверждать, что для ускорения роста ВВП за счет прироста долга требуется высокая эффективность вложений, когда на каждый вложенный доллар, нужно получать несколько долларов, по крайней мере больше 2-х. При этом нужно соблюсти условия отсутствия схемы Понци.

3) *Условия развития ВВП с помощью государственного долга.* Пусть ВВП без притока инвестиций не растет ($\alpha_1 = 0$). Найдем решение системы для этого случая, и выясним, когда государственные займы приводят к росту ВВП.

Пусть проценты $r(t)$ и выплаты части $w(t)$ самих долгов связаны некоторым соотношением:

$$r = \rho w, \quad \rho > 0 .$$

Сначала для простоты будем считать, что новые заимствования идут только на инвестиции, в этом случае $\delta = 0$, а эффективность вложений равна:

$$q = 1 + \rho > 1.$$

Тогда система (2.4) принимает вид:

$$\frac{dQ}{dt} = q(\gamma Q - wB), \quad (18.1)$$

$$\frac{dB}{dt} = \gamma Q - wB. \quad (18.2)$$

Нетрудно найти решение системы (2.18) с начальными данными (3).

$$B(t) = \left(B_0 + \frac{\gamma C}{\lambda} \right) e^{\lambda t} - \frac{\gamma C}{\lambda}. \quad (19.1)$$

$$Q(t) = qB(t) + C, \quad C = Q_0 - qB_0, \quad \lambda = q\gamma - w. \quad (19.2)$$

Отсюда следует, что ВВП и долг либо одновременно экспоненциально растут (при $q\gamma > w$), либо убывают (при $q\gamma < w$). Поскольку из (18) следует, что

$$\frac{dQ}{dt} = q \frac{dB}{dt}, \quad (20)$$

то ВВП растет или убывает в q раз быстрее ГД.

Это как раз тот случай, когда ВВП может расти за счет прироста долга и расти быстрее долга. Но чтобы государственные займы играли такую положительную роль, необходима эффективность вложения инвестиций в экономику ($q > 1$).

Условие отсутствия игры Понци(6) приводит к неравенствам:

$$qwB > \gamma Q > wB. \quad (21)$$

Отсюда следует, что, как и в предыдущем пункте, для эффективного развития ВВП за счет прироста ГД требуется высокий показатель эффективности вложений q , $q > 2$.

Для получения аналитического решения мы упростили систему и не учли всех расходов. В реальности показатель q для роста ВВП, по-видимому, должен быть еще больше.

4. Численные расчеты динамики ВВП и ГД при разных значениях параметров

Проиллюстрируем возможные типы динамики изменения ВВП и ГД, описываемые системой (4) с начальными данными (3). В качестве некоторого базового набора параметров возьмем следующие значения:

$$\alpha_1 = 0.01; \quad q = 3; \quad \gamma = 0.02; \quad \delta = 0.01; \quad w = 0.02; \quad r = 0.05 \quad (22)$$

Тогда коэффициенты модели примут следующие значения:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \alpha_1 + q\gamma + \delta = 0.06; & a_{12} &= -(r + w) = -0.07; \\ a_{21} &= \gamma + \delta = 0.03; & a_{22} &= -w = -0.02; \end{aligned} \quad (23)$$

Начальное значение ВВП положим $Q(0) = 1$. ГД будем измерять в единицах ВВП. Прокомментируем выбранные параметры (22). Если бы не было ГД ($B(0) = 0$) и не брались бы новые займы, темп роста ВВП составлял бы 1% в год ($\alpha_1 = 0.01$). Но наличие даже небольшого долга оттягивает средства из бюджета, и ВВП падает.

В выбранном примере проценты выплат по ГД составляют 5%, а сами выплаты – 2% ($r = 0.05$, $w = 0.02$). То есть выплаты из бюджета составляют 7% от ГД. Покажем, что за счет внешних инвестиций в экономику можно добиться ускорение роста ВВП. Пусть они составляют 2% ВВП ($\gamma = 0.02$) и эффективность вложений будем высокой: $q = 3$. Внешние займы берутся и на социальные и др. нужны: $\delta = 0.01$.

1. *Ускорение роста ВВП за счет внешних заимствований. Влияние начального объема долга.* Вначале рассмотрим влияние начального объема ГД на рост ВВП. Для набора параметров (22) возможен устойчивый экономический рост, поскольку существует устойчивое стационарное состояние для относительного долга: $b_1 \approx 0.43$, $b_2 = 1$. При $b(0) < b_2 = 1$ относительный долг стремится со временем к значению b_1 . Суммарные выплаты по долгу Z_B стремятся к суммарным займам Z_Q , так как $b_2 = 1$.

Численно рассчитаем модель (4) для набора параметров (22) при разных значениях начального долга. На рис. 1, 2 и 3 представлена динамика роста ВВП и ГД при $B(0) = 0.6, 0.2, 1.1$ соответственно. На рис. а) показано, как изменялись во времени ВВП и ГД, если бы не было новых займов ($\gamma = 0; \delta = 0$), и выплачивался бы только накопившейся

ранее долг. На рис. *b*) показана динамика роста ВВП и ГД при наличии постоянных займов. На рис. *c*) представлены графики роста суммарных выплат по долгу Z_B и суммарных займов Z_Q . Здесь же для сравнения показан график роста ГД. На рис. *d*) приведены зависимости скоростей роста r_Q и r_B от времени.

$$r_Q = \frac{dQ}{dt} / Q, \quad r_B = \frac{dB}{dt} / B$$

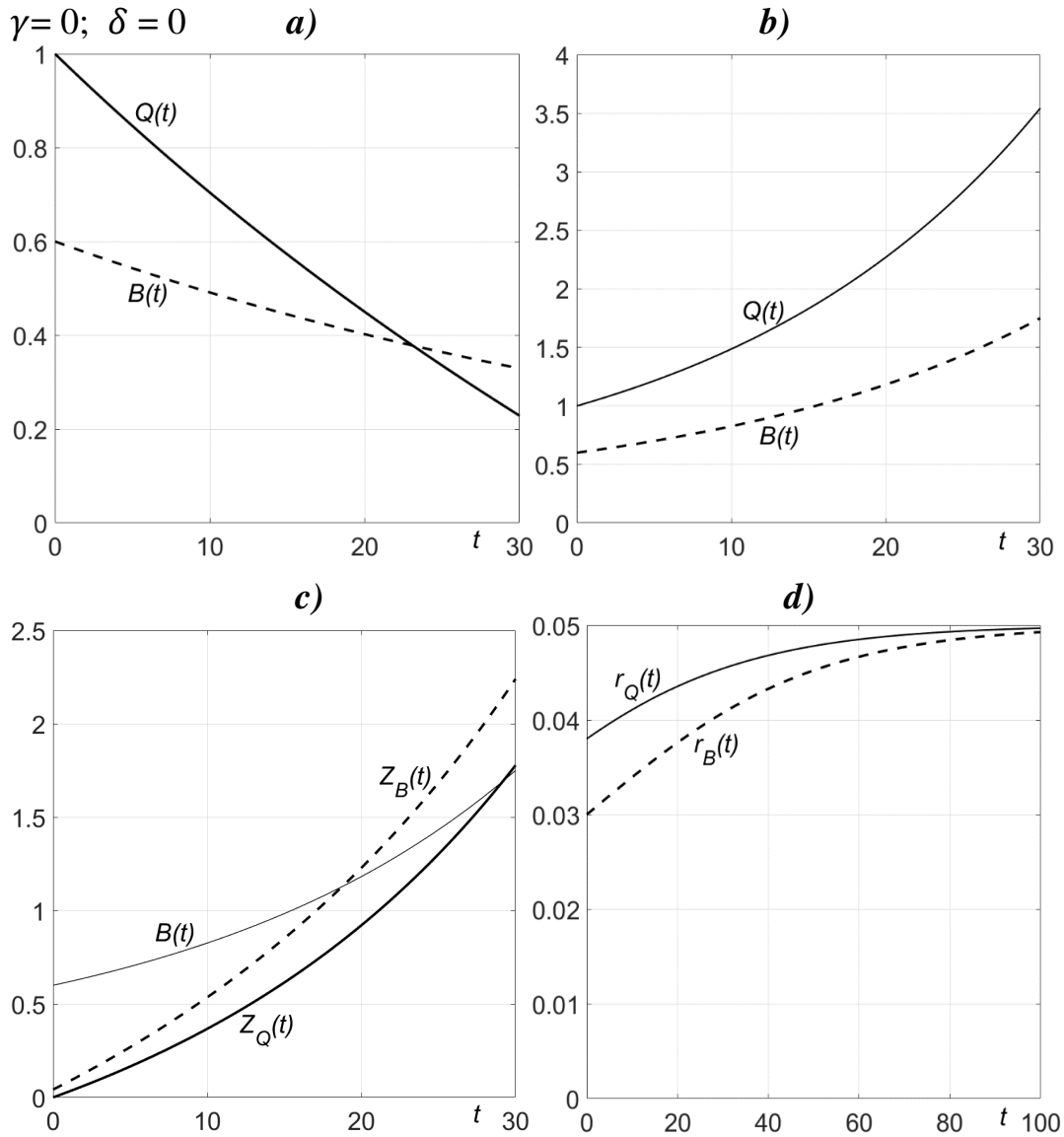


Рис. 1. Динамика роста ВВП и ГД при $B(0) = 0.6$.
 $b(t) > b_1, b(t) \rightarrow b_1 \approx 0.43 \quad b_2 = 1$

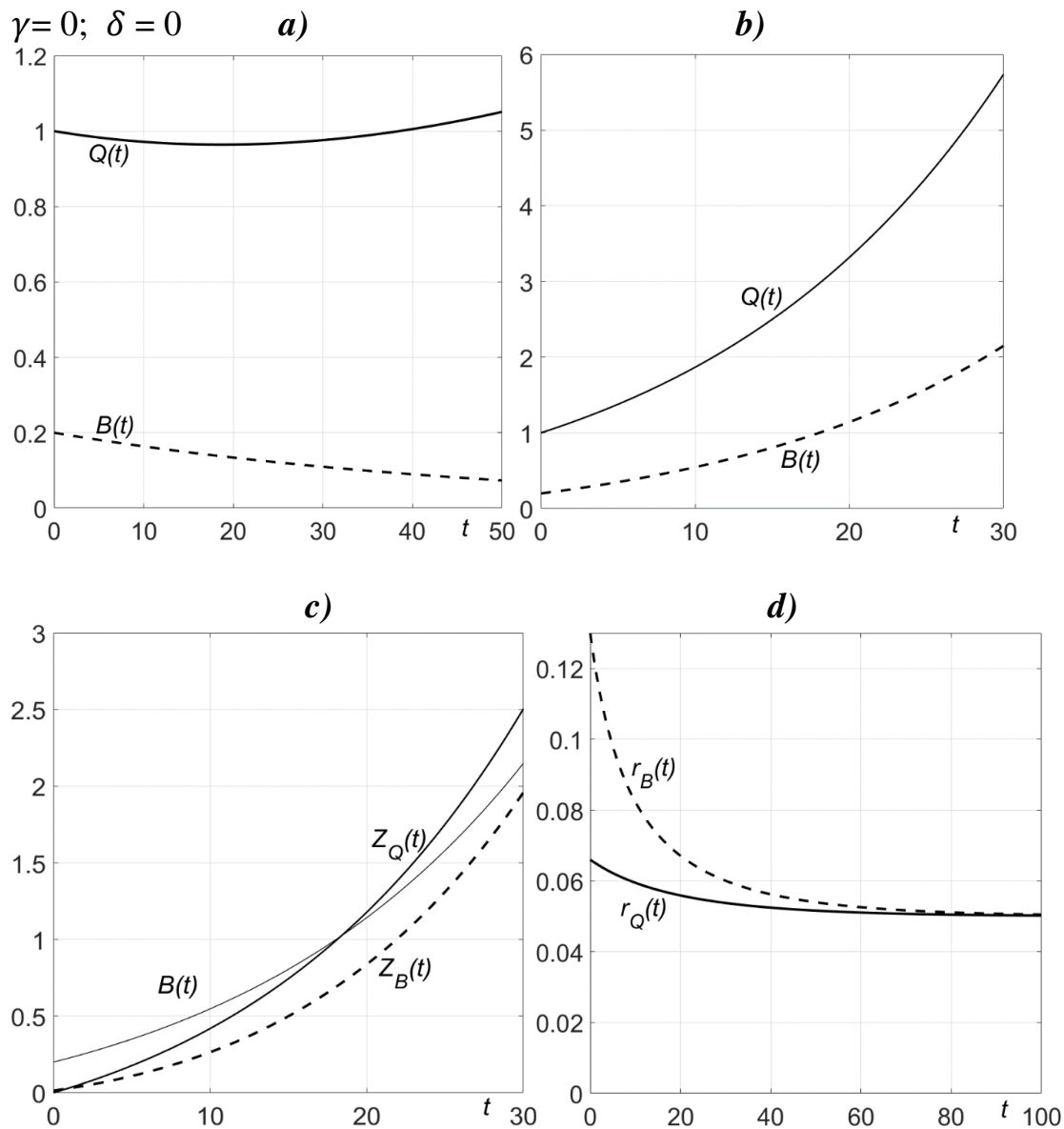


Рис. 2. Динамика роста ВВП и ГД при $B(0) = 0.2$.
 $b(t) < b_1$; $b(t) \rightarrow b_1 \approx 0.43$ $b_2 = 1$

Мы видим из рис. 1а, что ВВП при $B(0) = 0.6$ в отсутствие новых займов быстро падает, примерно на 30% за 10 лет. При наличии новых займов ВВП растет быстрыми темпами, примерно 4% в год за первые 10 лет; темпы роста ВВП возрастают постепенно до 5% год (рис. 1b, d). ГД растет медленнее ВВП; относительный долг уменьшается и стабилизируется на значении $b_1 \approx 0.43$. Суммарные выплаты по долгу заметно превосходят суммарные займы на довольно большом отрезке времени, и примерно через 18 лет они начинают превышать объем ГД (рис. 1c). И только за очень большой промежуток времени (более 100 лет) суммарные выплаты приблизятся к суммарным займам. Игра Понци здесь не имеет места.

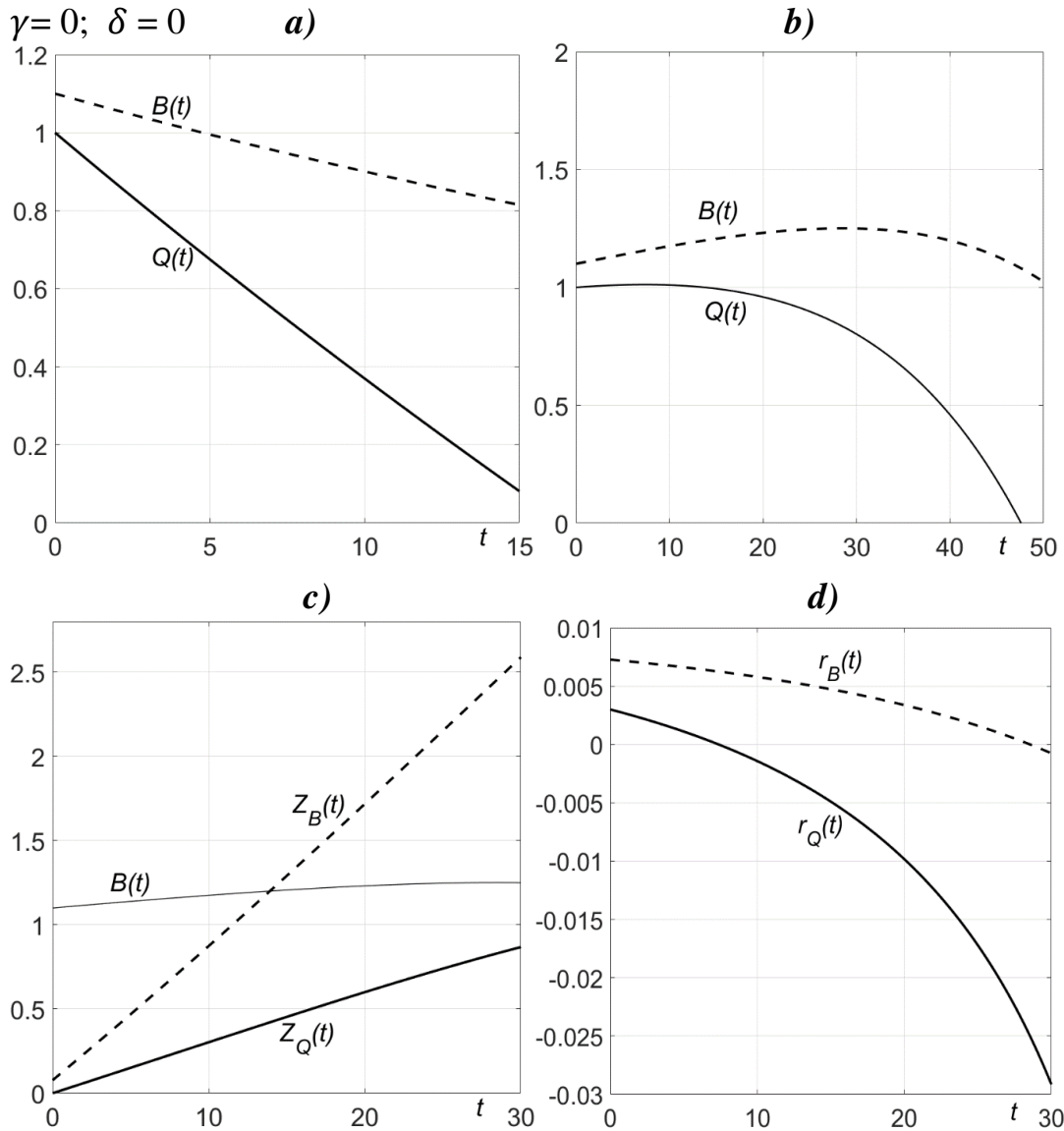


Рис. 3 Динамика роста ВВП и ГД при $B(0) = 1.2$.

$$b(t) > b_2 = 1; b(t) \rightarrow \infty$$

При небольшом начальном долге $B(0) = 0.2$ (рис. 2) динамика роста ВВП значительно лучше. Даже в отсутствие новых займов при $\gamma = 0$ и $\delta = 0$ ВВП в отличие от предыдущего случая с $B(0) = 0.6$ не падает до нуля, а почти стоит на месте, а потом начинает медленно расти (рис. 2а). Правда это происходит только через 40 лет. Привлечение постоянных государственных займов приводит к быстрому росту ВВП (сначала более 6% в год, потом скорость роста снижается до 5% в год по мере возрастания ГД (рис. 2д)). Примерно за 11 лет ВВП удваивается (рис. 2б). ГД тоже растет, но медленнее ВВП. Относительный долг сначала растет, а потом стабилизируется на значении $b_1 \approx 0.43$. Суммарные займы превосходят суммарные выплаты по долгу и примерно через 18 лет они начинают превышать объем ГД (рис. 2с), что качественно отличает от

предыдущего случая. И только за очень большой промежуток времени (более 100 лет) суммарные выплаты приблизятся к суммарным займам. Здесь игра Понци имеет место. *В успешно развивающихся экономиках почти всегда имеем место игра Понци на конечном промежутке времени!*

Теперь рассмотрим динамику изменения ВВП, когда начальный долг превышает критический уровень. Пусть $V(0) = 1.1$. Мы видим из рис. 3а, что ВВП в отсутствие новых займов быстро падает, в два раза за 8 лет. Привлечение новых внешних займов за те же 8 лет не позволяет ВВП падать, но ГД при этом растет (рис. 3б). Поскольку превышен критический уровень начального долга, то со временем обязательно будет наблюдаться падение ВВП и быстрый рост относительного долга, ВВП упадет в два раза примерно за 38 лет. Так что за первых 8 лет, пока ВВП почти не меняется, надо проводить реструктуризацию всей экономики и вывести ее на параметры устойчивого роста. Теперь посмотрим на разницу между суммарными займами и суммарными выплатами – она огромная (рис. 3с). Суммарные выплаты намного превышают суммарные займы, это следствие огромного долга, когда львиная доля ВВП идет на его обслуживание.

2. Влияние параметра эффективности инвестиций q .

Выше теоретически была показана важность значения параметра эффективности инвестиций q . Посмотрим, как это выглядит на практике. Сравним динамику роста ВВП при $q = 2$ и 3 для базового набора параметров (22). Пусть по-прежнему $Q(0) = 1$, а $V(0) = 0.6$. На рис. 4а изображены кривые роста ВВП и ГД для $q = 2$, а на рис. 2 а для $q = 3$. Мы видим, что при $q = 3$ темп роста ВВП выше, чем скорость роста ГД и намного превышает скорость роста ВВП при $q = 2$. При $q = 2$ ВВП и ГД вначале растут почти параллельно, но в долгосрочной перспективе ВВП, проходя через максимум начинает падать, а ГД обгоняет ВВП. На рис. 4б показаны темпы роста ВВП и ГД. Мы видим, что при $q = 2$ темпы роста ВВП вначале высокие, затем уменьшаются и становятся отрицательными. При $q = 3$ темпы роста остаются высокими все время. Относительный долг при $q = 2$ неограниченно возрастает в долгосрочной перспективе ($b(t) \rightarrow \approx \infty$), а при $q = 3$ – стабилизируется. Отметим, что несмотря на то, что при $q = 2$ система неминуемо впадает в кризис, в первые 10-25 лет она демонстрирует рост экономики высокими темпами. За это время можно провести реструктуризацию экономики, увеличить доходы в бюджет и выйти на устойчивый рост; в модели это означает увеличение параметра эффективности инвестиций.

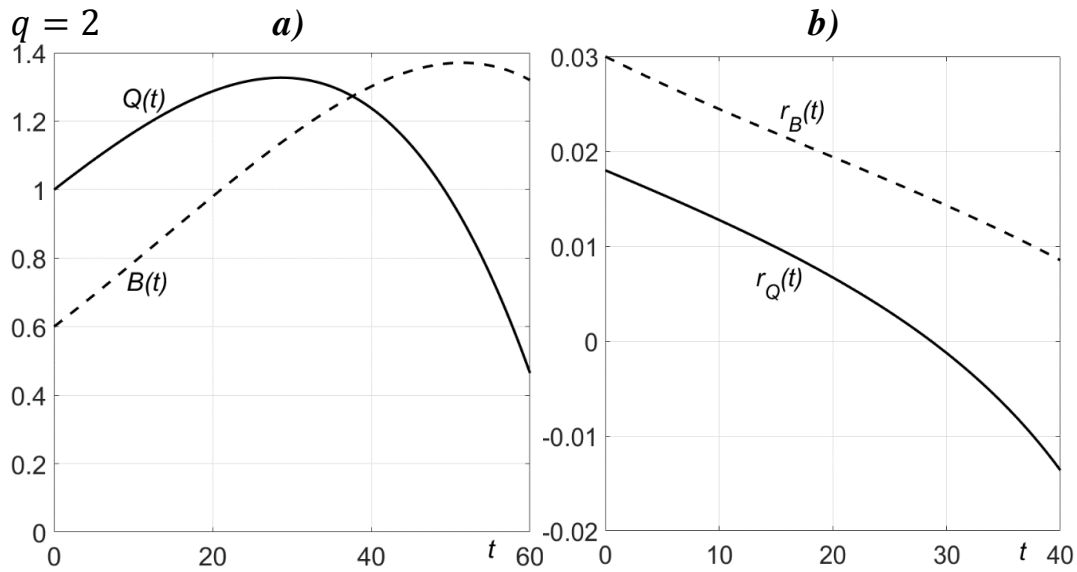


Рис. 4 Динамика роста ВВП и ГД при $q = 2$. $b(t) \rightarrow \approx \infty$

3. Влияние объема инвестиций.

На рост ВВП оказывает заметное влияние и объем инвестиций. Увеличим объем инвестиций в два раза по сравнению с предыдущим случаем до $\gamma = 0.04$ ($q = 2$, $B(0) = 0.6$, остальные параметры соответствуют базовым (22)).

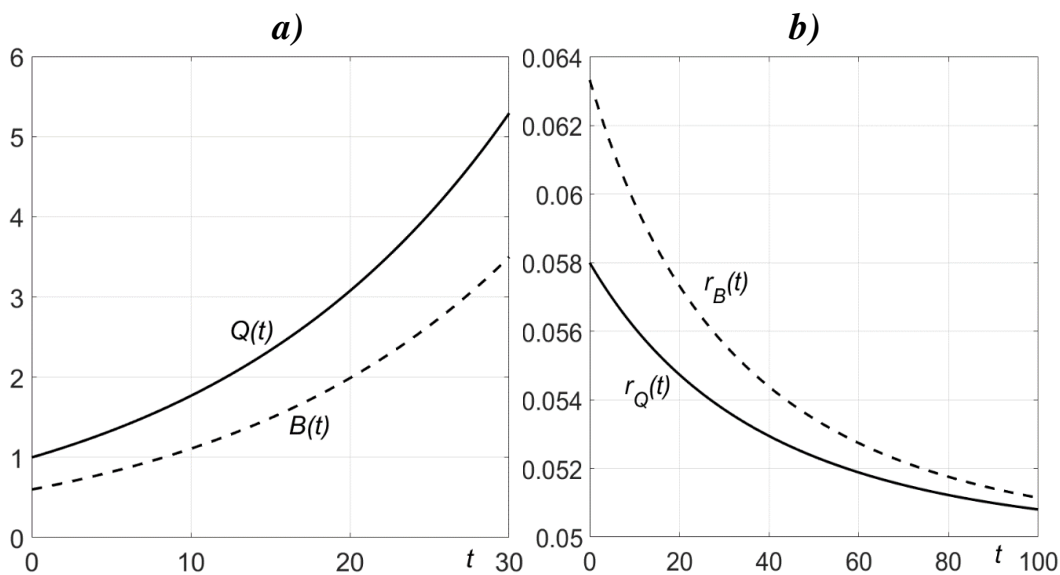


Рис. 5 Динамика роста ВВП и ГД при $\gamma = 0.04$.
 $b(t) \leftrightarrow b_1 \approx 0.714 b_2 = 1$

На рис. 5 представлена динамика системы для этого случая. Мы видим, что она качественно изменилась. Здесь наблюдается устойчивый экономический рост. ВВП растет сначала быстрее долга, а затем они растут параллельно. Относительный долг немного увеличивается, но

затем стабилизируется на значении $b_1 \approx 0.714$. Темпы роста ВВП все время остаются высокими, больше, чем 5% (рис. 5б)

Подчеркнем, что важен не только общий объем займов, но и его структура. В данном примере займы, которые идут на модернизацию экономики в 4 раза превосходят займы, которые идут на социальные или военные расходы ($\gamma = 0.04, \delta = 0.01$). При том же объеме займов и обратном соотношении ($\gamma = 0.01, \delta = 0.04$) расходов выйти на устойчивый рост нельзя. В этом случае ГД растет гораздо быстрее ВВП и начинает превышать ВВП примерно через 17 лет. Система впадает в кризис, выплаты существенно превышают займы и оттягивают значительные средства из бюджета.

5. Исследование динамики роста ВВП и государственного долга с помощью модели по статистическим данным

Математическая модель (4)-(3) с постоянными параметрами хорошо описывает совместную динамику изменения ВВП и государственного долга страны, в периоды устойчивого роста, когда экономическая стратегия страны не изменяется. В периоды нестабильности в экономике, когда наблюдаются колебания кривых развития ВВП и ГД, модель описывает основные тренды.

Выделим некоторый отрезок времени и, считая коэффициенты $a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_{21}$ в модели постоянными, по статистическим данным подберем их значения. Будем использовать метод наименьших квадратов. Зная коэффициенты и начальные значения Q_0 и B_0 (которые также находятся методом наименьших квадратов), найдем решение $Q(t)$ и $B(t)$ модели (4), (3). Эти решения будут описывать некоторую усредненную динамику развития ВВП и ГД на рассматриваемом отрезке времени.

Для нахождения коэффициентов $a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_{21}$ и Q_0 и B_0 поступим следующим образом - решение системы (4)-(3) запишем в виде:

$$Q(t_j) = Q_0 + a_{11} \int_{t_0}^{t_j} Q(\tau) d\tau + a_{12} \int_{t_0}^{t_j} B(\tau) d\tau, \quad (24.1)$$

$$B(t_j) = B_0 + a_{21} \int_{t_0}^{t_j} Q(\tau) d\tau + a_{22} \int_{t_0}^{t_j} B(\tau) d\tau. \quad (24.2)$$

Пусть в моменты времени t_0, t_1, \dots, t_N известны статистические данные по ВВП и ГД, G_j и D_j , $j = 0, 1, \dots, N$ соответственно. Для определения решения в моменты t_j в формулах (24) интегралы от неизвестного решения заменим на интегралы от статистических данных, которые вычислим методом трапеций. Получим:

$$IQ_j = IQ(t_j) = \int_{t_0}^{t_j} Q(\tau) d\tau \approx \int_{t_0}^{t_j} G(\tau) d\tau \approx \sum_{j=1}^N 0.5(G_j + G_{j-1})\Delta t, \quad (25.1)$$

$$IB_j = IB(t_j) = \int_{t_0}^{t_j} B(\tau) d\tau \approx \int_{t_0}^{t_j} D(\tau) d\tau \approx \sum_{j=1}^N 0.5(D_j + D_{j-1})\Delta t. (25.2)$$

Поскольку статистические данные по ВВП и ГД обычно приводятся раз в год в конце года, примем $\Delta t = 1$ год.

Найдем сумму квадратов отклонений решения от статистических данных:

$$SQ = \sum_{j=0}^N (G_j - Q_j)^2 = \sum_{j=0}^N (G_j - a_{11}IQ_j - a_{12}IB_j - Q_0)^2, (26.1)$$

$$SB = \sum_{j=0}^N (D_j - B_j)^2 = \sum_{j=0}^N (D_j - a_{21}IQ_j - a_{22}IB_j - B_0)^2. (26.2)$$

Дифференцируя функции SQ и SB по параметрам $a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_{21}, Q_0$ и B_0 и приравнивая частные производные к нулю, получим две линейные системы третьего порядка с одной и той же матрицей коэффициентов и разными правыми частями. Решая эти системы, можно найти искомые параметры $a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_{21}, Q_0$ и B_0 . Однако, обратная задача нахождения параметров линейной системы ОДУ по решению является некорректно поставленной задачей; системы с сильно различающимися значениями параметров могут давать очень близкие решения. В результате такой метод нахождения параметров может давать нереальные значения параметров. Чтобы этого избежать, надо ввести ограничения. Учтем, что в системе (4) коэффициенты a_{12} и a_{22} отрицательные, причем $|a_{12}| > |a_{22}|$. Коэффициент $a_{21} \geq 0$; он равен нулю, когда новые займы отсутствуют. Коэффициент a_{11} может быть, как положительным, так и отрицательным, в зависимости от того растет или падает ВВП (положительная или отрицательная разница между совокупными доходами и совокупными расходами) в отсутствие выплат по государственному долгу.

Упростим задачу нахождения параметров системы ОДУ (3), (4) по статистическим данным, поступив следующим образом. Будем считать, что усредненные коэффициенты a_{12} и a_{22} известны, так как они описывают доли выплат по ГД. Придадим им нужные отрицательные значения. Тогда неизвестных останется всего четыре: a_{11}, a_{22}, Q_0 и B_0 . Найдем их методом наименьших квадратов, описанным выше способом с использованием выражений (24) и (25) и построим кривые трендов ВВП и ГД. Далее рассчитывая решение модели (3), (4) на большем промежутке времени при найденных параметрах, можно сделать прогнозы по трендам изменения ВВП и ГД в будущем. Если они не благоприятные, то можно посмотреть, сколько есть лет в запасе для реструктуризации экономики и исправления ситуации.

Воспользуемся предложенным методом для нахождения параметров модели по статистическим данным и проиллюстрируем возможности модели для исследования перспектив экономического роста на примере трех стран. На рис. 6 показана динамика роста ВВП и ГД в США и Сингапуре и Японии. На рис. 6а изображены тренды экономического роста США в докризисные годы (1990-2007), в кризисные годы и

посткризисные (рис. 6б). Мы видим, что в докризисные годы наблюдается устойчивый экономический рост, и темпы роста ВВП превышают темпы роста ГД. Но в это же время вздувается большой финансовый пузырь, который приводит к кризису, когда он лопается. В кризисные годы, пытаясь решить возникшие проблемы и сохранить рост ВВП, правительство США резко увеличивает объемы государственных займов, что приводит к изменению трендов развития. ВВП растет, как и раньше, но скорость роста ГД становится больше скорости роста ВВП. В 2016 г. ГД догоняет по объему ВВП и продолжает расти быстрее ВВП.

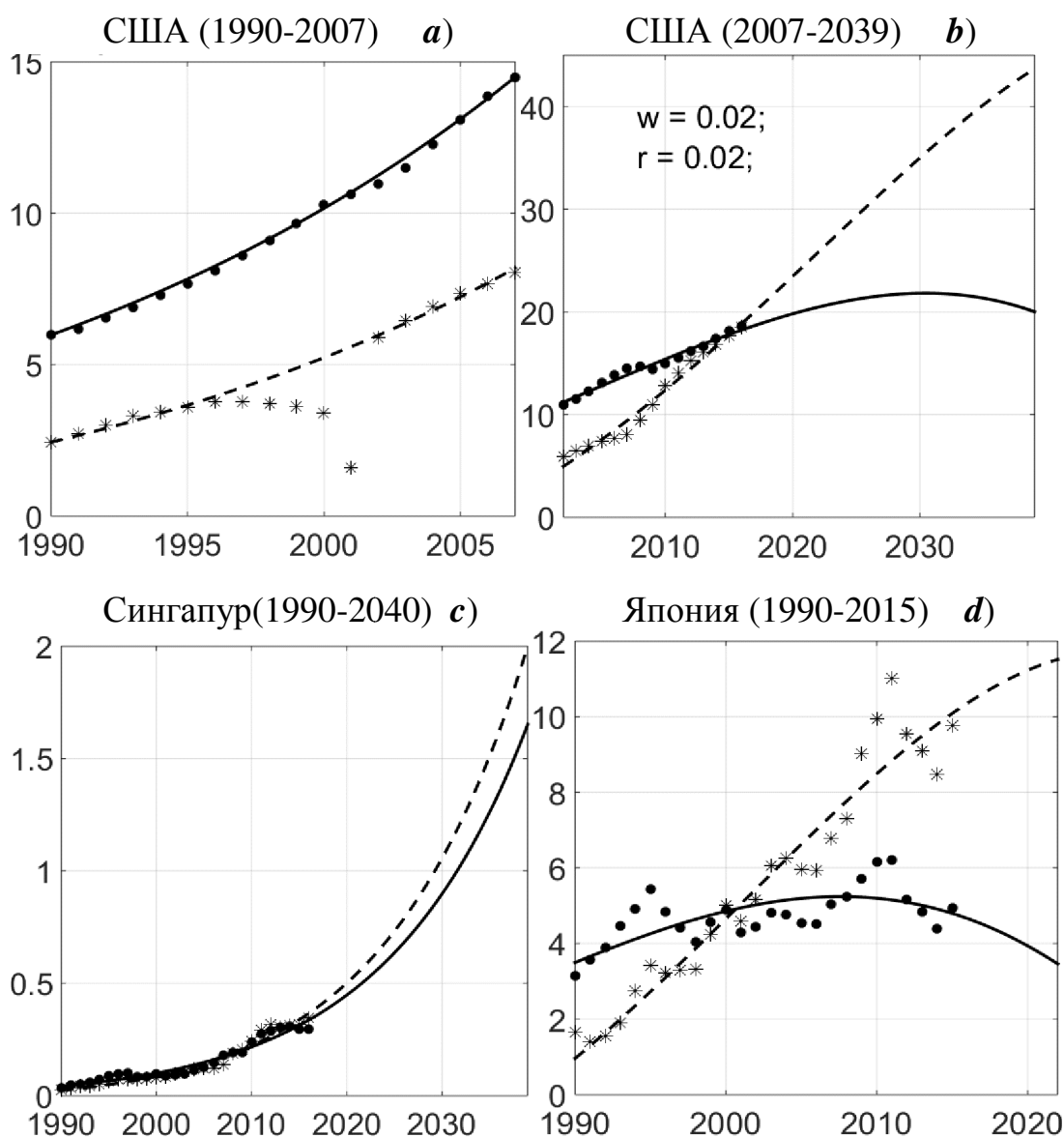


Рис. 6 Тренды развития ВВП и ГД трех стран на некоторых отрезках времени, рассчитанные по модели (ВВП – сплошная линия, ГД – пунктирная линия). Статистические данные: ● – ВВП, * – ГД.

На рис. 6б показаны тренды развития ВВП и ГД в США в ближайшие 20 лет, рассчитанные по модели. Мы видим, что, если экономическая политика не будет меняться, то обслуживание растущего ГД приведет к замедлению роста ВВП, а затем и к его падению. Модель показывает также, что у государства есть достаточно времени, чтобы провести реструктуризацию расходов и изменить тренды экономического развития.

Аналогичную динамику развития демонстрирует Сингапур (рис. 6с). До кризиса скорость роста ВВП превосходит скорость роста ГД; во время кризиса тренды изменяются, и, хотя ВВП продолжает расти, ГД начинает расти быстрее. Модель показывает, что раньше или позже рост ВВП прекратится и начнется его падение, но у государства есть много времени, чтобы найти решение по реструктуризации расходов и долговых обязательств.

Динамика изменения ВВП и ГД Японии, начиная с 1990 г. представлена на рис. 6д. Мы видим, что кривые роста ВВП и ГД имеют осциллирующий характер, что говорит о нестабильности экономического развития. Модель в этом случае описывает тренды развития. Мы видим, что тренд развития ВВП показывает падение, в то время как тренд ГД демонстрирует рост, и экономическая ситуация в стране в среднем усугубляется.

Заключение

В работе предложена математическая модель, связывающая рост ВВП с изменением ГД. В основе модели лежит система двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Скорость изменения ВВП в модели определяется разницей между совокупными доходами и совокупными расходами, учитываются и траты на обслуживание ГД. Особо в модели выделяются внешние инвестиции в экономику, которые приводят к более быстрому росту. В модели за это отвечает параметр инвестиций q , который характеризует отдачу от инвестиций. Предполагается, что в первом приближении новые внешние займы пропорциональны ВВП страны.

В работе проведен аналитический и численный анализ модели, исследованы возможные типы динамики изменения ВВП и ГД в зависимости от значений параметров. Показано, что внешние инвестиции, увеличивающие государственный долг, могут стать мощным фактором экономического роста, приводящему к быстрому росту ВВП страны, когда в отсутствии новых внешних займов ВВП или не растет, или растет медленно. Получено и исследовано уравнение, описывающее изменение внешнего долга. Показано, что возникший внешний долг никогда до конца не будет погашен, что согласуется с другими моделями [11].

Найдены условия устойчивого экономического роста, при которых ВВП растет быстрее ГД или параллельно с ним, относительный долг при этом стремится к постоянному значению.

Исследованы условия отсутствия игры Понци, когда страна, имеющая внешний долг, не может строить финансовую пирамиду для расплаты по старым долгам. Численные расчеты модели показали, что в успешно развивающихся экономиках суммарные заимствования могут намного превышать суммарные выплаты по долгу в течение долгого времени, то есть игра Понци здесь имеет место на конечном промежутке времени.

Для демонстрации возможностей модели рассмотрены статистические данные для нескольких стран. Найдены параметры модели и рассчитаны траектории развития ВВП и государственного долга на выбранных промежутках времени, сделаны прогнозы.

Литература

1. International Monetary Fund, <http://www.imf.org>;
2. USA government spending, <http://www.usgovernmentspending.com>;
3. <http://investorschool.ru/gosdolg-stran-mira-2017>;
4. <http://svspb.net/danmark/gosudarstvennyj-dolg-stran.php>;
5. Eurostat, <http://epp.eurostat.ec.europa.eu/portal/page/portal/eurostat/home/>;
6. CIA World FactBook, <http://www.cia.gov>;
7. News sites, <http://www.rbc.ru>, <http://www.bloomberg.com>;
8. Congressional Budget Office, <http://www.cbo.gov>;
9. World Bank, <http://www.databank.worldbank.com>;
10. *Е.А.Туманова, Н.Л.Шагас* Макроэкономика. Элементы продвинутого подхода. Учебник. — М ИНФРА-М, 2004, 400 с. (Учебники экономического факультета МГУ им М.В.Ломоносова)
11. *Балацкий Е.В.* Принципы управления государственной задолженностью. //Мировая экономика и международные отношения, 1997, №5, с.4-12.
12. *Вавилов А., Трофимов Г.* Стабилизация и управление государственным долгом России. Вопросы экономики, 1997, №12, с. 1-26.