В.И. Дмитриев

МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКОЕ ЗОНДИРОВАНИЕ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ ТОНКИЕ НЕОДНОРОДНЫЕ СЛОИ.

Введение.

Исследование прямой и обратной задачи магнитотеллурического зондирования слоистых сред лежит в основе теории этого метода [1], [2]. В этом случае прямая задача сводится к решению уравнения Риккати с правой частью, равной распределению электропроводности с глубиной $\sigma(z)$. Для обратной задачи, где $\sigma(z)$определяется по известной частотной характеристике магнитотеллурического (МТ) поля, доказана теорема единственности решения, если $\sigma(z)$ является кусочно-аналитической функцией [3]. Решение обратной задачи проводится на основе теории некорректно-поставленных задач [2] и с использованием метода регуляризации [4]. Можно считать, что решение обратной однородной задачи магнитотеллурического зондирования (МТЗ) полностью разработана.

Дальнейшее практическое использование метода МТЗ потребовало решения более сложных трехмерных задач зондирования неоднородных сред. В этом случае основной моделью строения среды является неоднородная трехмерная зона электропроводности $\sigma(x,y,z,)$, расположенной в слоистой среде. Здесь уже при решении прямой задачи столкнулись с определенными трудностями. При решении прямой задачи методом интегральных уравнений получается линейная система алгебраических уравнений размером более 10^6 неизвестных. При решении методом конечных элементов или разностным методом размер системы обычно увеличивается в сто раз. В результате трехмерные прямые задачи решаются на супер-ЭВМ с использованием параллельных вычислений.

При решении обратной задачи требование к вычислительным ресурсам резко возрастают, т.к. требуется многократно решать прямую задачу. Трудности дополнительно возрастают из-за неустойчивости обратной задачи, т.к. неустойчивость возрастает при увеличении числа неизвестных.

В связи с этим важно разрабатывать модели строения среды, для которых можно применять более простые и эффективные методы решения. К такому классу моделей, в частности, относится слоистая среда, содержащая тонкие неоднородные слои. Решению прямых и обратных задач для таких моделей строения среды посвящена настоящая статья.

1. Постановка задачи.

Пусть дана слоистая среда, в которой электропроводность зависит только от глубины

$$\sigma(z)=\begin{cases}\sigma_0 & при \;\; z<0\\ \sigma_1(z) & при \;\; z\in(0,h)\\ \sigma_c & при \;\; z\in(h,H)\\ \sigma_2(z) & при \;\; z>H\end{cases}$$

В слое $z\in(h,H)$ находится неоднородная зона с проводимостью

$$\sigma_c(M)=\begin{cases}\sigma_H(x,y) & при \;\; M\in V_H\\ \sigma_c=const & при \;\; M\notin V_H\end{cases}$$

Отметим, что в слое $z\in(h,H)$ электропроводность не зависит от z. Слой считается тонким. Это означает, что его толщина много меньше длины волны в этом слое

$$(H-h)\sqrt{\omega\mu\sigma_m}\ll 1,\text{ где } \sigma_m=\max\sigma_H(x,y).$$

Кроме того, толщина слоя много меньше глубины его залегания, т.е. $(H-h)\ll h$. В этих предположениях можно считать, что электрическое поле $\mathbf{E}$ в слое (h,H) практически не зависит от z, т.е.

$$\frac{\partial\mathbf{E}(x,y,z)}{\partial z}\approx 0 \;\; при \;\; z\in(h,H).$$

Это свойство позволит существенно упростить решение задачи.

Прямая задача МТЗ состоит в определении электрического $\mathbf{E}(M)$ и магнитного $\mathbf{H}(M)$ полей, которые удовлетворяют уравнениям Максвелла:

$$rot\;\mathbf{H}=\sigma(M)\mathbf{E}; \qquad rot\;\mathbf{E}=i\omega\mu\mathbf{H} \tag{1}$$

Должны выполняться условия непрерывности тангенциальных составляющих $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ на границах разрыва электропроводности $\sigma(M)$. На бесконечности выполняются условия излучения для $\mathbf{E}-\mathbf{E}^0$ и $\mathbf{H}-\mathbf{H}^0$, где $\mathbf{E}^0$ и $\mathbf{H}^0$ - первичное поле плоской волны нормально падающей на слоистую среду. Первичное поле $\mathbf{E}^0(z)$ и $\mathbf{H}^0(z)$ является решением уравнений Максвелла

$$rot\;\mathbf{H}^0=\sigma(z)\mathbf{E}^0, \qquad rot\;\mathbf{E}^0=i\omega\mu\mathbf{H}^0 \tag{2}$$

и легко вычисляется для кусочно-непрерывной электропроводности $\sigma(z)$.

Магнитотеллурическое поле представляется в виде суммы первичного и аномального полей:

$$\mathbf{E}(M)=\mathbf{E}^0(z)+\mathbf{E}^a(M); \qquad \mathbf{H}(M)=\mathbf{H}^0(z)+\mathbf{H}^a(M).$$

Аномальные поля удовлетворяют уравнениям Максвелла:

$$rot\ \mathbf{H}^a = \sigma(z)\mathbf{E}^a + \mathbf{J}_s, \qquad rot\ \mathbf{E}^a = i\omega\mu\mathbf{H}^a\ , \tag{3}$$

где $\mathbf{J}_s = \left(\sigma(M) - \sigma(z)\right)\mathbf{E}$ - избыточный ток (surplus current), возникающий в неоднородности.

2. Лемма Лоренца.

Лемма Лоренца связывает поля двух различных источников в одной и той же среде. Рассмотрим уравнения Максвелла для двух различных источников $\mathbf{j}^{(1)}$ и $\mathbf{j}^{(2)}$ внутри тела V_0, ограниченного поверхностью S_0, с комплексной электропроводностью $\sigma(M)$ и магнитной проницаемостью μ:

Рассмотрим выражение:

$$\begin{aligned} W = div\left(\left[\mathbf{E}^{(1)} \times \mathbf{H}^{(2)}\right] - \left[\mathbf{E}^{(2)} \times \mathbf{H}^{(1)}\right]\right) = \mathbf{H}^{(2)} rot\ \mathbf{E}^{(1)} - \mathbf{E}^{(1)} rot\ \mathbf{H}^{(2)} - \\ - \mathbf{H}^{(1)} rot\ \mathbf{E}^{(2)} + \mathbf{E}^{(2)} rot\ \mathbf{H}^{(1)} \end{aligned} \tag{4}$$

Заменив в этом выражении роторы полей из уравнений Максвелла (2), найдем дифференциальную форму леммы Лоренца:

$$div\left(\left[\mathbf{E}^{(1)} \times \mathbf{H}^{(2)}\right] - \left[\mathbf{E}^{(2)} \times \mathbf{H}^{(1)}\right]\right) = \mathbf{E}^{(2)} \cdot \mathbf{j}^{(1)} - \mathbf{E}^{(1)} \cdot \mathbf{j}^{(2)}\ . \tag{5}$$

Применив к (5) дивергентную формулу Гаусса, получим интегральную форму леммы Лоренца:

$$\int_{S_0} \left(\left[\mathbf{E}^{(1)} \times \mathbf{H}^{(2)}\right] - \left[\mathbf{E}^{(2)} \times \mathbf{H}^{(1)}\right]\right) \cdot \mathbf{n}\ \mathrm{ds} = \int_{V_0} \left(\mathbf{E}^{(2)} \cdot \mathbf{j}^{(1)} - \mathbf{E}^{(1)} \cdot \mathbf{j}^{(2)}\right) dv, \tag{6}$$

где – $\mathbf{n}$ - внешняя нормаль к поверхности S_0.

Полученная лемма Лоренца (6) выведена для области V_0, ограниченной поверхностью S_0. Её можно легко обобщить на бесконечную слоистую среду с кусочно-постоянным распределением электропроводности $\sigma(z)$. Для этого применим лемму (6) к каждому слою и сложим полученные выражения. Интегралы по границам слоев сокращаются. Граница в верхнем и нижнем полупространствах берется в виде сферы S_R радиуса $R \to \infty$. Условия излучения для электромагнитного поля дают:

$$\lim_{R \to \infty} \int_{S_R} \left(\left[\mathbf{E}^{(1)} \times \mathbf{H}^{(2)}\right] - \left[\mathbf{E}^{(2)} \times \mathbf{H}^{(1)}\right]\right) \cdot \mathbf{n}\ \mathrm{ds} = 0.$$

В результате все интегралы по границам в лемме Лоренца исчезают и получаем интегральное тождество:

$$\int_V \mathbf{E}^{(1)}(M) \cdot \mathbf{j}^{(2)}(M)\, dv_M = \int_V \mathbf{E}^{(2)}(M) \cdot \mathbf{j}^{(1)}(M)\, dv_M\ , \tag{7}$$

где – V все бесконечное слоистое пространство.

3. Вывод интегрального уравнения.

С помощью леммы Лоренца (7) прямая задача МТЗ (3) легко сводится к интегральному уравнению. Для этого в (7) положим $\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{E}^a$, $\mathbf{j}^{(1)} = \mathbf{J}_s$, а в качестве $\mathbf{E}^{(2)}$ возьмем поле $\mathbf{E}^{(P)}$ точечного единичного диполя $\mathbf{j}^{(2)} = \mathbf{p}\ \delta\left(r_{MM_0}\right)$, $\mathbf{p}$ -произвольный вектор, $\delta\left(r_{MM_0}\right)$ – трехмерная функция Дирака. Тогда получим

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}^a\left(M_0\right) = \int\limits_V \mathbf{E}^{(P)}\left(M, M_0\right) \cdot \mathbf{J}_s\left(M\right) dv_M \,. \tag{8}$$

Вспомогательные поля $\mathbf{E}^{(x)}\left(M, M_0\right)$, $\mathbf{E}^{(y)}\left(M, M_0\right)$, $\mathbf{E}^{(z)}\left(M, M_0\right)$ для $\mathbf{p}_1 = \left(1,0,0\right)$, $\mathbf{p}_2 = \left(0,1,0\right)$, $\mathbf{p}_3 = \left(0,0,1\right)$ составляют электрический тензор Грина для уравнений Максвелла:

$$\hat{\mathbf{G}}_E\left(M, M_0\right) = \left(\mathbf{E}^{(x)}\left(M, M_0\right), \mathbf{E}^{(y)}\left(M, M_0\right), \mathbf{E}^{(z)}\left(M, M_0\right)\right) \tag{9}$$

С помощью которого, согласно (8), аномальное электрическое поле в любой точке пространства выражается через избыточный ток в неоднородности

$$\mathbf{E}^a\left(M\right) = \int\limits_{V_H} \hat{\mathbf{G}}_E\left(M, M_0\right) \cdot \mathbf{J}_s\left(M_0\right) dv_{M_0} \,, \tag{10}$$

а магнитное поле, согласно (3), равно:

$$\mathbf{H}^a\left(M\right) = \frac{1}{i\omega\mu} rot \int\limits_{V_H} \hat{\mathbf{G}}_E\left(M, M_0\right) \cdot \mathbf{J}_s\left(M_0\right) dv_{M_0} \,. \tag{11}$$

Если (10) умножить на $\delta\sigma = \left(\sigma_H\left(x, y\right) - \sigma_c\right)$, то получим при интегральное уравнение для избыточного тока

$$\mathbf{J}_s\left(M\right) - \delta\sigma \int\limits_{V_H} \hat{\mathbf{G}}_E\left(M, M_0\right) \cdot \mathbf{J}_s\left(M_0\right) dv_{M_0} = \delta\sigma\ \mathbf{E}^0\left(M_0\right), \quad M \in V_H \,. \tag{12}$$

Определив из интегрального уравнения (12) избыточный ток $\mathbf{J}_s\left(M\right)$, легко, согласно (10-11), найти электромагнитное поле в любой точке пространства.

4. Решение интегрального уравнения.

Так как σ_H не зависит от координаты z, а электрическое поле в тонком слое также практически не зависит от z, то и решение интегрального уравнения $\mathbf{J}_s$ не зависит от z. Тогда уравнение (12) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} &\mathbf{J}_s\left(x, y\right) - \delta\sigma_c\left(x, y\right) \int\limits_{S_H} \hat{\mathbf{K}}\left(x - x_0, y - y_0\right) \cdot \mathbf{J}_s\left(x_0, y_0\right) dx_0 dy_0 = \\ &= \delta\sigma_c\left(x, y\right)\ \mathbf{E}^0\left(x, y\right), \qquad \left(x, y\right) \in S_H \,, \end{aligned} \tag{13}$$

где S_H - область неоднородности (сечение V_H), а

$$\hat{\mathbf{K}}(x-x_0, y-y_0) = \int_h^H \hat{\mathbf{G}}(x-x_0, y-y_0, z=z_c, z_0)dz_0, \text{ где } z_c = \frac{H+h}{2}. \quad (14)$$

Таким образом, мы пришли к двумерному интегральному уравнению с ядром, зависящим от разности аргументов, что существенно облегчает решение.

Определив из (13) избыточный ток $\mathbf{J}_s(x,y)$, согласно (10-11) находим аномальное электромагнитное поле на земной поверхности при $z=0$.

$$\mathbf{E}^a(x,y,z=0) = \int_{S_H} \hat{\mathbf{K}}_E(x-x_0, y-y_0) \cdot \mathbf{J}_s(x_0,y_0)dx_0dy_0, \quad (15)$$

$$\mathbf{H}^a(x,y,z=0) = \int_{S_H} \hat{\mathbf{K}}_H(x-x_0, y-y_0) \cdot \mathbf{J}_s(x_0,y_0)dx_0dy_0, \quad (16)$$

где

$$\hat{\mathbf{K}}_E(x-x_0, y-y_0) = \int_h^H \hat{\mathbf{G}}(x-x_0, y-y_0, z=0, z_0)dz_0, \quad (17)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_H(x-x_0, y-y_0) = \int_h^H \frac{1}{i\omega\mu} rot\ \hat{\mathbf{G}}(x-x_0, y-y_0, z=0, z_0)dz_0. \quad (18)$$

5. Обратная задача МТЗ.

Обратная задача МТЗ состоит в определении распределения электропроводности $\sigma(M)$ в полупространстве $z>0$ при известной зависимости импеданса $\hat{\mathbf{Z}}$ при $z=0$ от координат x,y и частоты ω, где тензор импеданса $\hat{\mathbf{Z}}$ связывает электромагнитные поля на земной поверхности $z=0$.

$$\mathbf{E}_\tau(x,y) = \hat{\mathbf{Z}}(x,y)\mathbf{H}_\tau(x,y), \quad (19)$$

где

$$\hat{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{pmatrix}, \ \mathbf{E}_\tau = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}, \ \mathbf{H}_\tau = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix}.$$

Так как поля $\mathbf{E}_\tau$, $\mathbf{H}_\tau$ зависят от частоты поля ω, то тензор импеданса $\hat{\mathbf{Z}}$ так же зависит от ω. При удалении от неоднородности тензор импеданса стремится к тензору импеданса для слоистой среды, т.е.

$$\hat{\mathbf{Z}}(x,y,\omega) \to \hat{\mathbf{Z}}^0(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & Z_0 \\ -Z_0 & 0 \end{pmatrix} \text{ при } \sqrt{x^2+y^2} \to \infty, \quad (20)$$

где $Z_0(\omega)$ - скалярный импеданс слоистой среды.

Согласно теореме Тихонова [3] частотная характеристика импеданса $Z_0(\omega)$ однозначно определяет электропроводность слоистой среды $\sigma(z)$. Для решения одномерной обратной задачи МТЗ разработаны различные устойчивые методы, основанные на регуляризации неустойчивых задач [4]. Поэтому в дальнейших исследованиях обратной задачи МТЗ неоднородного тонкого слоя будем исходить из того, что фоновая проводимость слоистой среды $\sigma(z)$ известна.

Граничное условие (19) принимает вид для аномальных полей $\mathbf{E}^a = \mathbf{E} - \mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^a = \mathbf{H} - \mathbf{H}^0$ с учетом $\mathbf{E}_\tau^0 = \hat{\mathbf{Z}}^0 \mathbf{H}_\tau^0$:

$$\mathbf{E}_\tau^a = \hat{\mathbf{Z}}^0 \mathbf{H}_\tau^0 + \hat{\mathbf{Z}}^a \left(\mathbf{H}_\tau^0 + \mathbf{H}_\tau^a \right), \ \hat{\mathbf{Z}}^a = \hat{\mathbf{Z}} - \hat{\mathbf{Z}}^0 . \tag{21}$$

При этом $\hat{\mathbf{Z}}^a(x, y) \to 0$ при $\sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$.

Обратную задачу по заданному импедансу можно перевести в обратную задачу по заданному на земной поверхности $(\mathrm{z} = 0)$ электромагнитному полю. Такой переход упрощает исследование и решение обратной задачи. Для перехода к новой постановке обратной задачи необходимо определить поле при $\mathrm{z} = 0$ по известному импедансу. Задача сводится к определению поля плоской волны, нормально падающей на плоскость с импедансным граничным условием (21). Эта задача легко решается методом интегральных уравнений, решение которых дает тангенциальные составляющие поля на земной поверхности.

6. Единственность решения обратной задачи.

Прямая задача МТЗ состоит в решении интегрального уравнения (13) при заданном распределении электропроводности тонкого слоя $\delta\sigma_c(x, y)$ и вычислении аномального электромагнитного поля на земной поверхности, согласно (15-16), по найденному избыточному току.

Обратная задача МТЗ для тонкого слоя состоит в определении $\delta\sigma_c(x, y)$ по дополнительной информации (измеренному на земной поверхности электромагнитному полю). Заметим, что по известному избыточному полю однозначно определяется распределение электропроводности $\delta\sigma_c$. Для доказательства этого утверждения запишем электрическое поле из интегрального уравнения (13) в виде:

$$\mathbf{E}(x, y) = \mathbf{E}^0(x, y) + \int\limits_{S_H} \hat{\mathbf{K}}(x - x_0, y - y_0) \cdot \mathbf{J}_s(x_0, y_0) dx_0 dy_0 . \tag{22}$$

Избыточный ток $\mathbf{J}_s$ равен

$$\mathbf{J}_s(x, y) = \delta\sigma_c(x, y)\ \mathbf{E}(x, y) \tag{23}$$

При известном $\mathbf{J}_s(x, y)$ выражения (21)-(22) однозначно определяют $\delta\sigma_c(x, y)$. Таким образом обратная задача сводится к определению

$\mathbf{J}_s(x,y)$ по известному полю на земной поверхности. Поля на земной поверхности связаны с избыточным током соотношениями (13-14). Эти соотношения при известных полях являются интегральными уравнениями первого рода с ядром, зависящим от разности аргументов. Решение этих уравнений существует и единственно, если существует спектр Фурье заданного аномального поля. Так как для локальной неоднородности $\delta\sigma_c(x,y)$ аномальное поле на земной поверхности финитно то, следовательно, у него существует спектр Фурье. Таким образом, из (13-14) однозначно определяется избыточный ток $\mathbf{J}_s(x,y)$, а, следовательно, как было сказано выше, однозначно определяется электропроводность тонкого слоя $\delta\sigma_c(x,y)$.

Литература.

1. *Бердичевский М.Н., Дмитриев В.И.*, Магнитотеллурическое зондирование горизонтальнонеоднородных сред.-М.Недра. 1992-250с.

2. *Berdichevsky M.N., Dmitriev V.I.* Magnetotellurics in the context of the theory of ill-posed problems.-USA, Society of Exploration Geophysicists, 2002.-215p.

3. *Тихонов А.Н.* К математическому обоснованию теории электромагнитных зондирований. ЖВММФ,1965, т.5, №3,с.545-547.

4. *Тихонов А.Н.Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач, М.Наука, 1974, 222с.

5. *Бердичевский М.Н., Дмитриев В.И.* Модели и методы магнитотеллурики. -М.:Научный мир, 2009.-680с.

6. *Дмитриев В.И., Захаров Е.В.* Метод интегральных уравнений вычислительной электродинамике.-М.:МАКС ПРЕСС, 2008,.-316с.