Л.В. Дородницын

СЕТОЧНЫЕ ОСЦИЛЛЯЦИИ В РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ И МЕТОД ИХ ПРИБЛИЖЕННОГО АНАЛИЗА

Введение

Многим разностным схемам — прежде всего, предназначенным для моделирования гиперболических систем уравнений — свойственны нефизические частые осцилляции в получаемых решениях. Вычислители применяют различные методы подавления таких колебаний, о чём имеется обширная литература. Однако данный феномен, имеющий дискретную природу, нуждается в детальном изучении. Это помогло бы выяснить, следует ли вообще искусственно подавлять схемные осцилляции, и если да, то находить наиболее эффективный способ.

Математически строгий анализ решений разностных систем уравнений обычно оказывается довольно затруднительным. Здесь почти нет аналитических решений и далеко не всегда — даже в линейном случае — возможно строго доказать корректность задачи [1, 2]. Дифференциальные уравнения математической физики в этом отношении являются более удобным и более традиционным объектом исследования.

Одним из «ориентировочных» способов оценки свойств разностных схем служит метод дифференциального приближения, изложенный в монографии [3] и применявшийся также в ряде последующих работ [4, 5] в основном для проверки устойчивости схем. Мы предлагаем новый подход, расширяющий применение данного метода на быстроосциллирующие решения.

Далее речь будет идти только об осцилляциях по пространству, причем о пилообразных колебаниях — вида $u(x_j) = (-1)^j\, v(x_j)$, где $(-1)^j$ можно трактовать как несущую волну, а $v(x_j)$ — как локальную амплитуду (огибающую). Аналогичные осцилляции по времени также присущи целому ряду разностных схем, но их роль не столь критична. По-видимому, для анализа таких явлений можно применить методику, похожую на ту, которая будет излагаться в настоящей работе. Данный круг вопросов находится за пределами нашего рассмотрения.

Возьмем в качестве примера аппроксимацию уравнения переноса

$$\partial u/\partial t + \partial u/\partial x = 0$$

схемой с центральными разностями

$$du_j/dt + (u_{j+1} - u_{j-1})/(2h) = 0. \quad (1)$$

Будем рассматривать задачу, дифференциальную по времени, имея в виду, что в численном алгоритме производная d/dt реализуется с помощью некоторого метода интегрирования по времени, например, схемы Кранка–Николсон.

Гармоническое решение (1) содержит «физическую» моду и паразитную пилообразную осцилляцию:

$$u(x_j, t) = a_1 \exp\{i\omega t - ikx_j\} + a_2 (-1)^j \exp\{i\omega t + ikx_j\}, \qquad (2)$$

где

$$k = k(\omega, h) = \arcsin(\omega h)/h = \omega + h^2\omega^3/6 + O(h^4).$$

Короткие волны — с длиной, близкой к двум шагам сетки, — присущи любым разностным схемам. Однако встречаются две различные ситуации, которые сформулируем в физических и в математических терминах.

1. При высоких частотах — волны короткие. Большим собственным значениям отвечают быстроосциллирующие собственные функции.
2. При низких частотах существуют короткие волны. Малые собственные значения порождают осциллирующие на сетке собственные функции.

В практике расчетов второй случай доставляет больше неприятностей, чем первый. Именно ему будет посвящено данное исследование.

Далее мы вкратце расскажем о методе дифференциального приближения и обсудим границы его применимости. Затем изложим модификацию метода, применимую к осциллирующим функциям. На примере центрально-разностных схем для уравнения переноса будет показана технология анализа основных уравнений, начально-краевых задач и — более подробно — стационарных спектральных задач. В конце статьи делаются обобщения метода на более сложные системы уравнений. Отдельно скажем об особенностях применения методики к нелинейным разностным схемам.

1. Метод дифференциального приближения

Описанный в [3] метод дифференциального приближения, который назовем классическим, заключается в представлении разностной схемы в виде дифференциальных уравнений, получаемых конечным разложением Тейлора по степеням шагов сетки. Эти уравнения аппроксимируются схемой с более высокой точностью, чем исходная задача. Яркий пример: схема с направленными разностями для уравнения переноса

$$du_j/dt + (u_j - u_{j-1})/h = 0$$

превращается в уравнение конвекции-диффузии, содержащее шаг сетки h:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{h}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = O(h^2)\,.$$

Важные результаты [3] связаны с дискретизацией по времени, однако этот математический аппарат не будет востребован в настоящей работе.

Применимость метода встречает проблемы.

1. Получаемое решение должно удовлетворять требованию плавности:

$$\frac{h}{\|u\|}\,\frac{\partial u}{\partial x} \to 0,\ h \to 0\,.$$

2. Дифференциальный порядок может не совпадать с разностным.
3. Краевая задача в дискретном и континуальном случае может требовать различное число граничных условий.

Схема с направленной разностью являет пример, когда дифференциальная задача, в отличие от разностной, нуждается в правом краевом условии.

По отношению к схеме с центральной разностью (1) метод оказывается почти бессильным. В первом дифференциальном приближении

$$\partial u/\partial t + \partial u/\partial x = O(h^2)$$

осциллирующее решение не обнаруживается.

Выпишем второе дифференциальное приближение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{6}\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = O(h^4)\,.$$

Преобразование Фурье–Лапласа $u = \exp\{i\omega t - ikx\}$ выявляет следующие три моды:

$$k_1(\omega) \approx \omega + \frac{h^2}{6}\omega^3, \quad k_2(\omega) \approx \frac{\sqrt{6}}{h} - \omega, \quad k_3(\omega) \approx -\frac{\sqrt{6}}{h} - \omega.$$

В разностной задаче существует всего две моды, хотя здесь вторая и третья моды совпали бы в узлах сетки, если бы в выражениях для k_2 и k_3 вместо $\sqrt{6}$ фигурировало число π, как в точном решении (2).

Итак, k_1 правильно описывает дисперсию физических мод, тогда как паразитные моды дают неприемлемую относительную ошибку $O(1)$. Причина такой потери точности лежит в нарушении требования плавности решения.

Классический метод дифференциального приближения не позволяет анализировать спектральную устойчивость начально-краевых задач для разностных моделей переноса. Это вызвано тем, что задача Штурма–Лиувилля для дифференциального уравнения переноса

$$\begin{aligned}&du/dx + \lambda u = 0, \quad 0 < x < L,\\ &u(0) = 0,\end{aligned}$$

имеет лишь тривиальное решение

$$u(x) = u(0)\exp\{-\lambda x\} \equiv 0\,,$$

то есть собственные значения и функции у нее не существуют. В то же время центрально-разностная схема (1) допускает постановку $u_0 = 0$, к которой добавляется то или иное правое граничное условие. Ниже мы приведем примеры таких разностных краевых задач.

2. Дифференциальное приближение осциллирующих схем

Очевидно, классический метод дифференциального приближения не может применяться к описанию быстроосциллирующих решений разностных схем, т.е. таких колебаний, характерная длина которых пропорциональна шагу сетки. Здесь нарушается принцип плавности (пункт 1).

Математический инструмент для исследования разностных схем с осцилляциями, период которых близок к двум шагам сетки, был предложен в [6]. Он основан на гипотезе о фоне и «пиле», т.е. разложении решения в виде

$$u(x_j\,,\,t) = \bar{u}(x_j\,,\,t) + (-1)^j a(x_j\,,\,t), \tag{3}$$

где $\bar{u}(x,t),\ a(x,t)$ — гладкие медленно меняющиеся функции непрерывных аргументов, удовлетворяющие свойству

$$\frac{h}{\|\bar{u}\|}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \to 0,\ \frac{h}{\|a\|}\frac{\partial a}{\partial x} \to 0,\ h \to 0\,. \tag{4}$$

Выражение (4) одновременно является априорным предположением и апостериорным условием применимости (3). Если в результате получилось решение, не удовлетворяющее (4), это значит, что для данной задачи технология не сработала.

Покажем методику на примере того же центрально-разностного уравнения переноса (1):

$$du_j/dt + (u_{j+1} - u_{j-1})/(2h) = 0.$$

Подстановка (3) дает

$$\frac{d\bar{u}_j}{dt} + \frac{\bar{u}_{j+1} - \bar{u}_{j-1}}{2h} + (-1)^j \left(\frac{da_j}{dt} - \frac{a_{j+1} - a_{j-1}}{2h} \right) = 0.$$

Из гипотезы плавности (4) следует, что выполняются сразу два равенства, которые, в свою очередь, подвергаются дифференциальному приближению. В итоге получаем:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^3} = O(h^4), \quad \frac{\partial a}{\partial t} - \frac{\partial a}{\partial x} = O(h^2).$$

Компактная трехточечная центрально-разностная схема $O(h^4)$ для уравнения переноса, описанная, например, в [7], имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{6}u_{j-1} + \frac{2}{3}u_j + \frac{1}{6}u_{j+1}\right] + \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} = 0.$$

Подстановка (3)–(4) приводит к системе

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = O(h^4), \quad \frac{\partial a}{\partial t} - 3\,\frac{\partial a}{\partial x} = O(h^2).$$

Пилообразная мода движется втрое быстрее, чем в обычной схеме с центральными разностями.

Далее покажем, как предложенный метод можно применять к анализу разностных начально-краевых задач. Ключевой момент состоит в том, чтобы итоговая система дифференциальных уравнений требовала столько же граничных условий, сколько их присутствует в разностной схеме. Это достигается за счет выбора минимально необходимого числа членов разложения по степеням h.

Пусть дана дискретная задача Дирихле для разностного уравнения переноса (1) на отрезке $\{0 \le x \le L\}$:

$$\begin{aligned} &du_j/dt + u_{\mathring{x},j} = 0, && j = 1, 2, \ldots, N{-}1, \\ &u_0 = u_N = 0, && u_j(0) = \varphi(x_j). \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь используется индексное обозначение $\mathring{x}$ для центрально-разностной производной из [1]. Начальная функция $\varphi(x)$ — финитная и гладкая: например, гауссиан с характерной шириной, заметно меньшей расстояния от его центра до границ области.

В решении (5) наблюдается следующий феномен. Начальный гладкий импульс движется вправо, затем отражается от границы влево в виде пакета с пилообразной несущей и плавной огибающей, а потом на левой границе формируется повторный гладкий импульс, не имеющий физической природы.

Модифицированный метод дифференциального приближения способен объяснить суть описанного явления. Для задачи (5) приближение первого порядка имеет вид:

$$\begin{aligned}&\partial\bar{u}/\partial t+\partial\bar{u}/\partial x=0,\ \ \partial a/\partial t-\partial a/\partial x=0,\ \ 0<x<L,\ t>0,\\&\bar{u}(0,t)+a(0,t)=0,\quad \bar{u}(L,t)+(-1)^N a(L,t)=0,\\&\bar{u}(x,0)=\varphi(x),\ \ a(x,0)=0.\end{aligned}\tag{6}$$

Напомним читателю, что в данной задаче нет разностной сетки, параметр N потерял смысл числа узлов и лишь дает два варианта постановки, где присутствует коэффициент $(+1)$ либо (-1).

Гиперболическая система с простейшими краевыми условиями (6) имеет точное решение, выражаемое аналитическими формулами. Эти формулы для различных интервалов времени выглядят по-разному, и мы выпишем их в упрощенном виде, опуская «переходные» этапы взаимодействия импульсов с границами:

$$\begin{array}{rlll}\text{I.} & \bar{u}(x,t)=\varphi(x-t), & a(x,t)\equiv 0. & \\ \text{II.} & a(L,t)=(-1)^{N+1}\varphi(L-t), & a(x,t)=(-1)^{N+1}\varphi(2L-x-t), & \bar{u}\equiv 0.\\ \text{III.} & \bar{u}(0,t)=(-1)^{N}\varphi(2L-t), & \bar{u}(x,t)=(-1)^{N}\varphi(2L+x-t), & a\equiv 0.\\ \ldots & & & \end{array}$$

3. Дифференциальное приближение разностных спектральных задач

Предложенный метод помогает оценивать собственные значения стационарных разностных задач. Сюда относится, прежде всего, необходимое условие устойчивости $\operatorname{Re}\lambda_k<0$. Дифференциальное приближение, разумеется, не может гарантировать устойчивость схемы. Однако, в сочетании с численным экспериментом, такой теоретический метод способен объяснить ряд наблюдаемых явлений и дезавуировать неудачные постановки задач.

Для центрально-разностной аппроксимации уравнения переноса рассмотрим ряд примеров спектральных задач, большинство из которых исследовались численно в [8].

Схема с краевыми условиями 1-го рода (5) принимает вид:

$$\begin{aligned}&u_{\mathring{x},j}+\lambda u_j=0,\ \ j=1,2,\ldots,N-1,\\&u_0=u_N=0.\end{aligned}\tag{7}$$

Подстановка $u(x_j) = \bar{u}(x_j) + (-1)^j a(x_j)$ дает с точностью до $O(h^2)$ систему 2-го порядка

$$\begin{array}{l} d\bar{u}/dx + \lambda\bar{u} = 0, \quad da/dx - \lambda a = 0, \quad 0 < x < L, \\ \bar{u}(0) + a(0) = 0, \quad \bar{u}(L) + (-1)^N a(L) = 0. \end{array} \tag{8}$$

Обе спектральные задачи имеют аналитические решения. Дифференциальная задача (8) обладает следующим бесконечным набором собственных чисел и функций:

$$\begin{array}{l} \lambda = \lambda_k = i\omega_k\,, \\ \bar{u}(x) = \bar{u}_k(x) = \exp\{-i\omega_k x\}, \quad a(x) = a_k(x) = -\exp\{i\omega_k x\}, \\ u_k(x_j) = \exp\{-i\omega_k x_j\} - (-1)^j \exp\{i\omega_k x_j\}, \\ \omega_k = \begin{cases} \dfrac{\pi k}{L}, & N - \text{четное}, \\ \dfrac{\pi + 2\pi k}{2L}, & N - \text{нечетное}, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Для наглядности выписана также сеточная функция $u_k(x_j)$, реконструированная на основе найденных $\bar{u}$ и a.

Точное решение исходной разностной задачи (7) имеет вид:

$$\lambda_k = \frac{i}{h}\sin(\omega_k h), \quad u_k(x_j) = \exp\{-i\omega_k x_j\} - (-1)^j \exp\{i\omega_k x_j\},$$
$$\begin{cases} k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(M-1), & N = 2M, \\ k = -M, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, M-1, & N = 2M+1. \end{cases}$$

Собственные функции $u_k(x_j)$ одни и те же, а умеренные по величине собственные значения λ_k совпадают с точностью до $O(h^2)$. Картина аналогична той, которая наблюдается в хрестоматийной задаче Штурма–Лиувилля [1] для оператора второй разности с условиями Дирихле.

Более интересные результаты получаются для других вариантов краевых условий, в частности, условия 1-го рода слева и 2-го рода справа:

$$\begin{array}{l} u_{\overset{\circ}{x},j} + \lambda u_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N-1, \\ u_0 = 0, \quad (u_N - u_{N-1})/h = 0. \end{array} \tag{9}$$

Дифференциальное приближение первого порядка для (9) выглядит как

$$\begin{array}{l} d\bar{u}/dx + \lambda\bar{u} = 0, \quad da/dx - \lambda a = 0, \quad 0 < x < L, \\ \bar{u}(0) + a(0) = 0, \quad \left(\dfrac{d\bar{u}}{dx} + (-1)^N \dfrac{2a}{h}\right)_{x=L} = 0. \end{array}$$

Решение представляется следующими собственными функциями и уравнением для собственного числа λ:

$$\bar{u}(x) = e^{-\lambda x}, \quad a(x) = -e^{\lambda x}, \qquad \lambda h = 2\,(-1)^{N-1}\, e^{2\lambda L}. \tag{10}$$

Остановимся на частном случае, когда собственное число вещественное: $\lambda \in \mathbb{R}$. Такое возможно только при четном числе узлов в исходной задаче: $(-1)^N = 1$, причем $\lambda < 0$ и справедлива формула

$$h(\lambda) = \frac{2}{|\lambda|} \exp\{-2|\lambda| L\}. \tag{11}$$

Данная функция монотонно убывает и, соответственно, характеризует рост абсолютной величины собственного числа с измельчением сетки, однако этот рост достаточно медленный.

Сеточная комбинация собственных функций есть

$$u_j = \exp\{|\lambda| x_j\} - (-1)^j \exp\{-|\lambda| x_j\}, \quad j = 0, 1, \ldots, N. \tag{12}$$

Типичный вид функции u_j показан на рис. 1.

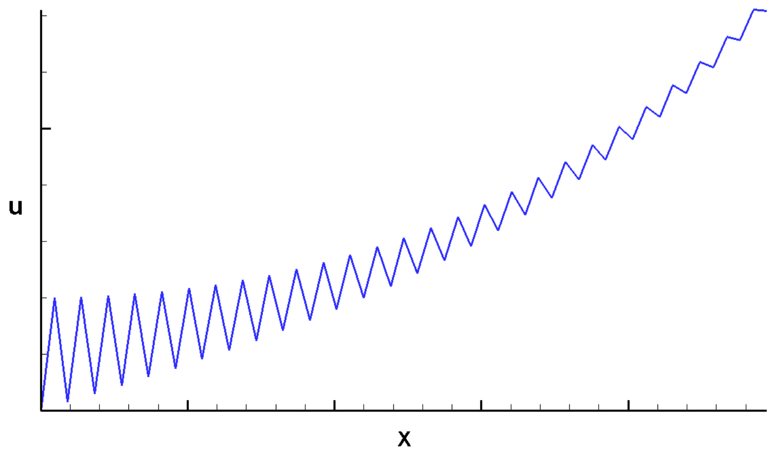


Рис. 1. Вид собственной функции, полученный на основе дифференциального приближения

Соотношение (11) хорошо подтверждается расчетами, что демонстрирует рис. 2, где изображена сплошная кривая $h(\lambda)$ по формуле (11) и нанесены маркеры для найденных численно собственных значений разностной задачи (9). При длине области $L = 1$ варьировалось число узлов N. Видно, что чем мельче шаг сетки h, тем точнее приближенное выражение (11). Поскольку по оси $|\lambda|$ шкала логарифмическая, график характеризует относительную погрешность.

Вернемся к общей формуле (10). Трансцендентное уравнение относительно λ обладает бесконечным дискретным множеством комплексных

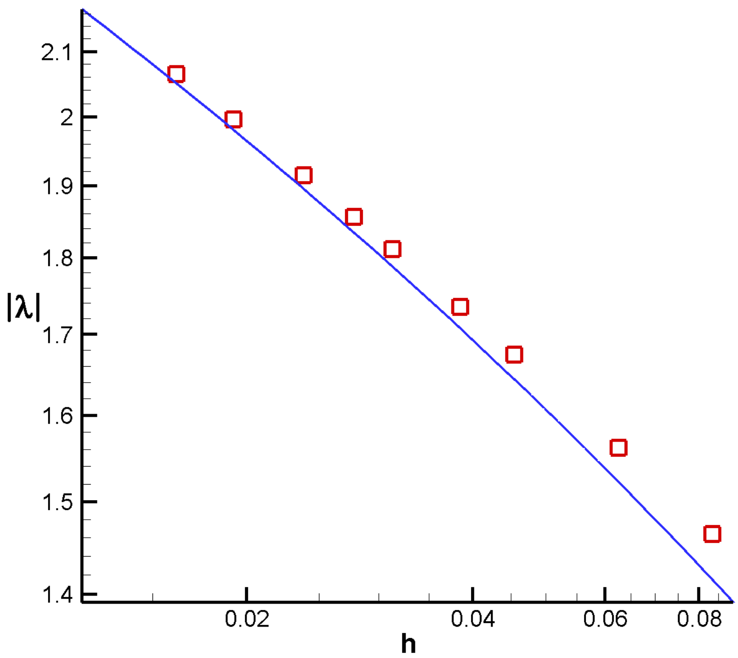


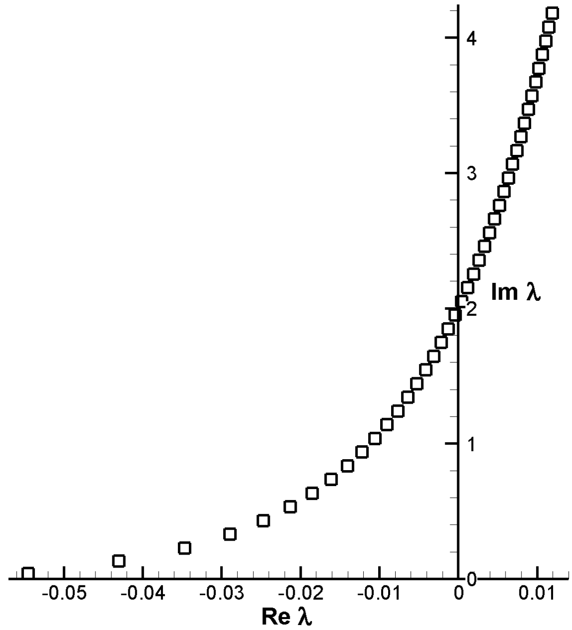
Рис. 2. Функция $h(\lambda)$ из (11) и вычисленные значения $\lambda(h)$ разностной задачи

корней, анализ которых приводится в Приложении. Все корни лежат на определенной кривой, симметричной относительно вещественной оси и пересекающей ее в точке, удовлетворяющей (11). При достаточно малых $|\lambda|$ кривая располагается левее мнимой оси ($\mathrm{Re}\,\lambda < 0$), пересекая ее в точках $\lambda = \pm 2/h$. С дальнейшим ростом $|\lambda|$ кривая остается в положительной полуплоскости, удаляясь от мнимой оси монотонно, но медленно.

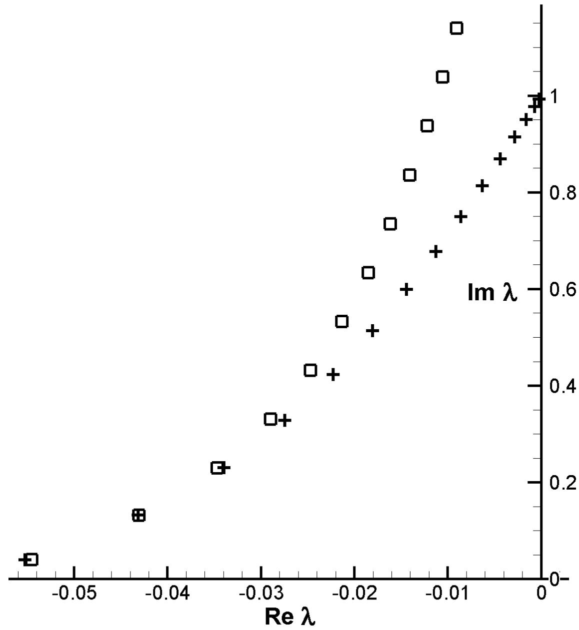
Итак, из уравнения (10) следует, что дифференциальное приближение не является устойчивым, однако неустойчивость проявляется лишь на собственных функциях с высокими λ, т.е. на частых осцилляциях. Такие функции не удовлетворяют критерию плавности (4) и потому результат о неустойчивости решения не может быть достоверным для исходной разностной задачи (9). Вычисления ее собственных чисел при различных N показали ее спектральную устойчивость: $\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0$.

На рисунке 3,а показано расположение собственных чисел λ_k из (10) на комплексной плоскости при значениях параметров $N = 31$, $h = 1$. Изображена только верхняя полуплоскость $\{\mathrm{Im}\,\lambda \geq 0\}$ ввиду симметрии спектра. По осям $\mathrm{Re}\,\lambda$ и $\mathrm{Im}\,\lambda$ масштабы различаются. Хорошо видно прохождение цепочки λ_k через точку $\lambda = 2i/h$.

Рисунок 3,б демонстрирует увеличенный фрагмент области, в котором отмечены как точки (10), так и собственные числа первоначальной разностной задачи (9). При умеренных $|\lambda|$ решения двух задач мало отличаются. Вместе с тем в разностной задаче наблюдается сгущение λ_k вблизи точек $\lambda = \pm i/h$.



а)



б)

Рис. 3. а) Спектр (10); б) фрагмент предыдущего ($\Box$) в сравнении со спектром разностной задачи ($+$)

Перейдем к следующему примеру: центрально-разностное уравнение переноса с левым краевым условием 1-го рода и с неотражающим условием справа, т.е. с аппроксимацией уравнения переноса противопотоковой схемой $O(h)$ в точке N. Спектральная задача принимает вид

$$\begin{aligned} &u_{\overset{\circ}{x},j} + \lambda u_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N{-}1, \\ &u_0 = 0, \quad (u_N - u_{N-1})/h + \lambda u_N = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Расположение собственных чисел (13) исследовалось численно в [8]. Устойчивость решения соответствующей нестационарной задачи доказывалась в [2, 9].

Выпишем для (13) дифференциальное приближение первого порядка:

$$\begin{aligned} &d\bar{u}/dx + \lambda\bar{u} = 0, \quad da/dx - \lambda a = 0, \quad 0 < x < L, \\ &\bar{u}(0) + a(0) = 0, \quad \left(-\frac{h}{2}\,\frac{d^2\bar{u}}{dx^2} + (-1)^N\,\frac{2a}{h}\right)_{x=L} = 0. \end{aligned}$$

При выводе правого краевого условия учитывалась связь между двумя разностными операторами и основное уравнение схемы (13):

$$\frac{\bar{u}_j - \bar{u}_{j-1}}{h} + \lambda\bar{u} = \bar{u}_{\overset{\circ}{x}} - \frac{h}{2}\,\frac{d^2\bar{u}}{dx^2} + O(h^2) + \lambda\bar{u} = -\frac{h}{2}\,\frac{d^2\bar{u}}{dx^2} + O(h^2)\,.$$

В решении дифференциальной задачи собственные функции и уравнение для λ таковы:

$$\bar{u}(x) = e^{-\lambda x}, \;\; a(x) = -e^{\lambda x}, \quad \lambda^2 h^2 = 4\,(-1)^{N-1}\, e^{2\lambda L}. \tag{14}$$

Вещественное собственное число ($\lambda \in \mathbb{R}$) существует только при нечетном числе узлов исходной задачи $(-1)^N = -1$. При этом

$$\lambda < 0, \quad h(\lambda) = \frac{2}{|\lambda|} \exp\{-|\lambda| L\}. \tag{15}$$

Реконструированная собственная функция вновь имеет вид (12).

Теперь рассмотрим центрально-разностное уравнение переноса с левым краевым условием 1-го рода и с правым неотражающим условием точности $O(h^2)$. Этому соответствует спектральная задача

$$\begin{aligned} &u_{\mathring{x},j} + \lambda u_j = 0, \;\; j = 1, 2, \ldots, N{-}1, \\ &u_0 = 0, \quad (3u_N - 4u_{N-1} + u_{N-2})/(2h) + \lambda u_N = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Расположение собственных чисел (16) исследовалось численно в [8].

Выведем для (16) дифференциальное приближение первого порядка. Правое граничное условие получается с учетом соотношения между разностными операторами

$$\frac{3\bar{u}_j - 4\bar{u}_{j-1} + \bar{u}_{j-2}}{2h} = \bar{u}_{\mathring{x}} - \frac{h^2}{2}\frac{d^3\bar{u}}{dx^3} + O(h^3)\,.$$

В итоге имеем систему

$$\begin{aligned} &d\bar{u}/dx + \lambda\bar{u} = 0, \;\; da/dx - \lambda a = 0, \;\; 0 < x < L, \\ &\bar{u}(0) + a(0) = 0, \;\; \left(-\frac{h^2}{2}\frac{d^3\bar{u}}{dx^3} + (-1)^N \frac{4a}{h}\right)_{x=L} = 0. \end{aligned}$$

В решении дифференциальной задачи собственные функции и уравнение для λ таковы:

$$\bar{u}(x) = e^{-\lambda x}, \;\; a(x) = -e^{\lambda x}, \quad \lambda^3 h^3 = 8\,(-1)^{N-1}\, e^{2\lambda L}. \tag{17}$$

Значение $\lambda \in \mathbb{R}$ существует только при нечетном числе узлов исходной задачи $(-1)^N = -1$:

$$\lambda < 0, \quad h(\lambda) = \frac{2}{|\lambda|} \exp\left\{-\frac{2}{3}|\lambda| L\right\}. \tag{18}$$

Реконструированная собственная функция вновь имеет вид (12).

Сравнивая в различных задачах формулы для вещественного собственного значения (11), (15), (18), можно обнаружить закономерность: чем лучше аппроксимация правого краевого условия, тем больше $|\lambda|$. С одной стороны, из этого следует, что в перечисленных схемах (нестационарных) осциллирующие моды затухают всё быстрее. С другой стороны, согласно (12), у правой границы амплитуда осцилляции понижается, зато отклонение u от нуля увеличивается, создавая нежелательный эффект.

Указанное выше свойство связано с аппроксимацией левого краевого условия 1-го рода. Помимо прямого задания $u_0 = 0$, существуют альтернативные способы. Рассмотрим вариант с постановкой условия входящего потока [10] слева и условия 2-го рода справа. Этому отвечает спектральная задача

$$\begin{aligned} &u_{\overset{\circ}{x},j} + \lambda u_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N{-}1, \\ &(u_0 + u_1)/(2h) + \lambda u_0 = 0, \quad (u_N - u_{N-1})/h = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Дифференциальное приближение принимает вид:

$$\begin{aligned} &d\bar{u}/dx + \lambda\bar{u} = 0, \quad da/dx - \lambda a = 0, \quad 0 < x < L, \\ &\left(\frac{\bar{u}}{h} + \frac{\lambda a}{2}\right)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{d\bar{u}}{dx} + (-1)^N \frac{2a}{h}\right)_{x=L} = 0. \end{aligned}$$

Левое краевое условие упрощено подстановкой da/dx из основного уравнения.

Дифференциальная задача имеет следующее решение:

$$\bar{u}(x) = \lambda h\, e^{-\lambda x}, \; a(x) = -2\, e^{\lambda x}, \quad \lambda^2 h^2 = 4\,(-1)^{N-1}\, e^{2\lambda L}.$$

Уравнение для собственного числа повторяет случай (14) сочетания левого условия 1-го рода с правым неотражающим условием $O(h)$. Спектры совпадают. Разница заключена в структуре собственной функции.

Вещественное собственное значение удовлетворяет ранее выписанной формуле (15):

$$\lambda < 0, \quad h(\lambda) = \frac{2}{|\lambda|} \exp\{-|\lambda| L\}.$$

По-новому выглядит реконструированная собственная функция:

$$u(x_j) = \lambda h \exp\{|\lambda| x_j\} - 2\,(-1)^j \exp\{-|\lambda| x_j\}.$$

«Гладкая» составляющая имеет малую амплитуду, и ее вид слабо влияет на поведение решения задачи.

Мы видим, как за счет выбора левого граничного условия можно улучшить схему: в частности, свойства решения вблизи правой границы.

Кроме того, не изменяя правое краевое условие, удается повысить степень затухания $\operatorname{Re}\lambda$ осцилляций нестационарной разностной задачи.

Следующие два примера относятся к аппроксимации системы одномерных уравнений линейной акустики с неотражающими краевыми условиями типа излучения [6, 8]. Дифференциальная задача сводится к уравнению переноса со специальным условием на левой границе:

$$\begin{aligned} &\partial u/\partial t + \partial u/\partial x = 0, \quad 0 < x < L, \\ &\partial u/\partial t - \partial u/\partial x = 0, \quad x = 0. \end{aligned}$$

Первый пример дает неустойчивую постановку задачи. Пусть в центрально-разностной схеме дифференциальное уравнение на левой границе аппроксимируется с $O(h)$, а справа ставится условие 1-го рода. Спектральная задача такова:

$$\begin{aligned} &u_{\mathring{x},j} + \lambda u_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N{-}1, \\ &(u_0 - u_1)/h + \lambda u_0 = 0, \quad u_N = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Дифференциальное приближение (20) приводится к виду

$$\begin{aligned} &d\bar{u}/dx + \lambda\bar{u} = 0, \quad da/dx - \lambda a = 0, \quad 0 < x < L, \\ &a(0)/h + \lambda\bar{u}(0) = 0, \quad \bar{u}(L) + (-1)^N a(L) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает уравнение для собственного числа

$$\lambda h = (-1)^N e^{-2\lambda L}.$$

Вещественное λ существует при четном числе узлов $(-1)^N = 1$, причем

$$\lambda > 0, \quad h(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\exp\{-2\lambda L\}.$$

Неустойчивые моды ($\operatorname{Re}\lambda > 0$), как легко видеть, имеются в случаях четных и нечетных N.

Следующая разностная задача, которая ранее рассматривалась в [8], отличается от (20) тем, что на правой границе ставится неотражающее условие $O(h)$ из (13), т.е. применяются симметричные краевые условия:

$$\begin{aligned} &u_{\mathring{x},j} + \lambda u_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N{-}1, \\ &(u_0 - u_1)/h + \lambda u_0 = 0, \quad (u_N - u_{N-1})/h + \lambda u_N = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Именно такого рода постановки используются в расчетах уравнений акустики. С теоретической точки зрения, задача интересна и трудна в связи с тем, что в ней сочетаются «плохое» краевое условие слева и «хорошее» условие справа.

В дифференциальном приближении (21) комбинируются уже знакомые формулы:

$$d\bar{u}/dx + \lambda\bar{u} = 0, \;\; da/dx - \lambda a = 0, \;\; 0 < x < L,$$
$$\frac{a(0)}{h} + \lambda\bar{u}(0) = 0, \;\; \left(-\frac{h}{2}\frac{d^2\bar{u}}{dx^2} + (-1)^N\frac{2a}{h}\right)_{x=L} = 0.$$

Решение имеет следующий вид:

$$\bar{u}(x) = h\,e^{-\lambda x}, \;\; a(x) = -\lambda\,e^{\lambda x}, \quad \lambda h = 4\,(-1)^{N-1}\,e^{2\lambda L}. \tag{22}$$

Случай $\lambda \in \mathbb{R}$ возможен при $(-1)^N = 1$, и тогда

$$\lambda < 0, \quad h(\lambda) = \frac{4}{|\lambda|}\exp\{-2|\lambda|L\}.$$

Уравнение для λ в (22) дает те же решения, что и аналогичное уравнение из (10), но теперь при h, в два раза более крупных. Повторяется ситуация, когда соответствующие умеренным λ моды устойчивы. Неположительность спектра разностной задачи (21) подтверждается экспериментами [8]. Однако там же было теоретически установлено наличие изолированного собственного числа $\lambda h \approx -4/3$, которое данным методом не обнаруживается.

4. Обобщения

Данный метод легко обобщается на схемы с переменными коэффициентами — при условии, что коэффициенты дифференциальной задачи являются медленно меняющимися функциями.

Неравномерные сетки с постепенным изменением шага (квазиравномерные сетки) трактуются аналогично предыдущему случаю. Шаг сетки вводится как непрерывная функция пространства $h(x)$.

Системы уравнений можно записать как уравнения относительно неизвестной векторной функции $\mathbf{U}$. Решение подвергается разложению вида (3):

$$\mathbf{U} \equiv (\,u^1, u^2, \ldots, u^m\,)^T = \overline{\mathbf{U}}(x_j\,,t) + (-1)^j\mathbf{A}(x_j\,,t).$$

В частности, аппроксимация гиперболической системы уравнений

$$\partial\mathbf{U}/\partial t + C\,\partial\mathbf{U}/\partial x = 0\,, \;\; C \in \mathbb{R}^{m\times m},$$

с помощью схемы с центральными разностями

$$d\mathbf{U}_j/dt + C\,\mathbf{U}_{\overset{\circ}{x},j} = 0$$

дает в первом приближении гиперболическую систему удвоенной размерности

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{U}}}{\partial t} + C\,\frac{\partial \overline{\mathbf{U}}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - C\,\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = 0.$$

Пространственно-многомерные задачи также подвластны предложенной методике. Пусть, например, двумерное уравнение переноса

$$\partial u/\partial t + c_x\,\partial u/\partial x + c_y\,\partial u/\partial y = 0$$

аппроксимируется на равномерной прямоугольной сетке с шагами $\Delta x,\ \Delta y$ центрально-разностной схемой

$$\frac{du_{jk}}{dt} + c_x\,\frac{u_{j+1,k} - u_{j-1,k}}{2\Delta x} + c_y\,\frac{u_{j,k+1} - u_{j,k-1}}{2\Delta y} = 0\,.$$

Схема приводится к разложению по функциям четырех видов

$$\begin{aligned} u(x_j\,,\,y_k\,,\,t) = \bar{u}(x_j\,,\,y_k\,,\,t) + (-1)^j a_x(x_j\,,\,y_k\,,\,t) + \\ + (-1)^k a_y(x_j\,,\,y_k\,,\,t) + (-1)^{j+k} a_{xy}(x_j\,,\,y_k\,,\,t) \end{aligned}$$

и к задаче для системы из четырех уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + c_x\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + c_y\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = 0, &\qquad \frac{\partial a_x}{\partial t} - c_x\,\frac{\partial a_x}{\partial x} + c_y\,\frac{\partial a_x}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial a_y}{\partial t} + c_x\,\frac{\partial a_y}{\partial x} - c_y\,\frac{\partial a_y}{\partial y} = 0, &\qquad \frac{\partial a_{xy}}{\partial t} - c_x\,\frac{\partial a_{xy}}{\partial x} - c_y\,\frac{\partial a_{xy}}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

5. Нелинейные задачи

Именно такие задачи рассматривались в [6]. Следуя предложенной методике, будем применять указанное выше разложение (3) в сочетании с гипотезой (4) при дополнительном предположении о малости амплитуды осцилляции $\|a\| \ll \|\bar{u}\|$. Точнее, минимальное требование состоит в том, чтобы было

$$\|a\|\,/\,\|\bar{u}\| \to 0,\ h \to 0\,.$$

Физически это можно интерпретировать как наличие гладкого фона, на котором имеется пилообразное возмушение.

В качестве примера выберем уравнение Хопфа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}\big(u^2\big) = 0\,,$$

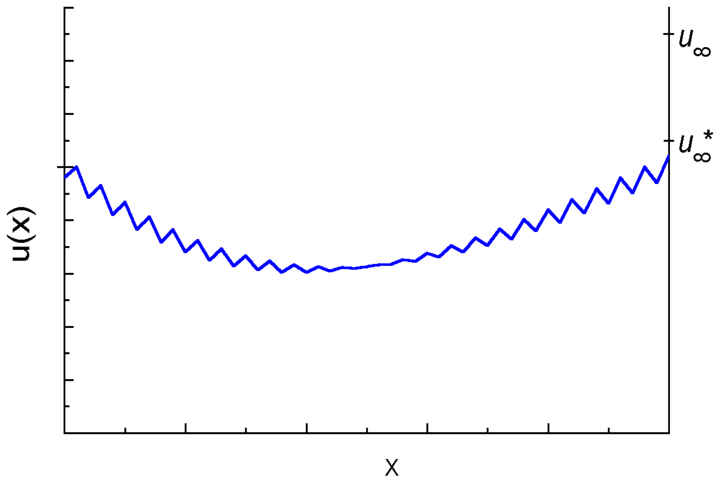


Рис. 4. Иллюстрация эффекта «неправильной асимптотики»

которое аппроксимируется центрально-разностной схемой, дополненной правым краевым условием в виде релаксации к u_∞, где используется направленная разность:

$$\frac{du_j}{dt} + \frac{1}{2}\big(u^2\big)_{\mathring{x},j} = 0\,, \quad j = 1, 2, \ldots, N-1,$$
$$(u_N - u_{N-1})/h = \beta\,(u_\infty - u_N)\,.$$

Разложение дает два уравнения для фоновой и осциллирующей компонент и граничное соотношение между ними. Последнее означает релаксацию решения к измененному значению u_∞^* (см. рис. 4):

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\big(\bar{u}^2\big) + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\big(\bar{u}^2\big) = O(h^4 + a^2), \qquad \frac{\partial a}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\big(\bar{u}a\big) = O(h^4 + a^2),$$

$$\left.\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right|_{x=L} = \beta\Big(u_\infty^* - \bar{u}\big|_{x=L}\Big)\,, \quad u_\infty^* = u_\infty - (-1)^N\,\frac{2a}{\beta h} + O(h + a)\,.$$

Факт «неправильной асимптотики» подтверждается количественно расчетами [6], где также предложено альтернативное граничное условие, уменьшающее данный эффект.

Заключение

Таким образом, всякий метод дифференциального приближения не является математически строгим. Вместе с тем, разновидность метода, работающая с пилообразными функциями, успешно проходит многочисленные вычислительные тесты. Аналитические решения, не известные в дискретном случае, позволяют судить о свойствах численного решения, в том числе обнаруживать неустойчивости.

Приложение. Решение системы уравнений, определяющей точки спектра

В ряде приводимых в данной работе задач на собственные значения встречается уравнение относительно числа λ общего вида

$$\lambda^n h^n = 2^n\,(-1)^{N-1}\,e^{2\lambda L},\ \lambda \in \mathbb{C}. \tag{A.1}$$

Натуральная степень $n = 1$ в (10), $n = 2$ в (14), $n = 3$ в (17). К такому же выражению сводится случай (22). Исследуем поведение корней этого уравнения.

Представим неизвестное комплексное число λ в экспоненциальной форме

$$\lambda = |\lambda|\,e^{i\alpha},\ \ |\lambda| \geq 0,\ -\pi < \alpha \leq \pi\,,$$

и запишем уравнение (A.1), выделяя в обеих частях модуль и аргумент:

$$|\lambda|^n h^n\,e^{in\alpha} = 2^n \exp(2|\lambda|L\cos\alpha)\,(-1)^{N-1}\exp(2i|\lambda|L\sin\alpha)\,. \tag{A.2}$$

Это равносильно системе двух уравнений — для модулей и аргументов.

Уравнение для модулей, которое вытекает из (A.2), таково:

$$|\lambda|^n h^n = 2^n \exp(2|\lambda|L\cos\alpha) \neq 0.$$

Логарифмируя, получаем то же в форме

$$n\ln(|\lambda|h/2) = 2\,|\lambda|L\cos\alpha\,, \tag{A.3}$$

разрешимой относительно α. Отсюда следует диапазон изменения $\cos\alpha$ и монотонное возрастание $|\lambda|$ на нём:

$$-1 \leq \cos\alpha \leq \frac{nh}{4eL}\,,\quad \lambda_* \leq |\lambda| \leq \frac{2e}{h}\,,$$

где $\lambda_* > 0$ — единственный вещественный корень уравнения

$$\lambda^n h^n = 2^n \exp(-2\lambda L)\,.$$

Кривая (A.3) пересекает мнимую ось в точках

$$\{\cos\alpha = 0,\ |\lambda| = 2/h\}\ \Leftrightarrow\ \lambda = \pm 2i/h\,.$$

Достигнув значения $2e/h$, величина $|\lambda|$ возрастает далее, тогда как $\cos\alpha$ убывает, причем

$$|\lambda| \to \infty,\ \cos\alpha \to 0.$$

Перепишем уравнение (A.3) в виде

$$n\ln(|\lambda|h/2) = 2L\,\mathrm{Re}\,\lambda\,.$$

Отсюда следует монотонный рост $\mathrm{Re}\,\lambda$ с увеличением $|\lambda|$ и медленная, логарифмическая асимптотика удаления кривой от мнимой оси.

Вернемся к уравнению (A.2) и сократим его на неравный нулю модуль числа. Получаем:

$$e^{in\alpha} = (-1)^{N-1}\exp(2i\lambda L\sin\alpha)\,,$$

что равносильно выражениям:

$$n\alpha - 2|\lambda|L\sin\alpha = \begin{cases} 2k\pi, & N\ -\ \text{нечетное},\\ (2k{+}1)\pi, & N\ -\ \text{четное}, \end{cases} \qquad k\in\mathbb{Z}. \tag{A.4}$$

Множество корней уравнения, как легко видеть, симметрично относительно вещественной оси (пары корней отвечают двум различным номерам k). Кроме того, левая часть (A.4), которую запишем в форме

$$n\alpha - 2L\,\mathrm{Im}\,\lambda\,,$$

является в верхней полуплоскости монотонно убывающей функцией $\mathrm{Im}\,\lambda$ (вспомним связь (A.3) между модулем и аргументом). Отсюда следует единственность решения (A.4) для каждого фиксированного k. При больших k расстояние между соседними корнями стремится к величине π/L.

Литература

1. *А.А. Самарский.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. (*A.A. Samarskii.* The Theory of Difference Schemes. – Marcel Dekker inc., New York and Basel, 2001.)
2. *А.А. Самарский, А.В. Гулин.* Устойчивость разностных схем. – М.: Наука, 1973.
3. *Ю.И. Шокин, Н.Н. Яненко.* Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике. – Новосибирск: Наука, 1985.
4. *Ю.И. Шокин, А.И. Урусов, В.Н. Яньшин.* К анализу устойчивости двухслойных разностных схем методом дифференциального приближения // Докл. АН СССР, 1989, т.305, № 3, с.543–545.
5. *З.И. Федотова.* О конструктивном подходе к исследованию устойчивости разностных схем // Вычислительные технологии, 2003, т.8, спец. выпуск, с.93–103.

6. *Л.В. Дородницын.* Искусственные граничные условия при численном моделировании дозвуковых течений газа // ЖВМ и МФ, 2005, т.45, № 7, с.1251–1278. (*L.V. Dorodnitsyn.* Artificial boundary conditions for numerical simulation of subsonic gas flows // Comput. Math. Math. Phys., 2005, v.45, pp.1209–1234.)
7. *А.И. Толстых.* Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. – М.: Наука, 1990.
8. *Л.В. Дородницын.* Аналитическое и численное исследование спектров трехточечных разностных операторов // Прикладная математика и информатика № 27 – М.: МАКС Пресс, 2007, с.25–45. (*L.V. Dorodnitsyn.* Analytical and numerical investigation of the spectra of three-point difference operators // Comput. Math. Model., 2008, v.19, pp.343–358.)
9. *Л.В. Дородницын.* Об устойчивости некоторых разностных задач с неотражающими краевыми условиями // Прикладная математика и информатика № 49 – М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2015, с.97–102.
10. *C. Hirsch.* Numerical Computation of lnternal and External Flows Vol. 2: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows. – Wiley, New York, 1990.