

*Л.В. Дородницын*

## **НЕОТРАЖАЮЩИЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ВЯЗКОГО ГАЗА \***

### **Введение**

При численном моделировании внешних дозвуковых течений газа актуален вопрос о корректном задании условий на свободных (искусственных) границах расчетной области. С физической точки зрения, искусственные граничные условия не должны вызывать отражение волн, благодаря чему они получили название неотражающих. История создания неотражающих условий для задач газовой динамики насчитывает более 30 лет.

Неотражающие граничные условия достаточно хорошо разработаны для системы уравнений Эйлера. Выводить искомые условия позволяют две удобные технологии. Во-первых, это анализ волн в линеаризованных газодинамических уравнениях с применением преобразования Фурье [1]–[3]. Во-вторых, разложение пространственно одномерных уравнений Эйлера по характеристикам, благодаря которому так называемые характеристические граничные условия были обобщены на нелинейные задачи [4, 5].

Замечательным фактом является то, что в одномерном случае уравнения Эйлера — как линейные, так и нелинейные — допускают точные неотражающие граничные условия. При наличии двух или трех пространственных измерений волны, описываемые линеаризованными уравнениями Эйлера, поддаются полному анализу, однако в этом случае невозможно получить локальные (алгебраические или дифференциальные) неотражающие граничные условия. Локальные приближенно неотражающие условия, уточняющие одномерные характеристические условия, были предложены в [3] для двумерных линеаризованных уравнений Эйлера.

Настоящая работа посвящена задачам, которые описываются системами уравнений динамики вязкого газа. Мы будем рассматривать классические уравнения Навье–Стокса и разновидности квазигазодинамической (КГД) системы [6]–[8]. Модели КГД хорошо себя зарекомендовали в качестве основы вычислительных алгоритмов. Все перечисленные системы представляют собой уравнения Эйлера с дополнительными (вязкими, диссипативными) членами, содержащими вторые производные по простран-

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 09–01–00600.

ству.

Постановка искусственных граничных условий для уравнений динамики вязкого газа сталкивается с двумя затруднениями. Во-первых, такие системы уравнений требуют большего числа граничных условий, чем уравнения Эйлера. Эта ситуация хорошо известна на примере условий на твердом теле, когда к условию непротекания в уравнениях Навье–Стокса добавляется условие прилипания. Та же проблема возникает на искусственных границах.

Второе обстоятельство связано с различием волн в вязком и невязком газе: последним, прежде всего, присуще затухание. Если граничные уравнения точны для уравнений Эйлера, они могут вызывать отражение волн в вязком газе. Анализ волн, задаваемых линеаризованными системами уравнений динамики вязкого газа, весьма сложен уже в одномерном случае.

В большинстве приложений, в частности, в задачах обтекания при высоких числах Рейнольдса, диссипация слабо влияет на свойства волн, достигающих границ области. Единственно важным остается задание дополнительных граничных условий, которые не требовались для уравнений Эйлера. Другие проблемы, связанные, прежде всего, с нелинейностью и многомерностью, решаются в рамках уравнений Эйлера. Большинство авторов, включая [9]–[12], при постановке граничных условий для уравнений Навье–Стокса игнорировали наличие вязких членов или, по крайней мере, обходились без учета их количественных параметров. Например, в [11] используются характеристические условия для уравнений Эйлера из [5], к которым добавлены граничные уравнения для диссипативных потоков.

Лишь в немногих публикациях учитываются значения коэффициентов диссипации. Автор [13] вносит поправки в характеристические граничные условия [4], а также предлагает дополнительные граничные уравнения. Процедура основана на принципе максимального убывания энергии возмущений. Вместе с тем подход [13] оценивает отражение волн довольно грубо, хотя и улучшает до определенной степени свойства первоначальных граничных условий. Другой способ коррекции характеристических условий предложен в [14]: он более аккуратен, но дает слишком громоздкие выражения.

Искусственные граничные условия для квазигазодинамической системы предлагались автором начиная с работы [15] и затем совершенствовались в [16]–[18]. Однако практическая польза от модификации граничных условий была незначительна. Так, технология задания граничных условий при численном моделировании течений с низким числом Маха, разработанная в [19], совершенно не опирается на реальные диссипативные пара-

метры. Отметим также, что, как показывают расчеты ряда задач [7, 19, 20], КГД система менее чувствительна к виду искусственных граничных условий, чем уравнения Навье–Стокса.

В [18] впервые было продемонстрировано преимущество граничных условий, учитывающих диссипацию, перед их невязкими вариантами путем расчета нелинейной тестовой задачи. В настоящей работе развиваются подходы, начатые в [18]. Дается более подробное обоснование ранее предложенной методики на основе фурье-анализа линеаризованных моделей динамики вязкого газа. Как и прежде, внимание сосредоточено на пространственно одномерном случае. Кроме того, исправлены имевшиеся в предыдущей публикации арифметические ошибки.

В § 1 приводятся различные системы макроскопических уравнений, описывающие вязкий газ. Затем выполняется их линеаризация, необходимая для дальнейшего их анализа и построения неотражающих граничных условий. В § 2 изложены методы построения и показаны примеры неотражающих условий для линеаризованных уравнений Эйлера. В § 3 технология вывода граничных условий перенесена на случай систем динамики вязкого газа. § 4 посвящен адаптации граничных условий, полученных для линейных моделей, к нелинейным системам уравнений. Наконец, в § 5 детально исследуется прямое численное моделирование задачи о структуре фронта неподвижной ударной волны. Эта задача, послужившая иллюстрацией применения неотражающих условий в [18], известна как базовый тест для моделей вязкого газа.

## 1. Уравнения динамики вязкого газа и их линеаризация

В данном параграфе выпишем системы уравнений, описывающие пространственно одномерную динамику вязкого газа различными способами. Затем получим линеаризованный вид этих систем, который нам потребуется для дальнейшего исследования их физических свойств и построения неотражающих граничных условий для них.

Уравнения Навье–Стокса таковы:

$$\begin{aligned}
 \rho_t + (\rho u)_x &= 0, \\
 (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x &= \frac{4}{3}(\mu u_x)_x, \\
 (\rho v)_t + (\rho uv)_x &= (\mu v_x)_x, \\
 E_t + (u(E+p))_x &= \frac{4}{3}(\mu uu_x)_x + (\mu vv_x)_x + (\lambda T_x)_x.
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

где

$$E = \frac{p}{\gamma-1} + \rho \frac{u^2+v^2}{2}, \quad p = \rho \mathcal{R}T, \quad \lambda = \frac{\gamma \mathcal{R} \mu}{(\gamma-1) \text{Pr}}, \quad \mu = \mu(T).$$

Здесь  $\rho$  — плотность,  $u, v$  — компоненты скорости,  $E$  — полная энергия,  $p$  — давление,  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $\mathcal{R}$  — газовая постоянная,  $T$  — температура,  $\lambda, \mu$  — коэффициенты, соответственно, теплопроводности и динамической вязкости,  $\text{Pr}$  — число Прандтля. Нижними индексами для краткости обозначены частные производные скалярных величин по соответствующим переменным.

Квазигазодинамическая система [6, 7] имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= (\tau (\rho u^2 + p)_x)_x, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x &= (\tau (\rho u^3 + 3\rho u)_x)_x, \\ (\rho v)_t + (\rho uv)_x &= (\tau (\rho u^2 v + p v)_x)_x, \\ E_t + (u(E+p))_x &= (\tau ((E+2p)u^2 + (E+p)\mathcal{R}T)_x)_x. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $\tau = \mu/p$  — среднее время свободного пробега молекулы.

В ряде публикаций рассматривались модификации квазигазодинамической системы, позволяющие учитывать (регулировать) соотношение между эффектами вязкости и теплопроводности. В такие модели вводится в качестве дополнительного параметра число Прандтля  $\text{Pr}$ , фигурирующее в уравнениях Навье–Стокса. Мы остановимся на варианте из [6, 8], который назовем обобщенной КГД системой. Последняя отличается от оригинальной системы (1.2) уравнением энергии:

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= (\tau (\rho u^2 + p)_x)_x, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x &= (\tau (\rho u^3 + 3\rho u)_x)_x, \\ (\rho v)_t + (\rho uv)_x &= (\tau (\rho u^2 v + p v)_x)_x, \\ E_t + (u(E+p))_x &= (\tau ((E+2p)u^2 + \rho(u^2+v^2)/2)_x)_x + \\ &+ \left( \tau \frac{\gamma}{\gamma-1} \mathcal{R}T p_x \right)_x + \left( \tau \frac{\gamma}{\gamma-1} \mathcal{R} \text{Pr}^{-1} p T_x \right)_x. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Чтобы исследовать поведение волн в приведенных выше моделях вязкого газа, выполним линеаризацию этих систем дифференциальных уравнений. Введем примитивные переменные

$$V = (\rho \ u \ v \ p)^T$$

и представим их в виде сумм фоновых значений и возмущений:

$$V = \bar{V} + U,$$

где

$$\bar{V} = (\bar{\rho} \bar{u} \bar{v} \bar{p})^T, \quad U = (\rho' u' v' p')^T.$$

Примем следующие гипотезы.

- (i) основные уравнения справедливы для фоновых величин;
- (ii) члены  $O(U^2)$  несущественны;
- (iii) фоновые параметры изменяются плавно по сравнению с возмущениями.

Уточним последнее условие. В процессе линеаризации систем уравнений на основе постулатов (i) и (ii) возникают члены двух видов: фоновые параметры, умноженные на производные возмущений, и возмущения, умноженные на производные фона. Будем считать, что вторые величины много меньше первых, т.е.

$$\left\| \frac{\partial \bar{V}}{\partial \alpha} U^T \right\| \ll \left\| \bar{V} \frac{\partial U^T}{\partial \alpha} \right\|, \quad \text{где } \alpha = t, x. \quad (1.4)$$

Для наших целей будет достаточным провести линеаризацию уравнений на постоянном фоне  $\bar{V} = \text{const}$ , что значительно упрощает предыдущую ситуацию. В дальнейшем, при переходе к нелинейным уравнениям, мы вернемся к первоначальным гипотезам.

В результате приходим к линеаризованным уравнениям Навье–Стокса, которые выпишем в векторном виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + C_x \frac{\partial U}{\partial x} = \nu D_{xx}^{NS} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (1.5)$$

где

$$C_x = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \rho c^2 & 0 & u \end{pmatrix}, \quad D_{xx}^{NS} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -c^2/\text{Pr} & 0 & 0 & \gamma/\text{Pr} \end{pmatrix},$$

$\nu = \mu/\rho$  — коэффициент кинематической вязкости,  $c = (\gamma p/\rho)^{1/2}$  — скорость звука. Здесь и далее в линейных уравнениях с постоянными коэффициентами мы не будем обозначать чертами фоновые параметры.

Линеаризованная квазигазодинамическая система такова:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + C_x \frac{\partial U}{\partial x} = \tau D_{xx} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (1.6)$$

где

$$D_{xx} = \begin{pmatrix} u^2 & 2\rho u & 0 & 1 \\ 0 & u^2 + 3c^2/\gamma & 0 & 2u/\rho \\ 0 & 0 & u^2 + c^2/\gamma & 0 \\ -c^4/\gamma & 2\rho c^2 u & 0 & u^2 + 2c^2 \end{pmatrix}.$$

Линеаризованная обобщенная КГД система имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} + C_x \frac{\partial U}{\partial x} = \tau D_{xx}^{\text{Pr}} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (1.7)$$

где

$$D_{xx}^{\text{Pr}} = \begin{pmatrix} u^2 & 2\rho u & 0 & 1 \\ 0 & u^2 + 3c^2/\gamma & 0 & 2u/\rho \\ 0 & 0 & u^2 + c^2/\gamma & 0 \\ -c^4/(\gamma \text{Pr}) & 2\rho c^2 u & 0 & u^2 + (1 + 1/\text{Pr})c^2 \end{pmatrix}.$$

В монографиях [6, 7] исследовался вопрос о связи квазигазодинамических описаний сплошной среды с классическими уравнениями Навье–Стокса. В правых частях систем (1.2) и (1.3) удается выделить члены, ответственные за вязкость, теплопроводность, а также диффузию, которая не рассматривается в рамках модели Навье–Стокса.

В линеаризованных системах уравнений данное свойство приводит к тому, что диссипативные матрицы представимы в виде сумм. Для КГД системы (1.6) имеем:

$$D_{xx} = \widehat{D}_{xx} + C_x^2, \quad (1.8)$$

где

$$\widehat{D}_{xx} = \frac{c^2}{\gamma} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 - \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -c^2 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

В обобщенной КГД системе (1.7)

$$D_{xx}^{\text{Pr}} = \widehat{D}_{xx}^{\text{Pr}} + C_x^2, \quad (1.9)$$

где

$$\widehat{D}_{xx}^{\text{Pr}} = \frac{c^2}{\gamma} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 - \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -c^2/\text{Pr} & 0 & 0 & \gamma/\text{Pr} \end{pmatrix}.$$

В оригинальной КГД системе матрица  $(\gamma/c^2) \widehat{D}_{xx}$  переходит в матрицу  $D_{xx}^{NS}$  при значениях констант  $\gamma = 5/3$  (случай одноатомного газа) и  $\text{Pr} = 1$ . Для обобщенной КГД системы  $(\gamma/c^2) \widehat{D}_{xx}^{\text{Pr}} = D_{xx}^{NS}$  при  $\gamma = 5/3$  и любом числе Прандтля.

## 2. Неотражающие условия для линеаризованных уравнений Эйлера

Уравнения Эйлера, описывающие невязкий газ, получаются из систем динамики вязкого газа, например, (1.1), путем отбрасывания правых частей, имеющих порядок величины  $\mu$  или  $\tau$ . При линеаризации уравнений Эйлера также возникает система с нулевой правой частью

$$\frac{\partial U}{\partial t} + C_x \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \quad (2.1)$$

Одномерные линеаризованные уравнения Эйлера имеют простой вид и допускают точные неотражающие условия. Об этом говорилось, в частности, в [3] в контексте двумерного случая. Исчерпывающий анализ проведен в [17]. Повторим его основные результаты, на которых затем будет базироваться методика построения граничных условий для вязкого газа.

Обсудим общую постановку задачи. В ее исходной формулировке во всём пространстве  $x \in \mathbb{R}$  справедлива основная система линеаризованных газодинамических уравнений (2.1). Затем требуется перейти к конечному отрезку. Для простоты будем рассматривать полуограниченные области  $x \in [0, \infty)$  при изучении условия на левой границе и  $x \in (-\infty, 0]$  в случае правой границы. Пусть граничное условие представляет собой линейную однородную систему общего вида

$$\mathcal{L}U|_{x=0} = 0 \quad (2.2)$$

и состоит из  $n$  уравнений.

Будем рассматривать дозвуковое фоновое течение в положительном направлении:

$$0 < u < c. \quad (2.3)$$

В этом случае левая граница является входной, а правая — выходной.

Ищутся решения системы (2.1) в виде гармонических волн

$$U = \widehat{U} \exp\{i\omega t - ikx\}, \quad \omega \geq 0, \quad k \in \mathbb{C}, \quad (2.4)$$

где  $\omega$  — вещественная частота,  $k$  — комплексное волновое число. Все такие решения удовлетворяют уравнению

$$(\omega I - kC_x) \widehat{U} = 0 \quad (2.5)$$

( $I$  — единичная матрица), называемому образом Фурье уравнения (2.1) и представляющему собой спектральную задачу. При отражении гармонической волны от границы ее частота не меняется, тогда как волновое число становится другим. Поэтому найдем зависимость  $k = k_j(\omega)$  и собственные векторы  $\widehat{U} = \widehat{U}_j$ . Полный набор решений задачи (2.5) таков:

$$\begin{aligned} \omega &= (u + c)k, & k_1 &= \omega/(c+u), & \widehat{U}_1 &= (\rho \quad c \quad 0 \quad \rho c^2)^T, \\ \omega &= (u - c)k, & k_2 &= -\omega/(c-u), & \widehat{U}_2 &= (\rho \quad -c \quad 0 \quad \rho c^2)^T, \\ & & & & \widehat{U}_3 &= (\rho \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T, \\ \omega &= uk, & k_3 &= \omega/u, & & \\ \omega &= uk, & k_4 &= k_3 = \omega/u, & \widehat{U}_4 &= (0 \quad 0 \quad c \quad 0)^T. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Перечисленные моды описывают правую и левую акустические волны, энтропийную и вихревую волну.

Из формул (2.6) вытекают также характеристические (фазовые) скорости волн

$$\begin{aligned} c_j &= \omega/k_j, \quad j = 1, \dots, 4: \\ c_1 &= u + c, \quad c_2 = u - c, \quad c_3 = c_4 = u. \end{aligned} \quad (2.7)$$

При дозвуковом течении (2.3) левая акустическая волна движется влево, а остальные — вправо:  $c_2 < 0$ ,  $c_1, c_3, c_4 > 0$ .

Далее рассматривается решение уравнений Эйлера (2.1) вида линейной комбинации гармоник (2.6) с произвольными коэффициентами:

$$U = \sum_{j=1}^4 a_j \widehat{U}_j \exp\{i\omega t - ik_j x\}. \quad (2.8)$$

При задании граничного условия (2.2) такая форма решения сохраняется, но коэффициенты удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^4 \widehat{V}_j a_j = 0, \quad \text{где} \quad \widehat{V}_j = \widehat{\mathcal{L}}(k_j, \omega) \widehat{U}_j, \quad j = 1, \dots, 4. \quad (2.9)$$

Здесь через  $\widehat{\mathcal{L}}(k, \omega)$  обозначен образ Фурье оператора  $\mathcal{L}$  для функции (2.4), который является матрицей размерности  $n \times 4$ . Векторы  $\widehat{V}_j$  имеют, соответственно, размерность  $n$ .

Неотражающим граничным условием является такое уравнение (2.2), для которого система (2.9) имеет решением нулевые коэффициенты при



входящих модах (2.8) и произвольные коэффициенты при выходящих модах. На левой границе ко входящим волнам относятся правая акустическая, энтропийная и вихревая волны, а к выходящим — левая акустическая мода. На правой границе — всё наоборот.

Формулируется критерий неотражающего граничного условия. Обозначим через  $\mathcal{J}$  множество индексов выходящих волн. Условие (2.2) является неотражающим тогда и только тогда, когда при всех  $\omega$  :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}}(k_j, \omega) \widehat{U}_j &= 0, \quad j \in \mathcal{J}, \\ \widehat{\mathcal{L}}(k_j, \omega) \widehat{U}_j &- \text{линейно независимы, } j \notin \mathcal{J}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Для дозвукового выхода ( $\mathcal{J} = \{1, 3, 4\}$ ) критерий (2.10) записывается как

$$\begin{cases} \widehat{\mathcal{L}}(k_1, \omega) \widehat{U}_1 = 0, \\ \widehat{\mathcal{L}}(k_3, \omega) \widehat{U}_3 = 0, \\ \widehat{\mathcal{L}}(k_3, \omega) \widehat{U}_4 = 0, \\ \widehat{\mathcal{L}}(k_2, \omega) \widehat{U}_2 \neq 0, \end{cases} \quad \forall \omega. \quad (2.11)$$

На дозвуковом входе ( $\mathcal{J} = \{2\}$ ) критерий (2.10) приобретает вид:

$$\widehat{\mathcal{L}}(k_2, \omega) \widehat{U}_2 = 0, \quad \text{rank} (\widehat{V}_1 \quad \widehat{V}_3 \quad \widehat{V}_4) = 3, \quad \forall \omega. \quad (2.12)$$

Из (2.11), (2.12) следует, что на дозвуковом выходе необходимо задать по крайней мере одно скалярное уравнение, а на дозвуковом входе — не менее трех. Однако на обеих границах можно поставить и больше условий, не вступая в противоречие с критериями.

Выделяются два основных класса неотражающих граничных условий. Первый из них — алгебраические характеристические условия. Образ Фурье оператора  $\mathcal{L}$  представляет собой постоянную матрицу  $\widehat{\mathcal{L}}(k, \omega) \equiv \mathbf{L}$ . Чтобы удовлетворить критерию (2.10), нужно найти, по аналогии с задачей (2.5), левые собственные векторы

$$\check{U} (\omega \mathbf{I} - k \mathbf{C}_x) = 0. \quad (2.13)$$

Векторы-строки  $\check{U} = \check{U}_j$  имеют вид

$$\begin{aligned} \check{U}_1 &= \frac{1}{2\rho c^2} (0 \quad \rho c \quad 0 \quad 1), & \check{U}_2 &= \frac{1}{2\rho c^2} (0 \quad -\rho c \quad 0 \quad 1), \\ \check{U}_3 &= \frac{1}{\rho c^2} (c^2 \quad 0 \quad 0 \quad -1), & \check{U}_4 &= (0 \quad 0 \quad 1/c \quad 0). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Они удовлетворяют соотношению

$$\check{U}_j \widehat{U}_l = \delta_{jl},$$

где  $\delta_{jl}$  — символ Кронекера.

Матрица  $L$  составляется из левых собственных векторов (2.13) с номерами входящих волн, и граничная система записывается в форме

$$\check{U}_j U = 0, \quad j \notin \mathcal{J}. \quad (2.15)$$

Правое граничное условие есть уравнение

$$\rho c u' - p' = 0, \quad (2.16)$$

а на входе задаются три уравнения

$$\rho c u' + p' = 0, \quad c^2 \rho' - p' = 0, \quad v' = 0. \quad (2.17)$$

Второй класс неотражающих условий — «скалярные» граничные условия, или условия излучения. Образ Фурье граничного оператора представляет собой дисперсионное соотношение выходящих волн, умноженное на единичную матрицу:

$$\widehat{\mathcal{L}}(k, \omega) = I \prod_{j \in \mathcal{J}} (k - k_j).$$

Обратное преобразование Фурье дает, с точностью до множителя, выражение

$$\mathcal{L}U = \left( \prod_{j \in \mathcal{J}} \mathcal{L}_j \right) U, \quad \text{где} \quad \mathcal{L}_j \varphi = \varphi_t + c_j \varphi_x \quad (2.18)$$

(см. (2.7)). Отсюда получаем неотражающее условие на входе

$$\mathcal{L}U \equiv \mathcal{L}_2 U \equiv \frac{\partial U}{\partial t} - (c-u) \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (2.19)$$

и неотражающее условие на выходе (с учетом  $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$ ):

$$\mathcal{L}U \equiv \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_3 U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + (c+2u) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + u(c+u) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0. \quad (2.20)$$

Из двух основных классов выводятся новые варианты неотражающих граничных условий. Для этого используются следующие методы и правила.

1. Члены граничных уравнений можно заменять с помощью подстановки уравнений из основной системы (2.1) или их дифференциальных следствий. Условие остается неотражающим, будучи другой формой записи того же граничного условия.
2. Каждое уравнение граничной системы можно дифференцировать или интегрировать по  $t$ , а всю систему в целом — также по  $x$ . Неотражающее условие остается таковым. Примеры — дифференциальные выходные характеристические условия, основанные на (2.16):

$$\rho c u'_t - p'_t = 0$$

либо

$$\rho c u'_x - p'_x = 0.$$

Изменение граничного условия при помощи более общих операторов может нарушить его неотражающее свойство. Выходящие волны не могут отражаться, но априори возможна потеря линейной независимости столбцов в (2.10), что ведет к появлению входящих волн с произвольными амплитудами.

3. Допускается подстановка в граничное уравнение других граничных уравнений или производных от них.
4. Можно строить алгебраические следствия, в частности, подсистемы, исходных систем граничных уравнений либо сочетать два разных граничных условия. Пример вывода нового входного условия приведен в [17, 19].

Преобразования граничных условий, указанные в этом и предыдущем пунктах, в том числе изменение количества граничных уравнений (как уменьшение, так и увеличение), могут дать оператор, допускающий входящие волны. Модифицированное граничное условие нуждается в дополнительной проверке.

Предыдущие примеры граничных условий трудно приспособить к системам динамики вязкого газа. Во-первых, последние требуют большего числа уравнений на каждой границе, чем система уравнений Эйлера. Практический интерес для нас будут представлять системы из четырех граничных уравнений. Во-вторых, как в уравнениях Эйлера, так и во всех рассматриваемых здесь моделях вязкого газа присутствуют только первые производные по времени. Поэтому в граничных условиях производные по  $t$

более высоких порядков нежелательны с точки зрения вычислительных алгоритмов.

Условие на входе (2.19), являясь формально переопределенной системой для уравнений Эйлера, удовлетворяет указанным требованиям.

Чтобы получить желаемое условие на выходе, потребуется использовать дифференциальное следствие основной системы уравнений Эйлера. Систему (2.1) удобно переписать, введя лагранжеву производную по времени

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}, \quad (2.21)$$

в форме

$$\frac{dU}{dt} + \widehat{C}_x \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (2.22)$$

где

$$\widehat{C}_x = C_x - uI = \begin{pmatrix} 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho c^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Применим к (2.22) оператор

$$I \frac{d}{dt} - \widehat{C}_x \frac{\partial}{\partial x}, \quad (2.23)$$

в результате чего получим:

$$\frac{d^2 U}{dt^2} - \widehat{C}_x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0. \quad (2.24)$$

Условие на правой границе выведем из условия излучения (2.20). Выразим вторую производную по времени из уравнения (2.24), с учетом (2.21):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -2u \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} - u^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \widehat{C}_x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Преобразованное таким способом условие (2.20) содержит общее дифференцирование по  $x$ . Интегрируя, получаем:

$$c \frac{\partial U}{\partial t} + cu \frac{\partial U}{\partial x} + \widehat{C}_x^2 \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \quad (2.25)$$

Запишем (2.25) в покомпонентном виде:

$$\begin{aligned} \rho'_t + u \rho'_x + c^{-1} p'_x &= 0, & u'_t + (c+u) u'_x &= 0, \\ v'_t + u v'_x &= 0, & p'_t + (c+u) p'_x &= 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

### 3. Граничные условия для линейных моделей динамики вязкого газа

Для различных систем уравнений, описывающих динамику вязкого газа, в качестве искусственных граничных условий пригодны неотражающие условия для уравнений Эйлера, состоящие из достаточного числа уравнений. Такие граничные условия перестают быть точными для моделей вязкого газа, становясь приближенными неотражающими условиями. Однако в ряде задач качество приближения окажется недостаточно высоким, для чего потребуются внести поправки в граничные уравнения. Мы придем к данным выводам, проведя анализ волн в рассматриваемых нами системах уравнений.

#### 3.1. Волны в системах динамики вязкого газа

Попытаемся найти собственные моды линеаризованных уравнений Навье–Стокса и разновидностей квазигазодинамической системы.

Начнем с обсуждения КГД системы. Подстановка в (1.6) гармонической волны (2.4) порождает спектральную задачу

$$\left(\omega I - kC_x - i\tau\omega \frac{k^2}{\omega} D_{xx}\right) \hat{U} = 0. \quad (3.1)$$

Будем считать, что

$$\eta = \tau\omega \ll 1 \quad (3.2)$$

— малый параметр.

В качестве решения задачи (3.1) нас интересует набор волновых чисел  $k = k_j(\omega)$  и отвечающие им собственные векторы  $\hat{U} = \hat{U}_j^v(\omega)$ . Число таких собственных пар равно 8. Учтя допущение (3.2), заметим, что (3.1) представляет собой возмущенную задачу на собственные значения (2.5), описывающую гармоники в уравнениях Эйлера. Четыре собственных значения и вектора можно найти как поправки к аналогичным объектам спектральной задачи (2.5) путем разложения по малому параметру (3.2). Назовем эти решения регулярными. Остальные собственные пары (сингулярные решения) не имеют прототипов в уравнениях Эйлера и в значительной степени затрудняют анализ.

Аналогичная ситуация возникает и в случае уравнений Навье–Стокса. Подстановка в (1.5) гармоники (2.4) приводит к спектральной задаче

$$\left(\omega I - kC_x - i\nu k^2 D_{xx}^{MS}\right) \hat{U} = 0. \quad (3.3)$$

Для уравнений Навье–Стокса, с учетом соотношения

$$\nu = \tau c^2 / \gamma,$$

в роли малого параметра выступает, вместо (3.2), величина  $\eta = \gamma\nu\omega/c^2$ . Отличие от КГД системы в том, что благодаря вырожденности матрицы  $D_{xx}^{NS}$  существуют не 4, а только 3 сингулярных собственных значения и вектора. Проблему нахождения сингулярных решений обсудим ниже.

Приступим к нахождению регулярных мод, удовлетворяющих линеаризованным уравнениям Навье–Стокса. Процедура во многом повторяет метод анализа волн уравнений Эйлера с рефракцией из [18]. Наряду с задачей (3.3), будет полезной задача для левых собственных векторов

$$\check{U} (\omega I - kC_x - i\nu k^2 D_{xx}^{NS}) = 0. \quad (3.4)$$

Разложим решения (3.3) и (3.4) по степеням малого параметра. Нулевым приближением ( $\nu = 0$ ), очевидно, являются решения задач для уравнений Эйлера (2.5) и (2.13). Разложения величин удобно представить в следующей форме:

$$k = \frac{\omega}{c_j} \left( 1 - \frac{i\nu\omega}{c_j^2} c_j^{(1)} + O(\eta^2) \right), \quad \widehat{U} = \widehat{U}_j + \frac{i\nu\omega}{c_j^2} \widehat{U}_j^{(1)} + O(\eta^2), \quad (3.5)$$

$$\check{U} = \check{U}_j + \frac{i\nu\omega}{c_j^2} \check{U}_j^{(1)} + O(\eta^2), \quad j = 1, \dots, 4.$$

Параметры  $c_j$ ,  $\widehat{U}_j$ ,  $\check{U}_j$  задаются формулами (2.6), (2.7), (2.14). Ограничимся первым приближением, т.е. нахождением величин  $c_j^{(1)}$ ,  $\widehat{U}_j^{(1)}$  и  $\check{U}_j^{(1)}$ .

Подстановка (3.5) в (3.3) дает уравнения для поправок собственных векторов  $\widehat{U}_j^{(1)}$ :

$$(c_j I - C_x) \widehat{U}_j^{(1)} = c_j \left( D_{xx}^{NS} - c_j^{(1)} I \right) \widehat{U}_j, \quad j = 1, \dots, 4. \quad (3.6)$$

Правая часть (3.6) должна быть ортогональна решению сопряженной системы — вектору  $\check{U}_j$ , откуда следуют выражения для поправок собственных значений (волновых чисел):

$$c_j^{(1)} = \check{U}_j D_{xx}^{NS} \widehat{U}_j, \quad j = 1, \dots, 4, \quad (3.7)$$

Поскольку имеется кратное собственное значение  $k_3 = k_4 = \omega/u$ , поправки к собственным векторам  $\widehat{U}_3^{(1)}$  и  $\widehat{U}_4^{(1)}$  должны дополнительно удовлетворять условию разрешимости системы для второго приближения, непосредственный вид которого нам не важен. Собственные векторы начального приближения являются обобщенно-ортогональными в смысле

$$\check{U}_4 D_{xx}^{NS} \widehat{U}_3 = 0, \quad \check{U}_3 D_{xx}^{NS} \widehat{U}_4 = 0.$$

Поэтому для поправок  $\widehat{U}_3^{(1)}$  и  $\widehat{U}_4^{(1)}$  справедлива система из (3.6) и уравнений

$$\check{U}_4 \left( D_{xx}^{NS} - c_3^{(1)} \mathbf{I} \right) \widehat{U}_3^{(1)} = 0, \quad \check{U}_3 \left( D_{xx}^{NS} - c_4^{(1)} \mathbf{I} \right) \widehat{U}_4^{(1)} = 0. \quad (3.8)$$

Более детальное объяснение для общего случая возмущенной спектральной задачи можно найти в [18].

Первое приближение (3.5) левых собственных векторов (3.4) задается выражениями, полностью аналогичными (3.6), (3.8). Однако в определении поправок правых и левых собственных векторов имеется произвол. Целесообразно согласовать эти поправки друг с другом, с тем чтобы выполнялось свойство

$$\left( \check{U}_j + \frac{i\nu\omega}{c_j^2} \check{U}_j^{(1)} \right) \left( \widehat{U}_l + \frac{i\nu\omega}{c_l^2} \widehat{U}_l^{(1)} \right) = \delta_{jl} + O(\eta^2).$$

Отсюда следуют соотношения

$$c_l^2 \check{U}_j^{(1)} \widehat{U}_l = -c_j^2 \check{U}_j \widehat{U}_l^{(1)}, \quad j = 1, \dots, 4, \quad l = 1, \dots, 4, \quad (3.9)$$

которые при заданных  $\widehat{U}_l^{(1)}$  означают систему линейных уравнений для определения  $\check{U}_j^{(1)}$ .

Найдя поправки из уравнений (3.6)–(3.9), выпишем формулы приближенного решения спектральных задач (3.3), (3.4). Оно получается при подстановке в (3.5) следующих выражений:

$$\begin{aligned} c_1^{(1)} &= \frac{\gamma-1}{2\text{Pr}} + \frac{2}{3}, & \widehat{U}_1^{(1)} &= \left( \frac{\gamma-1}{\text{Pr}} \rho \quad \left( \frac{\gamma-1}{2\text{Pr}} - \frac{2}{3} \right) c \quad 0 \quad 0 \right)^T, \\ \check{U}_1^{(1)} &= \frac{1}{2\rho c^2} \left( \frac{c^2}{\text{Pr}} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{2}{3} - \frac{\gamma+1}{2\text{Pr}} \right), \\ c_2^{(1)} &= \frac{\gamma-1}{2\text{Pr}} + \frac{2}{3}, & \widehat{U}_2^{(1)} &= \left( -\frac{\gamma-1}{\text{Pr}} \rho \quad \left( \frac{\gamma-1}{2\text{Pr}} - \frac{2}{3} \right) c \quad 0 \quad 0 \right)^T, \\ \check{U}_2^{(1)} &= -\frac{1}{2\rho c^2} \left( \frac{c^2}{\text{Pr}} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{2}{3} - \frac{\gamma+1}{2\text{Pr}} \right), \\ c_3^{(1)} &= \frac{1}{\text{Pr}}, & \widehat{U}_3^{(1)} &= (0 \quad -c/\text{Pr} \quad 0 \quad 0)^T, & \check{U}_3^{(1)} &= -\frac{\gamma-1}{\text{Pr}c} (0 \ 1 \ 0 \ 0), \\ c_4^{(1)} &= 1, & \widehat{U}_4^{(1)} &= 0, & \check{U}_4^{(1)} &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Отметим, что за счет вязких поправок волновые числа энтропийной ( $j = 3$ ) и вихревой ( $j = 4$ ) мод в (3.5) стали различаться.

Для квазигазодинамической системы (3.1), аналогично (3.5), будем искать разложения

$$k = \frac{\omega}{c_j} \left( 1 - i\eta \frac{c^2}{\gamma c_j^2} c_j^{(1)} + O(\eta^2) \right), \quad \widehat{U} = \widehat{U}_j + i\eta \frac{c^2}{\gamma c_j^2} \widehat{U}_j^{(1)} + O(\eta^2), \quad (3.11)$$

$$\check{U} = \check{U}_j + i\eta \frac{c^2}{\gamma c_j^2} \check{U}_j^{(1)} + O(\eta^2), \quad j = 1, \dots, 4.$$

где вновь фигурируют объекты невязкой модели (2.5), (2.13). Процедура нахождения поправок первого приближения повторяет случай уравнений Навье–Стокса. В результате в разложение (3.11) подставляются величины

$$c_1^{(1)} = 1 + \gamma (c+u)^2/c^2, \quad \widehat{U}_1^{(1)} = ((\gamma-1)\rho \quad (\gamma-2)c \quad 0 \quad 0)^T,$$

$$\check{U}_1^{(1)} = \frac{1}{2\rho c^2} (c^2 \quad 0 \quad 0 \quad -(\gamma-1)),$$

$$c_2^{(1)} = 1 + \gamma (c-u)^2/c^2, \quad \widehat{U}_2^{(1)} = (-(\gamma-1)\rho \quad (\gamma-2)c \quad 0 \quad 0)^T,$$

$$\check{U}_2^{(1)} = -\frac{1}{2\rho c^2} (c^2 \quad 0 \quad 0 \quad -(\gamma-1)), \quad (3.12)$$

$$c_3^{(1)} = 1 + \gamma u^2/c^2, \quad \widehat{U}_3^{(1)} = (0 \quad -c \quad 0 \quad 0)^T, \quad \check{U}_3^{(1)} = -\frac{\gamma-1}{c} (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0),$$

$$c_4^{(1)} = 1 + \gamma u^2/c^2, \quad \widehat{U}_4^{(1)} = 0, \quad \check{U}_4^{(1)} = 0.$$

Для обобщенной КГД системы (1.3) также составляется спектральная задача вида (3.1), но с заменой  $D_{xx}$  на  $D_{xx}^{\text{Pr}}$ . Ее решение ищется в форме разложения (3.11), что приводит к следующему результату:

$$c_1^{(1)} = \frac{\gamma-1}{2\text{Pr}} + \frac{3-\gamma}{2} + \frac{\gamma}{c^2} (c+u)^2,$$

$$\widehat{U}_1^{(1)} = \left( \frac{\gamma-1}{\text{Pr}} \rho \quad \left( \frac{\gamma-1}{2\text{Pr}} - \frac{3-\gamma}{2} \right) c \quad 0 \quad 0 \right)^T,$$

$$\check{U}_1^{(1)} = \frac{1}{2\rho c^2} \left( \frac{c^2}{\text{Pr}} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{3-\gamma}{2} - \frac{\gamma+1}{2\text{Pr}} \right),$$

$$c_2^{(1)} = \frac{\gamma-1}{2\text{Pr}} + \frac{3-\gamma}{2} + \frac{\gamma}{c^2} (c-u)^2,$$

$$\widehat{U}_2^{(1)} = \left( -\frac{\gamma-1}{\text{Pr}} \rho \quad \left( \frac{\gamma-1}{2\text{Pr}} - \frac{3-\gamma}{2} \right) c \quad 0 \quad 0 \right)^T, \quad (3.13)$$

$$\check{U}_2^{(1)} = -\frac{1}{2\rho c^2} \left( \frac{c^2}{\text{Pr}} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{3-\gamma}{2} - \frac{\gamma+1}{2\text{Pr}} \right),$$

$$c_3^{(1)} = \frac{1}{\text{Pr}} + \frac{\gamma u^2}{c^2}, \quad \widehat{U}_3^{(1)} = -\frac{c}{\text{Pr}} (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0)^T, \quad \check{U}_3^{(1)} = -\frac{\gamma-1}{\text{Pr} c} (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0),$$

$$c_4^{(1)} = 1 + \gamma u^2/c^2, \quad \widehat{U}_4^{(1)} = 0, \quad \check{U}_4^{(1)} = 0.$$



Поправки к волновым параметрам для квазигазодинамических моделей (3.12) и (3.13) имеют прямое отношение к аналогичным величинам в уравнениях Навье–Стокса (3.10). Благодаря связям между матрицами в формулах (1.8) и (1.9), а также свойствам

$$\check{U}_j C_x \widehat{U}_j = c_j, \quad \check{U}_j C_x^2 \widehat{U}_j = c_j^2,$$

выражения для  $c_j^{(1)}$  в (3.7)) состоят из «навьестоксовских» и дополнительных членов:

$$c_j^{(1)} = c_j^{(1)NS} + \frac{\gamma}{c^2} c_j^2.$$

Вторые члены, взятые без первых, привели бы к набору дисперсионных соотношений, отвечающих уравнениям конвекции-диффузии

$$\varphi_t + c_j \varphi_x = \tau c_j^2 \varphi_{xx}, \quad j = 1, \dots, 4.$$

В итоге же к диффузии добавляется диссипация Навье–Стокса. Поправки к собственным векторам  $\widehat{U}_j^{(1)}$  и  $\check{U}_j^{(1)}$  не изменились по сравнению со случаем Навье–Стокса, поскольку матрицы  $C_x$  и  $C_x^2$  имеют общий собственный базис.

Важное физическое свойство состоит в том, что все  $c_j^{(1)} > 0$  как в уравнениях Навье–Стокса (3.5), (3.10), так и в обеих квазигазодинамических системах: оригинальной (3.11), (3.12) и обобщенной (3.13). Это означает, что в средах, описываемых перечисленными моделями, волны затухают в пространстве. Например, для правой акустической волны КГД системы вещественная часть гармоники  $\exp\{i\omega t - ikx\}$  есть функция

$$e^{-x/L^*} \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c+u}\right), \quad \text{где} \quad L^* = \frac{(c+u)^3}{[(c+u)^2 + c^2/\gamma] \tau \omega^2}$$

— характерная длина затухания, обратно пропорциональная квадрату частоты.

Мы изложили спектральный метод исследования регулярных мод в уравнениях динамики вязкого газа. В [15]–[17] рассматривался другой метод, называемый методом дифференциальных следствий. Он состоит в нахождении замкнутых дифференциальных уравнений, описывающих волны каждого типа. Эти уравнения выводятся из основных систем уравнений в качестве алгебраических или дифференциальных следствий, либо точных, либо приближенных в предположении малости коэффициентов диссипации. Второй подход менее громоздкий и более физически наглядный, чем спектральный метод. С другой стороны, первый способ более математически строгий.

Перейдем к вопросу о сингулярных модах линеаризованных моделей с вязкостью. Четыре дополнительных решения спектральной задачи для КГД системы (3.1) связаны с большими корнями  $k_j = O(\tau^{-1})$  определителя матрицы, стоящей в скобках. Для нахождения таких величин сделаем замену масштаба  $q = \tau k$ , превратив уравнение (3.1) в

$$(C_x + iq D_{xx} - \eta q^{-1} I) \hat{U} = 0. \quad (3.14)$$

Однако уже нулевое приближение ( $\eta = 0$ ) решения спектральной задачи (3.14) оказывается весьма громоздким, поскольку требует нахождения корней многочлена 4-й степени. Немного лучше и ситуация в случае уравнений Навье–Стокса (3.3), где возникает кубический многочлен. Приближенные сингулярные решения были найдены в [14]. Тем не менее, их учет при обобщении характеристических граничных условий привел к настолько сложным выражениям, что практическое применение таких условий затруднительно.

Из сказанного следует вывод: при построении неотражающих граничных условий для уравнений динамики вязкого газа необходимо избежать прямого использования параметров сингулярных мод. Для наших целей хорошую базу предоставляют неотражающие условия для уравнений Эйлера, состоящие из четырех уравнений, о чем говорилось в § 2.

### 3.2. Вязкие неотражающие граничные операторы

Мы получили выражения для характеристик регулярных волн систем динамики вязкого газа в первом приближении по малому параметру. Используем эти данные для вывода неотражающих условий на входной и выходной границах. Как следует из предыдущего, такие граничные условия неизбежно являются приближенными.

Обсудим вопрос о количестве скалярных уравнений в граничных операторах. Уравнения Навье–Стокса, обладающие дефектом параболичности, равным единице, требуют четыре уравнения на дозвуковом входе и три — на дозвуковом выходе [13, 21]. Разновидности квазигазодинамической системы являются полностью параболическими [22, 23] и нуждаются в четырех условиях на каждой границе.

Ситуация меняется в случае разностных аппроксимаций уравнений газовой динамики. В [6]–[8] рассматриваются в основном схемы с симметричными трехточечными шаблонами по пространству для дискретизации как конвективных, так и диффузионных членов. Указанные системы уравнений требуют по четыре уравнения на любой границе [17, 19], что связано с наличием в таких системах четырех регулярных и четырех сингулярных

мод. Характеристики последних мы договорились не принимать во внимание. Поэтому будем в качестве граничных условий выбирать системы из четырех уравнений, в которых будем учитывать свойства только регулярных волн данной системы основных уравнений.

Придерживаясь по мере возможности обозначений, введенных в § 2, рассмотрим общее гармоническое решение линеаризованной системы уравнений динамики вязкого газа в виде

$$U = \sum_{j=1}^m a_j \widehat{U}_j^v \exp\{i\omega t - ik_j x\}, \quad (3.15)$$

где количество мод  $m = 7$  для уравнений Навье–Стокса и  $m = 8$  для квазигазодинамических моделей. Граничное условие (2.2) с образом Фурье граничного оператора  $\widehat{\mathcal{L}}(k, \omega)$  приводит к системе уравнений относительно амплитуд, аналогичной (2.9):

$$\sum_{j=1}^m \widehat{V}_j a_j = 0, \quad \text{где} \quad \widehat{V}_j = \widehat{\mathcal{L}}(k_j, \omega) \widehat{U}_j^v, \quad j = 1, \dots, m. \quad (3.16)$$

Размерность матрицы  $\widehat{\mathcal{L}}(k, \omega)$  равна  $4 \times m$ , а векторы  $\widehat{V}_j$  состоят из четырех компонент.

Приближенно неотражающее граничное условие должно, прежде всего, обеспечивать корректность задачи, для чего необходимо [24], чтобы амплитуды входящих волн однозначно выражались через амплитуды выходящих волн. Однако мы в состоянии контролировать поведение только регулярных волн. Кроме того, в случае избыточного числа граничных уравнений система (3.16) не всегда разрешима. Поэтому основным свойством граничного условия должно быть то, чтобы выходящие регулярные волны как можно меньше отражались. Отсюда сформулируем требования к граничному условию:

- при заданных амплитудах выходящих регулярных волн существует не более одного набора амплитуд остальных волн;
- амплитуды входящих регулярных и любых сингулярных волн малы относительно амплитуд выходящих регулярных волн.

На сей раз через  $\mathcal{J}$  обозначим множество индексов выходящих регулярных волн, а через  $\mathcal{J}_r$  — множество индексов всех регулярных волн.

«Критерий» приближенно неотражающего условия сформулируем по образцу (2.10):

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}}(k_j, \omega) \widehat{U}_j^v &= O(\eta^2), \quad j \in \mathcal{J}, \\ \widehat{\mathcal{L}}(k_j, \omega) \widehat{U}_j^v &- \text{линейно независимы, } j \in \mathcal{J}_r \setminus \mathcal{J}, \\ \widehat{\mathcal{L}}(k_j, \omega) \widehat{U}_j^v &\neq 0, \quad j \notin \mathcal{J}_r. \end{aligned} \quad (3.17)$$

В идеале было бы необходимо обеспечить линейную независимость всех векторов, отвечающих входящим и сингулярным модам. Однако такое требование невыполнимо с математической точки зрения, когда имеются всего четыре уравнения, а число переменных больше, особенно в случае входного условия. Провести селекцию сингулярных мод на входящие и выходящие, как уже говорилось, невозможно. Своего рода компромисс состоит в требовании неравенства нулю столбцов с номерами сингулярных мод. Заметим, что линейная комбинация, дающая нулевой вектор, обычно сильно зависит от частоты  $\omega$ .

Встает вопрос о том, как построить граничные условия, чтобы удовлетворить требованиям (3.17). Могут ли в этом качестве выступать точные неотражающие условия для уравнений Эйлера? Выясним это, исследуя по отдельности выходящие, входящие регулярные моды и сингулярные моды. Всю технологию будем ради определенности рассматривать на примере уравнений Навье–Стокса, тогда как модели КГД приводят к аналогичным ситуациям.

Применяя оператор  $\mathcal{L}$  к регулярным гармоническим волнам вязкого газа, получаем, в соответствии с разложением (3.5):

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}}(k_j, \omega) \widehat{U}_j^v &= \widehat{\mathcal{L}}\left(\frac{\omega}{c_j} - \frac{i\nu\omega^2}{c_j^3} c_j^{(1)}, \omega\right) \left[\widehat{U}_j + \frac{i\nu\omega}{c_j^2} \widehat{U}_j^{(1)}\right] + O(\eta^2) = \\ &= \widehat{\mathcal{L}}\left(\frac{\omega}{c_j}, \omega\right) \widehat{U}_j - \frac{i\nu\omega^2}{c_j^3} c_j^{(1)} \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial k} \left(\frac{\omega}{c_j}, \omega\right) \widehat{U}_j + \frac{i\nu\omega}{c_j^2} \widehat{\mathcal{L}}\left(\frac{\omega}{c_j}, \omega\right) \widehat{U}_j^{(1)} + \\ &\quad + O(\eta^2). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Пусть  $\mathcal{L}$  — «невязкий» неотражающий оператор, отвечающий критерию (2.10). Тогда для регулярных выходящих мод ( $j \in \mathcal{J}$ ) вязкой системы имеем, что в правой части выражения (3.18) первый член исчезает, а оставшаяся сумма равна  $O(\eta)$ . Заявленный в (3.17) порядок  $\eta^2$  ничем не гарантирован, хотя и такой результат вполне удовлетворителен.

Входящие регулярные моды ( $j \in \mathcal{J}_r \setminus \mathcal{J}$ ) дают в (3.18) столбец, совпадающий с невязким случаем, с добавкой  $O(\eta)$ . Если такие векторы,

в согласии с критерием (2.10), были линейно независимыми при  $\eta = 0$ , то они сохранят это свойство при достаточно малых  $\eta = O(1)$ , т.е. не слишком больших  $\omega$ . Иначе говоря, для конкретного граничного оператора можно найти значение  $\omega$ , ниже которого линейная независимость гарантируется, тогда как при более высокой частоте она на практике будет иметь место, однако может нарушиться «случайно».

Сингулярные моды создают наименее определенную ситуацию. Главный вывод следующий. Если оператор  $\mathcal{L}$  таков, что векторы  $\widehat{V}_j$  с номерами  $j \notin \mathcal{J}_r$  ненулевые при  $\eta = 0$ , то они остаются таковыми в достаточно широком диапазоне частот.

Таким образом, неотражающие граничные условия для уравнений Эйлера могут применяться к уравнениям динамики вязкого газа. Практически единственной проблемой их использования является недостаточная точность, т.е. слишком заметное отражение выходящих газодинамических волн.

Более сложный путь построения граничных условий — брать за основу неотражающий оператор для уравнений Эйлера и строить поправку к нему:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(0)} + i\nu\mathcal{L}^{(1)}, \quad (3.19)$$

где  $\mathcal{L}^{(0)}$  подчиняется критерию (2.10), а  $\mathcal{L}^{(1)}$  — искомый.

Чтобы исследовать столбцы  $\widehat{V}_j$  для регулярных мод, подставим формулу (3.19) в разложение (3.18), в результате чего получим:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}}(k_j, \omega) \widehat{U}_j^v &= \widehat{\mathcal{L}}^{(0)}(\dots) \widehat{U}_j - \frac{i\nu\omega^2}{c_j^3} c_j^{(1)} \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}^{(0)}}{\partial k}(\dots) \widehat{U}_j + \\ &+ i\nu \widehat{\mathcal{L}}^{(1)}(\dots) \widehat{U}_j + \frac{i\nu\omega}{c_j^2} \widehat{\mathcal{L}}^{(0)}(\dots) \widehat{U}_j^{(1)} + O(\eta^2). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Здесь многоточие подразумевает базовые значения аргументов  $(\omega/c_j, \omega)$ . Для выходящих волн требование точности  $O(\eta^2)$  в (3.17) налагает условие на  $\mathcal{L}^{(1)}$ :

$$\widehat{\mathcal{L}}^{(1)}\left(\frac{\omega}{c_j}, \omega\right) \widehat{U}_j = \frac{\omega^2}{c_j^3} c_j^{(1)} \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}^{(0)}}{\partial k}\left(\frac{\omega}{c_j}, \omega\right) \widehat{U}_j - \frac{\omega}{c_j^2} \widehat{\mathcal{L}}^{(0)}\left(\frac{\omega}{c_j}, \omega\right) \widehat{U}_j^{(1)}, \quad (3.21)$$

$j \in \mathcal{J}.$

Для входящих регулярных волн линейная независимость векторов  $\widehat{V}_j$  обеспечена в той же степени, что и в случае неизменного «эйлерового» неотражающего оператора. Никаких дополнительных ограничений не появляется.

Что касается сингулярных волн, то здесь ситуация менее тривиальная, чем при задании «невязких» операторов. Не углубляясь в теорию математической корректности постановки граничных условий, отметим, что дополнительные граничные уравнения, которые не требовались для уравнений Эйлера, но необходимы для описания вязкого газа, должны сужать множество возможных решений. На языке линеаризованных систем это означает подавление сингулярных волн. Отсюда следует требование, чтобы ни одно граничное уравнение не являлось точным дифференциальным следствием основной системы уравнений [18], о чем вкратце упоминалось выше.

### 3.3. Построение неотражающих граничных условий

Предыдущие рассуждения не предоставляют конкретной процедуры построения приближенно неотражающих условий для уравнений динамики вязкого газа. Поступим следующим образом. Имея уточненные выражения для собственных векторов и дисперсионных соотношений регулярных мод, мы можем превратить их, применяя обратное преобразование Фурье, в дифференциальные уравнения — характеристические условия или условия излучения. При этом соблюдается точность, требуемая в (3.21), а для входящих волн точность будет даже излишней.

Затем полученные граничные операторы можно подвергнуть преобразованиям, которые ранее применялись в случае уравнений Эйлера. Для этого существуют следующие возможности.

1. Главные члены граничных уравнений можно заменять с помощью алгебраических или дифференциальных следствий основной системы уравнений.
2. Величины  $O(\tau^2)$  игнорируются.
3. Члены  $O(\tau)$  можно трансформировать на основе главных членов этих же или других неотражающих граничных условий.

Опишем этапы построения граничных условий. За основу берутся левые собственные векторы либо дисперсионные соотношения вязкого газа. Первый способ использовался в [14] при обобщении характеристических граничных условий на случай уравнений Навье–Стокса. Мы выберем второй путь. Дисперсионные соотношения моделей вязкого газа обратим в операторы волн, как мы делали в § 2, а затем образуем факторизованные операторы вида (2.18). При этом существуют различные способы представления операторов волн.

Для уравнений Навье–Стокса перепишем дисперсионное соотношение (3.5) в виде

$$k = \frac{\omega}{c_j} \left( 1 + O(\eta^2) \right) - \frac{i\nu k^2}{c_j} c_j^{(1)},$$

откуда получаем

$$\mathcal{L}_j \varphi = \varphi_t + c_j \varphi_x - \nu c_j^{(1)} \varphi_{xx}. \quad (3.22)$$

Оператор (3.22) имеет тот недостаток, что он повторяет конвективно-диффузионную форму основной системы линейных уравнений (1.5). Это может противоречить принципу, чтобы сингулярные волны заведомо не удовлетворяли граничным условиям. Поэтому, начиная с работы [15], применялся другой вариант оператора:

$$\mathcal{L}_j \varphi = \varphi_t + c_j \varphi_x + \nu c_j^{(1)} (2c_j^{-1} \varphi_{xt} + \varphi_{xx}). \quad (3.23)$$

Оператор (3.23), хорошо согласуясь с регулярной модой, коренным образом отличается от (3.22) на сингулярной моде.

По аналогии с (2.19) строим граничное условие излучения на входе

$$\mathcal{L}_2 U = 0, \quad (3.24)$$

где оператор  $\mathcal{L}_2$  задается согласно формуле (3.23).

Граничный оператор на выходе, с учетом различия между энтропийной и вихревой модами ( $\mathcal{L}_3 \neq \mathcal{L}_4$ ), должен, вообще говоря, состояться не из двух, как в (2.20), а из трех операторов волн  $\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_3 \mathcal{L}_4$ . Однако есть возможность упростить выходной оператор благодаря тому, что вихревая волна отделяется от остальных: она относится к  $v'$ , тогда как в других волнах эта величина не фигурирует. Итак, граничное условие на выходе представляется в виде:

$$\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_3 \tilde{U} = 0, \quad \mathcal{L}_4 v' = 0, \quad \text{где } \tilde{U} = (\rho' \ u' \ p')^T. \quad (3.25)$$

Операторы волн  $\mathcal{L}_j$  опять-таки можно строить по образцу (3.23).

Мы вновь столкнулись с ситуацией, когда граничное условие содержит вторую производную по времени. Подвергнем первое уравнение (3.25) дальнейшим преобразованиям, пользуясь методикой, которая применялась в случае невязкого газа (§ 2). Поскольку граничное условие представлено не в окончательной форме, запишем операторы волн  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_3$  первоначально в более простом виде (3.22):

$$\mathcal{L}_1 \varphi = \varphi_t + (c+u) \varphi_x - \nu c_1^{(1)} \varphi_{xx}, \quad \mathcal{L}_3 \varphi = \varphi_t + u \varphi_x - \nu c_3^{(1)} \varphi_{xx}. \quad (3.26)$$

Кроме того, будет удобнее перейти в лагранжевы координаты.

Уравнения Навье–Стокса (1.5) перепишем, используя лагранжеву производную по времени (2.21):

$$\frac{dU}{dt} + \widehat{C}_x \frac{\partial U}{\partial x} = \nu D_{xx}^{NS} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \quad (3.27)$$

Операторы волн (3.26) в лагранжевых координатах принимают вид

$$\mathcal{L}_1 \varphi = d\varphi/dt + c \varphi_x - \nu c_1^{(1)} \varphi_{xx}, \quad \mathcal{L}_3 \varphi = d\varphi/dt - \nu c_3^{(1)} \varphi_{xx}.$$

и преобразуем первое уравнение (3.25), используя приемы и правила, выписанные выше.

Как и в случае уравнений Эйлера, применяя оператор (2.23) к уравнениям Навье–Стокса (3.27), получаем дифференциальное следствие

$$\frac{d^2 U}{dt^2} - \widehat{C}_x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \nu D_{xx}^{NS} \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \nu \widehat{C}_x D_{xx}^{NS} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}. \quad (3.28)$$

Для замены второй производной по времени в граничном условии (3.25) подставим туда уравнение (3.28). Убирая общую производную по  $x$ , получим:

$$\begin{aligned} c \frac{dU}{dt} + \widehat{C}_x \frac{\partial U}{\partial x} = \nu \left[ \left( c_1^{(1)} + c_3^{(1)} \right) \mathbf{I} - D_{xx}^{NS} \right] \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial x} + \\ + \nu \left( c c_3^{(1)} \mathbf{I} + \widehat{C}_x D_{xx}^{NS} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Напомним, что в системе берутся только первое, второе и четвертое уравнения, тогда как третье, содержащее  $dv'/dt$ , остается в первоначальном виде.

Обозначим матрицу, стоящую в (3.29) в квадратных скобках, через  $\widehat{D}_t$  и сделаем замену

$$\widehat{D}_t \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{c} \widehat{D}_t \widehat{C}_x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + O(\nu),$$

которая следует из левой части того же граничного условия (3.29). После этого преобразования в правой части (3.29) остается только член со второй пространственной производной  $\partial^2 U / \partial x^2$ . Данное выражение можно упростить, делая в матрице поэлементные замены благодаря свойству

$$\rho c u'_{xx} - p'_{xx} = O(\nu),$$



вытекающему из характеристического граничного условия (2.16).

Перейдем в неподвижную систему координат и запишем покомпонентно уравнения, получившиеся из (3.29) после указанных преобразований. Подставляя поправки волновых чисел из (3.10), имеем:

$$\begin{aligned} c \rho'_t + cu \rho'_x + p'_x &= \nu \frac{c}{\text{Pr}} \rho'_{xx} - \frac{\nu}{c} \left( \frac{\gamma+1}{2 \text{Pr}} - \frac{2}{3} \right) p'_{xx}, \\ u'_t + (c+u) u'_x &= -\frac{\nu c}{\rho \text{Pr}} \rho'_{xx} + \nu \left( \frac{\gamma+1}{2 \text{Pr}} + \frac{2}{3} \right) u'_{xx}, \\ p'_t + (c+u) p'_x &= \frac{\nu^*}{2} p'_{xx}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Здесь введено обозначение

$$\nu^* = \nu \left( \frac{\gamma-1}{\text{Pr}} + \frac{4}{3} \right). \quad (3.31)$$

Уравнения (3.30) нуждаются еще в одном преобразовании. По тому же образцу, как оператор (3.22) заменялся оператором (3.23), перепишем «диагональные» члены правых частей (3.30), подставляя туда левые части соответствующих граничных уравнений. Например, в первом уравнении воспользуемся равенством

$$\rho'_{xx} = -\frac{2}{u} \rho'_{xt} - \frac{2}{cu} p'_{xx} - \rho'_{xx} + O(\nu),$$

и так далее.

Окончательный вариант неотражающих условий для уравнений Навье–Стокса следующий. Условие на входе (3.24) имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} - (c-u) \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\nu^*}{c-u} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + \frac{\nu^*}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0. \quad (3.32)$$

Условие на выходе представляет собой систему (2.26) с поправками  $O(\nu)$ :

$$\begin{aligned} c \rho'_t + cu \rho'_x + p'_x + \frac{\nu c}{\text{Pr}} \left( \frac{2}{u} \rho'_{xt} + \rho'_{xx} \right) + \frac{\nu}{c} \left( \frac{2c}{u \text{Pr}} + \frac{\gamma+1}{2 \text{Pr}} - \frac{2}{3} \right) p'_{xx} &= 0, \\ u'_t + (c+u) u'_x + \frac{\nu c}{\rho \text{Pr}} \rho'_{xx} + \nu \left( \frac{\gamma+1}{2 \text{Pr}} + \frac{2}{3} \right) \left[ \frac{2}{c+u} u'_{xt} + u'_{xx} \right] &= 0, \\ v'_t + u v'_x + 2 \frac{\nu}{u} v'_{xt} + \nu v'_{xx} &= 0, \\ p'_t + (c+u) p'_x + \frac{\nu^*}{c+u} p'_{xt} + \frac{\nu^*}{2} p'_{xx} &= 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Неотражающие условия для КГД системы строятся на основе условий излучения тем же путем, что и для уравнений Навье–Стокса. Основные

уравнения приобретают вид, аналогичный (3.27); затем получается граничный оператор по образцу (3.29), который допускает дальнейшие упрощения. Количество элементарных операций можно сократить благодаря связи (1.8) матриц  $D_{xx}$  и  $C_x$ , однако на конечный результат преобразований это не повлияет. Итак, получается следующее условие на входе:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - (c-u) \frac{\partial U}{\partial x} + \tau \left( (c-u)^2 + c^2/\gamma \right) \left[ \frac{2}{u-c} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right] = 0, \quad (3.34)$$

и условие на выходе:

$$\begin{aligned} \rho'_t + u \rho'_x + \frac{1}{c} p'_x + \tau \left( c^2/\gamma + u^2 \right) \left( \frac{2}{u} \rho'_{xt} + \rho'_{xx} \right) + \tau \left( \frac{2c}{\gamma u} - \frac{1}{\gamma} \right) p'_{xx} &= 0, \\ u'_t + (c+u) u'_x + \frac{\tau c^3}{\gamma \rho} \rho'_{xx} + \tau \left( u^2 + 2cu + \frac{\gamma+2}{\gamma} c^2 \right) \left[ \frac{2}{c+u} u'_{xt} + u'_{xx} \right] &= 0, \\ v'_t + u v'_x + \tau \left( c^2/\gamma + u^2 \right) \left( 2u^{-1} v'_{xt} + v'_{xx} \right) &= 0, \\ p'_t + (c+u) p'_x + \tau \left( (c+u)^2 + c^2/\gamma \right) \left[ \frac{2}{c+u} p'_{xt} + p'_{xx} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Неотражающие условия для обобщенной КГД системы таковы. Условие на входе:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - (c-u) \frac{\partial U}{\partial x} + \tau \left( (c-u)^2 + \chi c^2/\gamma \right) \left[ \frac{2}{u-c} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right] = 0, \quad (3.36)$$

где участвует константа

$$\chi = \frac{1}{2} \left( 3 - \gamma + \frac{\gamma-1}{\text{Pr}} \right).$$

Условие на выходе:

$$\begin{aligned} \rho'_t + u \rho'_x + \frac{1}{c} p'_x + \tau \left( \frac{c^2}{\gamma \text{Pr}} + u^2 \right) \left( 2u^{-1} \rho'_{xt} + \rho'_{xx} \right) + \\ + \tau \left( \frac{2c}{\gamma \text{Pr} u} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2\gamma} + \frac{\gamma+1}{2\gamma \text{Pr}} \right) p'_{xx} &= 0, \\ u'_t + (c+u) u'_x + \frac{\tau c^3}{\gamma \text{Pr} \rho} \rho'_{xx} + \\ + \tau \left( u^2 + 2cu + \left( \frac{3}{2\gamma} + \frac{1}{2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma \text{Pr}} \right) c^2 \right) \left[ \frac{2}{c+u} u'_{xt} + u'_{xx} \right] &= 0, \\ v'_t + u v'_x + \tau \left( c^2/\gamma + u^2 \right) \left( 2u^{-1} v'_{xt} + v'_{xx} \right) &= 0, \\ p'_t + (c+u) p'_x + \tau \left( (c+u)^2 + \chi c^2/\gamma \right) \left[ \frac{2}{c+u} p'_{xt} + p'_{xx} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (3.37)$$

#### 4. Адаптация граничных условий к нелинейным задачам

Неотражающие граничные условия для линеаризованных систем уравнений необходимо приспособить к исходной нелинейной задаче, где параметры не разделяются на фон и возмущения. Остановимся на случае, когда граничный оператор является чисто дифференциальным, т.е. система (2.2) не содержит алгебраических членов. Способ преобразования таких граничных условий сформулирован в [15] и состоит в следующем. В коэффициентах берутся текущие значения параметров вместо фоновых, а производные возмущений заменяются производными самих параметров. Формально это можно выразить в виде подстановки

$$\mathcal{L}(\bar{V})U \mapsto \mathcal{L}(V)V. \quad (4.1)$$

Тот же прием использовался рядом авторов [2, 11], применявших результаты линейной теории неотражающих граничных условий к нелинейным уравнениям.

Обоснование данного подхода [18, 19] опирается на свойство нелинейных одномерных уравнений Эйлера, которые при наличии гладкости решения представимы в квазилинейной форме

$$\frac{\partial V}{\partial t} + C_x \frac{\partial V}{\partial x} = 0. \quad (4.2)$$

Матрица  $C_x$  здесь та же, что и в линеаризованной системе (2.1), но выражена она через основные переменные:  $C_x = C_x(V)$ .

Пусть линейный граничный оператор содержит только первые производные по пространству и/или времени, т.е. имеет вид

$$\mathcal{L}U = L_t \frac{\partial U}{\partial t} + L_x \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (4.3)$$

где  $L_t, L_x$  — матрицы. К данному классу относится большинство неотражающих операторов из § 2. После замены (4.1) оператор (4.3) приобретает квазилинейный вид

$$L_t(V) \frac{\partial V}{\partial t} + L_x(V) \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (4.4)$$

Если оператор (4.3) является неотражающим для линейных одномерных уравнений Эйлера (2.1) или, иначе говоря, удовлетворяет критерию (2.10), то соответствующий оператор (4.4) будет точным неотражающим для нелинейных уравнений Эйлера (4.2). Данный результат, доказанный в [19], обобщает теорему из [4].

В качестве примера проиллюстрируем, как выходное условие (2.26) преобразуется в одномерное нелинейное неотражающее условие

$$\begin{aligned}
 \rho_t + u \rho_x + c^{-1} p_x &= 0, \\
 u_t + (c+u) u_x &= 0, \\
 v_t + u v_x &= 0, \\
 p_t + (c+u) p_x &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Вернемся к моделям динамики вязкого газа. Для них упомянутые выше «невязкие» граничные условия перестают быть точными. Это нам известно уже по линейному случаю, когда точными не являются ни неотражающие условия для уравнений Эйлера, ни их скорректированные варианты, учитывающие диссипацию. Остается предполагать, что в рассматриваемом классе задач вклад нелинейности в ошибку относительно невелик. Тем самым учет «вязких» поправок к граничным условиям может оказаться полезным.

Линейные граничные условия, учитывающие вязкость, содержат члены с производными второго порядка. В этом случае нелинейное преобразование (4.1) допускает неоднозначное толкование: подвергать коэффициенты дифференцированию или нет? Тем не менее особого значения это не имеет, если принять гипотезу о медленном изменении фона (iii) и считать справедливым соотношение (1.4).

Автор остановился на одной из возможных форм представления граничных уравнений, которая будет показана ниже на примере выходных условий.

Для уравнений Навье–Стокса система (3.33) приобретает вид

$$\begin{aligned}
 c \rho_t + cu \rho_x + p_x + \frac{c}{\rho \text{Pr}} \left( \frac{2\mu}{u} \rho_{xt} + (\mu \rho_x)_x \right) + \\
 + \frac{1}{\rho c} \left( \frac{2c}{u \text{Pr}} + \frac{\gamma+1}{2 \text{Pr}} - \frac{2}{3} \right) (\mu p_x)_x &= 0, \\
 u_t + (c+u) u_x + \frac{c}{\rho^2 \text{Pr}} (\mu \rho_x)_x + \\
 + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\gamma+1}{2 \text{Pr}} + \frac{2}{3} \right) \left( \frac{2\mu}{c+u} u_{xt} + (\mu u_x)_x \right) &= 0, \\
 v_t + u v_x + 2 \frac{\nu}{u} v_{xt} + \frac{1}{\rho} (\mu v_x)_x &= 0, \\
 p_t + (c+u) p_x + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\gamma-1}{2 \text{Pr}} + \frac{2}{3} \right) \left( \frac{2\mu}{c+u} p_{xt} + (\mu p_x)_x \right) &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Для обобщенной КГД системы граничная система (3.37) приводится

к форме

$$\begin{aligned}
& \rho_t + u \rho_x + c^{-1} p_x + \left( \frac{c^2}{\gamma \text{Pr}} + u^2 \right) (2\tau u^{-1} \rho_{xt} + (\tau \rho_x)_x) + \\
& + \left( \frac{2c}{\gamma \text{Pr} u} + \frac{1}{\text{Pr}} - 1 - \frac{3}{2\gamma} + \frac{1}{2\gamma \text{Pr}} \right) (\tau p_x)_x = 0, \\
& u_t + (c+u) u_x + \frac{c^3}{\gamma \text{Pr} \rho} (\tau \rho_x)_x + \\
& + \left( u^2 + 2cu + \left( \frac{3}{2\gamma} + \frac{1}{2\gamma \text{Pr}} + \frac{1}{\text{Pr}} \right) c^2 \right) \left( \frac{2\tau}{c+u} u_{xt} + (\tau u_x)_x \right) = 0, \\
& v_t + u v_x + (c^2/\gamma + u^2) (2\tau u^{-1} v_{xt} + (\tau v_x)_x) = 0, \\
& p_t + (c+u) p_x + ((c+u)^2 + \chi c^2/\gamma) \left( \frac{2\tau}{c+u} p'_{xt} + (\tau p_x)_x \right) = 0.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

## 5. Численное моделирование задачи о структуре фронта ударной волны

Задача о структуре фронта ударной волны служит одним из базовых тестов (benchmark problems) для моделей газа, описывающих его либо в терминах сплошной среды, либо на основе молекулярно-кинетических представлений. Кроме того, данную задачу можно считать прототипом ряда прикладных проблем из области микротечений. Очевидно, моделирование таких объектов требует создания высокоэффективных численных методов, которые подразумевают сокращение размера расчетной области, быстроту установления стационарного либо периодического режима и удобство параллелизации алгоритма. Граничные условия, предложенные выше, во многом направлены именно на эту цель.

Постановка задачи следующая. Рассматривается стационарное решение одномерной системы уравнений динамики вязкого газа (в системах (1.1)–(1.3) положим  $\partial/\partial t \equiv 0$  и зададим нулевую вертикальную скорость  $v \equiv 0$ ), удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{aligned}
\rho & \rightarrow \rho_{\text{л}}, \quad u \rightarrow u_{\text{л}}, \quad p \rightarrow p_{\text{л}} \quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty, \\
\rho & \rightarrow \rho_{\text{пр}}, \quad u \rightarrow u_{\text{пр}}, \quad p \rightarrow p_{\text{пр}} \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Здесь индексами «л» и «пр» обозначены параметры впереди и позади ударной волны. Течение направлено вправо:  $u_{\text{л}} > u_{\text{пр}} > 0$ . Два набора констант подчиняются соотношениям Гюгонио для неподвижного фронта:

$$\begin{aligned}
\rho_{\text{л}} u_{\text{л}} & = \rho_{\text{пр}} u_{\text{пр}}, \quad \rho_{\text{л}} u_{\text{л}}^2 + p_{\text{л}} = \rho_{\text{пр}} u_{\text{пр}}^2 + p_{\text{пр}}, \\
\frac{u_{\text{л}}^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_{\text{л}}}{\rho_{\text{л}}} & = \frac{u_{\text{пр}}^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_{\text{пр}}}{\rho_{\text{пр}}}.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Решение указанной задачи не единственно, а порождает семейство одинаковых по форме решений путем сдвига независимой переменной  $x \mapsto x + x_*$ . Поэтому к постановке добавляется условие однозначности решения (задание местоположения фронта), например

$$\rho \Big|_{x=0} = \frac{\rho_{\text{л}} + \rho_{\text{пр}}}{2}. \quad (5.2)$$

Нахождение стационарного решения задачи сталкивается с трудностями.

Для уравнений Навье–Стокса аналитические формулы существуют лишь в трех случаях:  $\text{Pr} = 0$  (отсутствие вязкости),  $\text{Pr} = 3/4$  и  $\text{Pr} = \infty$  (отсутствие теплопроводности). Численное интегрирование краевой задачи не может производиться стандартными методами по причине асимптотического характера граничных условий и инвариантности решения относительно сдвига. В [28] был предложен итерационный «метод стрельбы», специально приспособленный к данной задаче. Он использует наличие у стационарных уравнений Навье–Стокса инварианта  $\rho u = \text{const}$ , благодаря чему число искомых функций сокращается до двух. Ранее стационарная краевая задача численно решалась также в [26].

КГД система и ее модификации не позволяют применять даже эти подходы. Аналитические решения не обнаружены, а метод стрельбы стал бы неэффективным из-за увеличения числа неизвестных функций.

В [27] рассматривалась еще более сложная модель газа — регуляризованные уравнения Грэда. Тем не менее для численного решения задачи о структуре ударной волны выбрана ее стационарная форма.

В настоящей работе предпочтение отдано численному решению начально-краевой задачи методом установления — по примеру авторов [7, 8]. Помимо алгоритмических проблем, названных выше, побудительным мотивом для этого послужила необходимость испытания различных способов постановки граничных условий, которые в дальнейшем предстоит использовать при моделировании более сложных — в первую очередь многомерных — течений вязкого газа.

Формулировка нестационарной задачи об ударной волне аналогична той, которая приводилась в [7, 8], но имеет ряд отличий. На конечном отрезке  $-L < x < L$  и при  $t > 0$  задана система одномерных уравнений динамики вязкого газа: уравнения Навье–Стокса (1.1) либо обобщенная квазигазодинамическая система (1.3). При этом полагается нулевой вертикальную скорость  $v \equiv 0$  и опущено второе уравнение движения. Начальные условия — два набора постоянных значений параметров газа из (5.1) с

разрывом посередине области ( $x = 0$ ):

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_{\text{л}}, u = u_{\text{л}}, p = p_{\text{л}} \quad \text{при } x < 0, t = 0, \\ \rho &= \rho_{\text{пр}}, u = u_{\text{пр}}, p = p_{\text{пр}} \quad \text{при } x > 0, t = 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

К перечисленному добавляются левое и правое граничные условия при  $x = \pm L$  и, необязательно, условие (5.2). Следует сказать, что уравнение (5.2) делает нестационарную дифференциальную задачу переопределенной, но, несмотря на это, не усложняет разностный алгоритм и не нарушает его корректности.

Остановимся на граничных условиях. Левая граница  $x = -L$  представляет собой сверхзвуковой вход:  $u_{\text{л}} > c_{\text{л}}$ . Здесь задаются условия Дирихле

$$\rho = \rho_{\text{л}}, u = u_{\text{л}}, p = p_{\text{л}}, \quad x = -L, \quad (5.4)$$

Правая граница  $x = L$  является дозвуковым выходом:  $0 < u_{\text{пр}} < c_{\text{пр}}$ . На ней исследовались как условия Дирихле

$$\rho = \rho_{\text{пр}}, u = u_{\text{пр}}, p = p_{\text{пр}}, \quad x = L, \quad (5.5)$$

так и два вида неотражающих граничных условий. К последним относятся выходные условия для уравнений Эйлера (4.5) и «вязкие» условия, предназначенные для конкретной системы уравнений: (4.6) в случае уравнений Навье–Стокса и (4.7) в случае обобщенной КГД системы. Всюду уравнение для  $v$  было опущено.

Все указанные уравнения подвергаются дискретизации. Вводится равномерная сетка по пространству с шагом  $h$ :

$$x_0 = -L, \quad x_j = x_0 + jh, \quad j = 1, \dots, N, \quad x_N = L.$$

В основных системах уравнений (1.1) и (1.3) первые производные по  $x$  заменяются центральными разностями, вторые производные — простейшими 3-точечными дивергентными операторами. Применяются явные схемы интегрирования по времени с постоянным шагом  $\Delta t$ . Вид дискретной аппроксимации покажем на примере первого уравнения (неразрывности) из системы (1.3):

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + (\rho u)_{\dot{x}}^n = (\tau (\rho u^2 + p)_{\bar{x}})_x^n.$$

Здесь использованы стандартные обозначения разностных операторов из [29].

Правые неотражающие граничные условия (4.5), (4.6) и (4.7) аппроксимируются с применением трехточечных направленных разностей и явных схем по времени. Для иллюстрации ниже выписано последнее уравнение системы (4.6) в дискретном представлении:

$$\frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta t} + (c+u)^n p_{\bar{x}}^n + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\gamma-1}{2 \text{Pr}} + \frac{2}{3} \right) \left[ \frac{2\mu}{c+u} \frac{1}{\Delta t} (p_{\bar{x}}^{n+1} - p_{\bar{x}}^n) + (\mu p_{\bar{x}})_x^n \right] = 0.$$

Здесь  $\varphi_{\bar{x}}$  обозначает направленную разность второго порядка точности:

$$\varphi_{\bar{x}} \equiv (3\varphi_l - 4\varphi_{l-1} + \varphi_{l-2}) / (2h).$$

Входные условия Дирихле (5.4) представляются в неизменном виде либо вместо них задаются условия входящего потока [30]. Последние составим на основе уравнений Эйлера в консервативных переменных (правые части уравнений (1.1) и (1.3) опустим) и запишем с использованием явной схемы по времени:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_0^{n+1} - \rho_0^n}{\Delta t} + \frac{1}{h} \left[ \frac{(\rho u)_1^n + (\rho u)_0^n}{2} - \rho_{\text{л}} u_{\text{л}} \right] &= 0, \\ \frac{(\rho u)_0^{n+1} - (\rho u)_0^n}{\Delta t} + \frac{1}{h} \left[ \frac{(\rho u^2 + p)_1^n + (\rho u^2 + p)_0^n}{2} - (\rho_{\text{л}} u_{\text{л}}^2 + p_{\text{л}}) \right] &= 0, \quad (5.6) \\ \frac{E_0^{n+1} - E_0^n}{\Delta t} + \frac{1}{h} \left[ \frac{(u(E+p))_1^n + (u(E+p))_0^n}{2} - u_{\text{л}}(E_{\text{л}} + p_{\text{л}}) \right] &= 0. \end{aligned}$$

Данные уравнения, очевидно, описывают релаксацию потоковых величин  $\rho u$ ,  $\rho u^2 + p$  и  $u(E+p)$  к фиксированным значениям из соотношений Гюгонио (5.1). При задании начальных условий (5.3) и при наличии устойчивости решения можно утверждать, что система уравнений (5.6) равносильна аппроксимации исходных условий Дирихле (5.4) с первым порядком по пространству и времени.

Расчеты проводились для одноатомного газа ( $\gamma = 5/3$ ,  $\text{Pr} = 2/3$ ), вязкость которого определяется по закону

$$\mu/\mu_{\text{л}} = (T/T_{\text{л}})^{0.5},$$

где  $\mu_{\text{л}} = 1$  — безразмерный коэффициент вязкости слева от фронта. Число Маха течения перед фронтом волны  $M \equiv u_{\text{л}}/c_{\text{л}} = 5$ . Использовалась расчетная область различного размера:  $L = 20$  и  $L = 100$ , с одинаковым шагом сетки  $h$  и соответственным числом узлов  $N = 360$  и  $N = 1800$ .



Целью численного моделирования было как нахождение количественных характеристик стационарного решения, так и изучение нестационарных явлений, в том числе скорости сходимости к стационару и самой возможности его установления.

Показательны следующие параметры решения задачи. Первый из них — измеряемая в натурном эксперименте толщина фронта ударной волны  $\delta$ . Будем, по примеру [8], вычислять ее обратную величину по формуле

$$\frac{1}{\delta} = \frac{1}{\rho_{\text{пр}} - \rho_{\text{л}}} \max_{1 \leq l \leq N-1} \frac{\rho_{l+1} - \rho_{l-1}}{2h}. \quad (5.7)$$

Введем еще один параметр  $\Delta$ , характеризующий размер области, в которой наблюдается резкое изменение газодинамических величин (большие градиенты). Пусть в пределах области  $D$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} \geq 0.01 \frac{\rho_{\text{пр}} - \rho_{\text{л}}}{\delta}, \quad x \in D, \quad (5.8)$$

либо имеют место аналогичные неравенства для  $T$  и  $u$ . Обозначим через  $\Delta$  ширину области  $D$ .

Критерий сходимости к стационару  $t = t^*$  определялся по апостериорным данным и состоял в выполнении следующих требований:

$$|\delta(t^*) - \delta(\infty)| < \varepsilon_1, \quad \left| \max_l \rho_l(t^*) - \max_l \rho_l(\infty) \right| < \varepsilon_2. \quad (5.9)$$

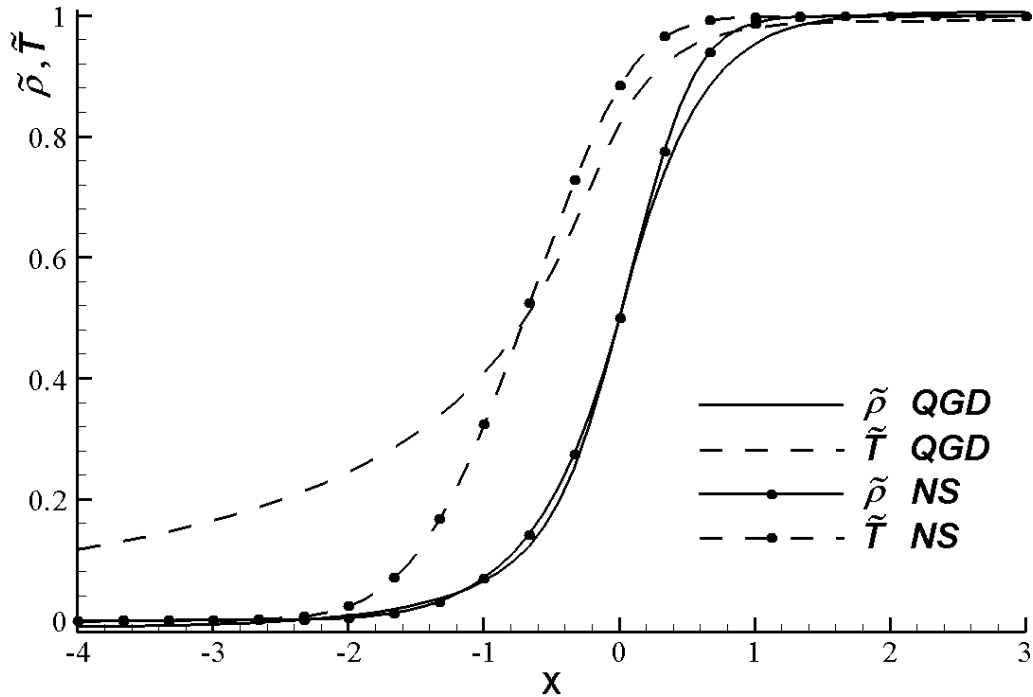
Здесь под бесконечностью понимается время, при котором любые физические величины заведомо практически не изменяются.

На рис. 1 приведены профили нормированных величин плотности и температуры

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho - \rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{пр}} - \rho_{\text{л}}}, \quad \tilde{T} = \frac{T - T_{\text{л}}}{T_{\text{пр}} - T_{\text{л}}}$$

в установившемся течении для уравнений Навье–Стокса и обобщенной квазигазодинамической системы. Расчеты велись при оптимальном выборе граничных условий, о котором скажем позже.

Фронты как плотности, так и температуры оказываются более широкими в случае обобщенной КГД системы, чем в случае уравнений Навье–Стокса, что согласуется с ранее известными результатами [7, 8]. Получены следующие значения толщины фронта (5.7):  $1/\delta = 0.8475$  для уравнений Навье–Стокса и  $1/\delta = 0.8145$  для обобщенной КГД системы. При другом обезразмеривании, используемом в [8], этому соответствуют числа  $1/\delta = 0.7353$  и  $1/\delta = 0.7066$ .



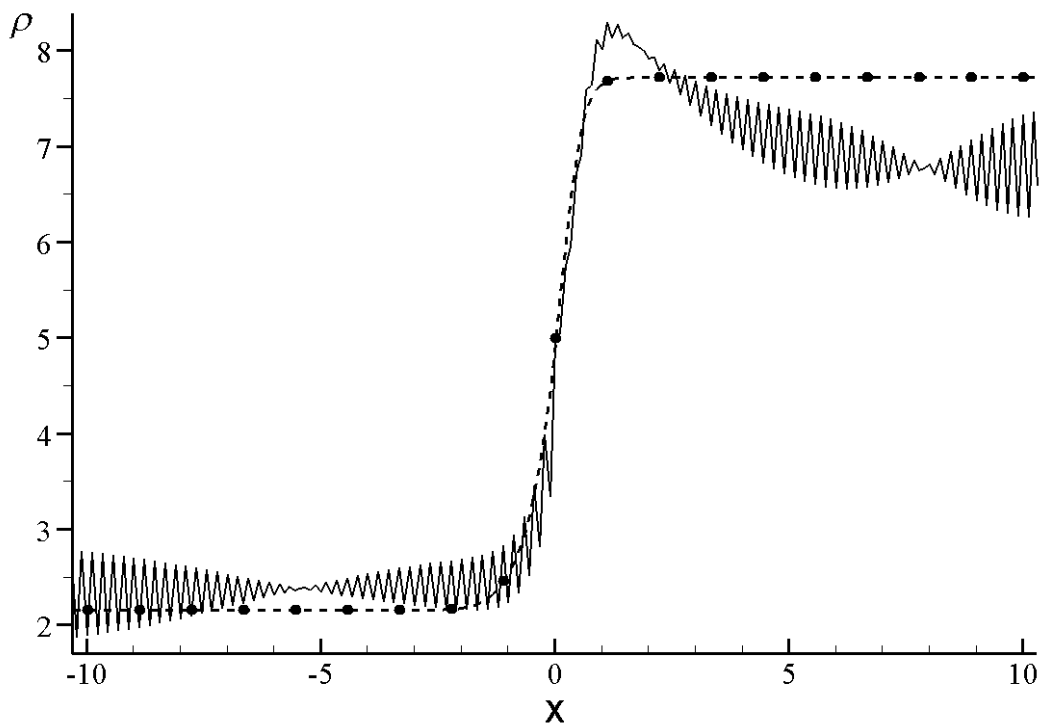
**Рис. 1.** Профили нормированной плотности  $\tilde{\rho}$  и температуры  $\tilde{T}$  для уравнений Навье–Стокса (NS) и обобщенной КГД системы (QGD)

Из практики расчетов [7, 8] известно, что величина  $\delta$  чувствительна к выбору шага сетки, что можно объяснить наличием в (5.7) процедуры численного дифференцирования. Поэтому было проведено моделирование тех же вариантов постановки задачи на вдвое более густой сетке. Полученные значения  $1/\delta$  с точностью до четырех значащих цифр совпали с предыдущими.

На рисунке 2 показано распределение плотности в трех расчетах на основе уравнений Навье–Стокса. Сплошная линия — решение, полученное для области с  $L = 20$  при задании граничных условий Дирихле (5.4), (5.5) на обоих концах сегмента (слева и справа участка расчетной области отсечены). Пунктир — решение на той же области, но с «вязкими» неотражающими условиями на выходе (4.6) и условиями входящего потока (5.6). В обоих случаях ставилось дополнительное условие (5.2). Маркеры — решение на широкой области ( $L = 100$ ) с двумя наборами граничных условий Дирихле и без фиксации плотности (5.2): отмечен каждый десятый узел сетки.

В расчете на широкой области решение сходится к стационарному профилю, хотя и медленно. Надо отметить, что такой размер области  $2L = 200$  несопоставим с характерной шириной фронта  $\Delta \approx 4$ .

При сужении расчетной области ее границы начинают существенно

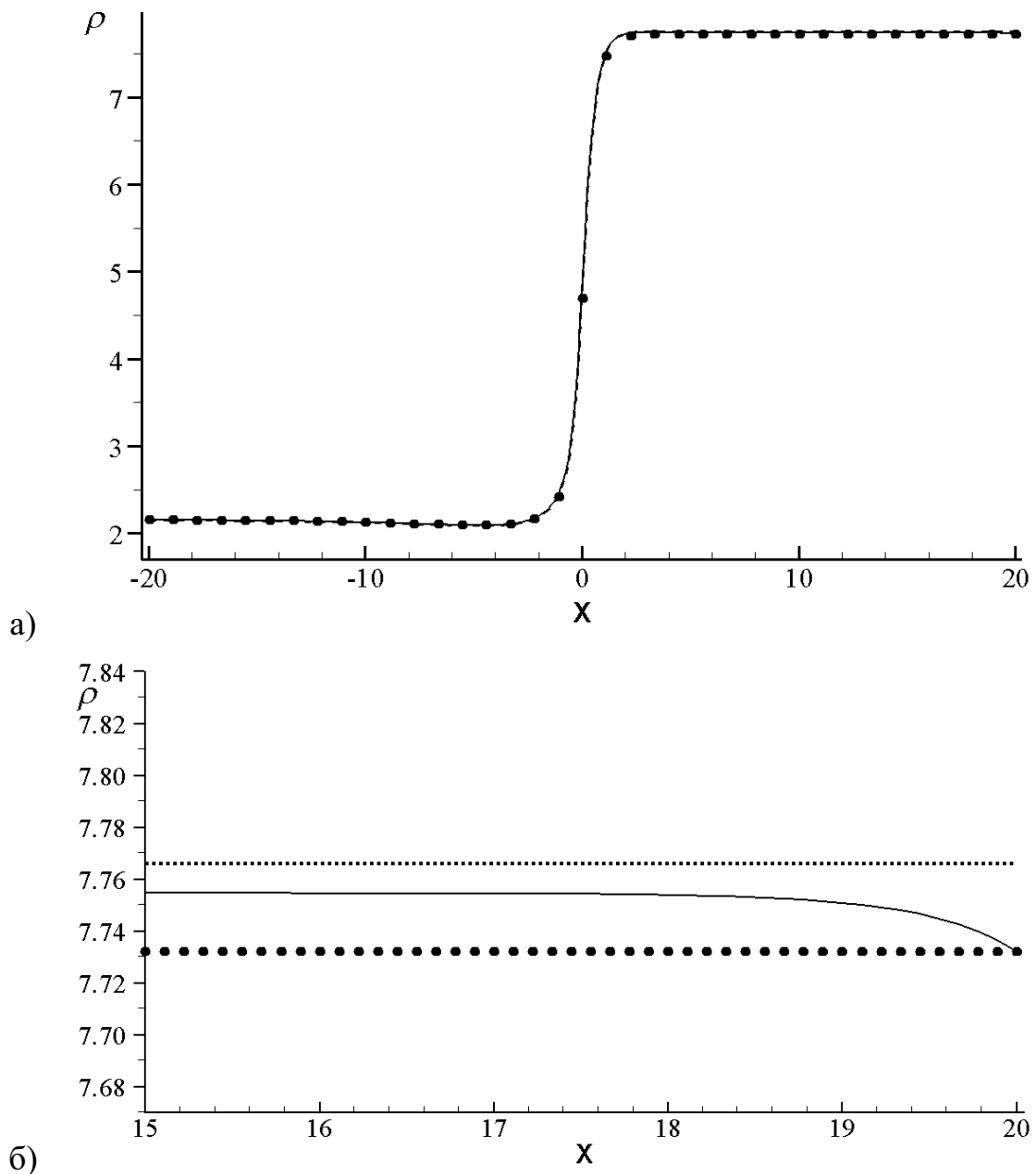


**Рис. 2.** Профили плотности  $\rho$  в трех расчетах: уравнения Навье–Стокса

влиять на поведение параметров газа. В численном решении уравнений Навье–Стокса имеют место пилообразные осцилляции плотности. В расчете с условиями Дирихле при  $L = 20$  осцилляции настолько сильны, что возникла неустойчивость, вызванная нарастанием их амплитуды во времени. Описанное явление ранее отмечалось в [7], где также задавались условия Дирихле, однако не привлекалось условие (5.2), а область была всё же достаточно широкой, чтобы обеспечить постепенную сходимость к стационару.

Правильный выбор граничных условий позволяет значительно улучшить свойства решения. Желаемые результаты получаются при сочетании условий входящего потока (5.6) с неотражающими выходными условиями (4.5) или (4.6). Задание простейшего варианта левого условия Дирихле (5.4) дает заметные пилообразные осцилляции, а также более длинные волны, что не обеспечивает установление стационара за приемлемое время расчета.

В случае обобщенной КГД системы применение разностного алгоритма не приводит к появлению коротковолновых осцилляций. Для этой модели условия входящего потока (5.6) не актуальны, поскольку они дают практически то же решение, что и стандартные условия Дирихле (5.4). Однако возникает другая важная проблема: в ряде расчетов наблюдается эффект «пограничного слоя», когда параметры вблизи конца сегмента



**Рис. 3.** Профили плотности  $\rho$  в трех расчетах: обобщенная КГД система; а – общий вид, б – увеличенный фрагмент

перестраиваются на «полочку» с измененными значениями.

Профили плотности в трех расчетах, проведенных для обобщенной КГД системы, демонстрирует рис. 3. Постановки задачи и обозначения аналогичны тем, которые использовались для уравнений Навье–Стокса. Сплошная линия — решение, полученное в узкой области ( $L = 20$ ) с граничными условиями Дирихле на обоих концах (5.4) и (5.5). Пунктир — то же, но с выходными неотражающими условиями КГД (4.7) и левыми условиями Дирихле (5.4). Маркеры — решение на широкой области ( $L = 100$ )

с условиями Дирихле.

Результаты расчетов показывают, что во всех трех случаях профиль ударной волны имеет схожую и физически адекватную структуру. Однако количественные различия, хоть и невелики, но имеются, о чём свидетельствует рис. 3,б. При задании на правом конце отрезка условий Дирихле значение плотности  $\rho_{\text{пр}}$  сохраняется только в граничной точке. На некотором расстоянии от нее устанавливается другое, почти постоянное по пространству, значение  $\rho$ . Неотражающие условия приводят к практически неизменному состоянию газа вплоть до самой границы. При этом значение плотности отличается от эталона, однако ненамного сильнее, чем в случае условий Дирихле.

Как видно из рисунка 3,б, при использовании широкой расчетной области значение плотности вдали от зоны фронта практически совпадает с эталоном  $\rho_{\text{пр}}$ . Феномен пограничного слоя и смещения фоновых значений параметров существенно усиливается, если область еще более узкая по отношению к ширине фронта, чем в расчетах, представленных здесь: об этом см. [18].

Условие фиксации положения фронта ударной волны (5.2) необходимо, если область достаточно узкая. При использовании неотражающих граничных условий в расчете по обобщенной КГД системе конфигурация фронта медленно «дрейфует» вдоль оси  $x$ , что вызвано слабым нарушением соотношений Гюгонио в ходе эволюции численного решения. В уравнениях Навье–Стокса такой картины не наблюдается, однако здесь имеет место очень медленное установление профиля ударной волны, о чем свидетельствует динамика изменения толщины фронта  $\delta$  из (5.7).

Уравнения Навье–Стокса	$t^*$	Обобщенная КГД система	$t^*$
$L = 100$ , Дирихле, без $\rho(0)$	536	$L = 100$ , Дирихле, без $\rho(0)$	490
$L = 20$ , Дирихле, $\rho(0)$	—	$L = 20$ , Дирихле, $\rho(0)$	600
$L = 20$ , НГУ, $\rho(0)$	$\infty$	$L = 20$ , НГУ, $\rho(0)$	78
$L = 20$ , НГУ, без $\rho(0)$	600	$L = 20$ , НГУ, без $\rho(0)$	—
$L = 20$ , вход, НГУ, $\rho(0)$	72	$L = 20$ , вход, НГУ, $\rho(0)$	78
$L = 20$ , вход, НГУ Н.-С., $\rho(0)$	40	$L = 20$ , НГУ КГД, $\rho(0)$	56

**Таблица 1.** Время установления  $t^*$  в различных постановках задачи

Таблица 1 демонстрирует время  $t^*$  сходимости к стационару из (5.9) для двух расчетных областей и при различных сочетаниях граничных усло-

вий. На правом конце сравниваются условия Дирихле (5.5) и неотражающие условия (НГУ), в том числе «вязкие» условия Навье–Стокса (Н.-С.) либо обобщенной квазигазодинамики (КГД); на левом конце — обычные условия Дирихле (по умолчанию) и условия входящего потока (вход); берутся варианты с заданием или без фиксации  $\rho(x=0)$ . Символ  $\infty$  означает отсутствие сходимости, а прочерк — неустойчивость.

Приведенные данные позволяют сделать следующие выводы.

- При моделировании структуры ударной волны решающую роль играет выбор граничных условий.
- Условия Дирихле на дозвуковой границе можно применять только при очень широкой расчетной области.
- Многократный выигрыш в вычислительных ресурсах дают неотражающие условия в сочетании с фиксацией плотности (5.2) в точке фронта.
- «Вязкие» варианты неотражающих условий являются оптимальными. Ускорение сходимости к стационару более значительно в случае уравнений Навье–Стокса и не столь существенно для обобщенной КГД системы.
- Условия входящего потока важны для уравнений Навье–Стокса.
- Подтверждается тезис о том, что в классе задач с умеренно высокой диссипацией квазигазодинамические модели являются более надежной основой алгоритмов, чем уравнения Навье–Стокса.

## Литература

1. *B. Engquist, A. Majda.* Radiation boundary conditions for acoustic and elastic wave calculations // *Comm. Pure Appl. Math.*, 1979, v.32, pp.313–357.
2. *A. Bayliss, E. Turkel.* Far field boundary conditions for compressible flows // *J. Comp. Phys.*, 1982, v.48, No.2, pp.182–199.
3. *M.B. Giles.* Nonreflecting boundary conditions for Euler equation calculations // *AIAA J.*, 1990, v.28, No.12, pp.2050–2058.
4. *G.W. Hedstrom.* Nonreflecting boundary conditions for nonlinear hyperbolic systems // *J. Comp. Phys.*, 1979, v.30, No.2, pp.222–237.
5. *K.W. Thompson.* Time-dependent boundary conditions for hyperbolic systems // *J. Comp. Phys.*, 1990, v.89, No.2, pp.439–461.
6. *Б.Н. Четверушкин.* Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. – М.: МАКС Пресс, 2004.

7. *Т.Г. Елизарова*. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. – М.: Научный мир, 2007.
8. *Ю.В. Шеретов*. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009.
9. *D.H. Rudy, J.C. Strikwerda*. A nonreflecting outflow boundary condition for subsonic Navier-Stokes calculations // *J. Comp. Phys.*, 1980, v.36, No.1, pp.55–70.
10. *D.H. Rudy, J.C. Strikwerda*. Boundary conditions for subsonic compressible Navier-Stokes calculations // *Comput. Fluids*, 1981, v.9, pp.327–338.
11. *T.J. Poinsot, S.K. Lele*. Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows // *J. Comp. Phys.*, 1992, v.101, No.1, pp.104–129.
12. *Q. Liu, O.V. Vasilyev*. Nonreflecting boundary conditions based on nonlinear multidimensional characteristics // *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 2010, v.62, No.1, pp.24–55.
13. *J. Nordström*. The use of characteristic boundary conditions for the Navier–Stokes equations // *Comput. Fluids*, 1995, v.24, No.5, pp.609–623.
14. *L. Turrette*. Artificial boundary conditions for the linearized compressible Navier–Stokes equations // *J. Comp. Phys.*, 1997, v.137, No.1, pp.1–37.
15. *Л.В. Дородницын*. Акустика в моделях вязких дозвуковых течений и неотражающие граничные условия // *Прикладная математика и информатика*, № 3 – М.: Диалог-МГУ, 1999, с.43–64.
16. *Л.В. Дородницын*. Акустические свойства непрерывных и дискретных газодинамических моделей // *Прикладная математика и информатика*, № 6 – М.: МАКС Пресс, 2000, с.39–62.
17. *Л.В. Дородницын*. Неотражающие граничные условия для систем уравнений газовой динамики // *ЖВМ и МФ*, 2002, т.42, № 4, с.522–549.
18. *Л.В. Дородницын*. Неотражающие граничные условия для газодинамических задач в нелинейной постановке // *Прикладная математика и информатика*, № 11 – М.: МАКС Пресс, 2002, с.38–74.
19. *Л.В. Дородницын*. Искусственные граничные условия при численном моделировании дозвуковых течений газа // *ЖВМ и МФ*, 2005, т.45, № 7, с.1251–1278.
20. *Л.В. Дородницын, Б.Н. Четверушкин*. Об одной неявной схеме для моделирования дозвукового течения газа // *Матем. моделирование*, 1997, т.9, № 5, с.108–118.
21. *B. Gustafsson, A. Sundström*. Incompletely parabolic problems in fluid dynamics // *SIAM J. Appl. Math.*, 1978, v.35, No.2, pp.343–357.
22. *А.А. Злотник*. Классификация некоторых модификаций системы уравнений Эйлера // *Докл. РАН*, 2006, т.407, № 6, с.747–751.

23. *А.А. Злотник, Б.Н. Четверушкин.* О параболичности квазигазодинамической системы уравнений, ее гиперболической 2-го порядка модификации и устойчивости малых возмущений для них // ЖВМ и МФ, 2008, т.48, № 3, с.445–472.
24. *R.L. Higdon.* Initial-boundary value problems for linear hyperbolic systems // SIAM Rev., 1986, v.28, No.2, pp.177–217.
25. *M. Linzer, D.F. Hornig.* Structure of shock fronts in argon and nitrogen // Phys. Fluids, 1963, v.6, No.12, pp.1661–1668.
26. *L.M. Schwartz, D.F. Hornig.* Navier-Stokes calculations of argon shock wave structure // Phys. Fluids, 1963, v.6, No.12, pp.1669–1675.
27. *M. Torrilhon, H. Struchtrup.* Regularized 13-moment equations: Shock structure calculations and comparison to Burnett models // J. Fluid Mech., 2004, v.513, pp.171–198.
28. *Т.Г. Елизарова, А.А. Хохлов.* Численное моделирование структуры ударной волны путем решения стационарных уравнений Навье-Стокса // Вестник МГУ, серия 3. Физика. Астрономия, 2006, № 3, с.28–32.
29. *А.А. Самарский.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989.
30. *C. Hirsch.* Numerical Computation of Internal and External Flows Vol. 2: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows. – Wiley, New York, 1990.