

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРОВ ТРЕХТОЧЕЧНЫХ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ¹

Введение

Устойчивость явных алгоритмов численного решения нестационарных задач математической физики является актуальной проблемой. Традиционным, хотя и не всегда обоснованным, способом исследования устойчивости разностных схем служит метод гармоник. Для схем с переменными коэффициентами анализ преимущественно выполняется в рамках дополнительной гипотезы замороженных коэффициентов. Строгие оценки в линейном случае возможны, как правило, с применением операторной теории устойчивости [1].

Метод гармоник обычно дает вполне достоверные результаты при использовании простейших граничных условий (Дирихле, дискретных аналогов условий Неймана и др.). Однако наличие граничных условий специального вида может серьезно повлиять на свойства схем. Классический метод гармоник вообще не учитывает краевых условий. Что касается операторной теории, то сложный вид уравнений в приграничных узлах существенно затрудняет доказательство теорем об устойчивости.

Большое число примеров "нестандартных" граничных условий относятся к аппроксимациям так называемых неотражающих условий. Последние возникают при переносе задачи математической физики, поставленной в неограниченной области пространства, в область конечного размера.

Необходимо расширить арсенал методов исследования устойчивости. Мы рассмотрим ряд результатов вычисления спектров "пробных" разностных операторов, а также опишем один нетрадиционный аналитический метод нахождения приближенных значений изолированных точек спектра.

¹Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 06-01-00293.

1. Общая схема исследования устойчивости начально-краевых задач

Широкий класс алгоритмов численного решения задач позволяет отдельно рассматривать дискретизацию по пространству и методы интегрирования по времени.

Пусть дана нестационарная система уравнений

$$B \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = A \mathbf{U}, \quad (1)$$

где \mathbf{U} – искомая векторная функция, а A и B – пространственные дискретные линейные операторы, не зависящие от времени t . После разделения переменных (1) превращается в спектральную задачу

$$\lambda B \hat{\mathbf{U}} = A \hat{\mathbf{U}}. \quad (2)$$

(В дальнейшем для неизвестных функций двух задач будем использовать одинаковое обозначение.)

Для устойчивости метода интегрирования (1) по времени *необходимо*, чтобы область устойчивости метода при данном временном шаге покрывала множество всех спектральных точек $\{\lambda\}$, определяемых из (2). Примеры многочисленных явных методов и их областей устойчивости можно найти, например, в [2].

Желательно использовать такие операторы, которые дают собственные значения из отрицательной комплексной полуплоскости:

$$\operatorname{Re} \lambda_k \leq 0, \quad \forall k.$$

Это условие означает устойчивость полудискретной системы (1), дифференциальной по времени. Как правило, данное свойство отвечает физике моделируемого явления. Что касается методов численного интегрирования по времени, то области устойчивости большинства из них почти не заходят в положительную полуплоскость.

Если спектр расположен в отрицательной полуплоскости, то на устойчивость влияют главным образом собственные значения, удаленные от нуля более остальных, например: $\max |\lambda_k|$, $\min \operatorname{Re} \lambda_k$.

Особую роль играют изолированные точки спектра, т.е. собственные значения, расположенные на удалении от основных массивов λ_k . Эти точки, с одной стороны, расширяют область спектра, но с другой стороны

– влияют на устойчивость численных методов не так, как "пучки" из многих спектральных точек.

Важно подчеркнуть, что интересующие нас свойства спектров не имеют континуальных (физических) аналогов.

Термин изолированного собственного значения интуитивно понятен. Однако дадим точное определение, несколько сузив класс объектов. Для этого необходимо перейти от индивидуальной задачи к семейству задач с переменным числом узлов $N \in \mathbb{N}$, $N \geq N_0$. Далее, вместо оператора $A = A_N$ следует рассматривать перенормированный оператор $\tilde{A}_N = \alpha_N A_N$, с тем чтобы спектры последовательности задач были *равномерно ограничены*. Практически этого можно добиться путем обезразмеривания задачи на шаг сетки h . Тем самым вводится новый спектральный параметр $\mu = \alpha_N \lambda$.

Определение 1. Изолированной предельной точкой спектра назовем такое число μ_* , для которого существует подпоследовательность собственных значений $\mu_{k_N} \rightarrow \mu_*$, $N \rightarrow \infty$, причем в некоторой окрестности μ_* других таких точек нет.

В настоящей работе будем рассматривать одномерные разностные операторы, трехточечные во внутренних узлах сетки и с левым и правым краевыми условиями, охватывающими, вообще говоря, произвольное число приграничных узлов. Точнее говоря, в сфере исследования находятся линейные операторы A и B с трехдиагональными подматрицами, отвечающими внутренним узлам, но с первой и последней строками общего вида. Кроме того, для внутренних узлов операторы представляются выражениями с *постоянными коэффициентами*.

2. Спектры простейших операторов конвекции-диффузии

Начнем с задач, для спектров которых существуют аналитические формулы. Последние удастся получить только в случае операторов с постоянными коэффициентами и с краевыми условиями определенных типов. Мы выделим условия периодичности и условия 1-го рода (Дирихле). Ограничимся хрестоматийным примером разностных операторов конвекции-диффузии, который все же нуждается в полной иллюстрации. Аналитические формулы возможно вывести и для более сложных задач, выходящих за рамки скалярных трехточечных уравнений.

Рассмотрим семейство разностных уравнений конвекции-диффузии

$$au_{j-1} + (c - \mu)u_j + bu_{j+1} = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad a > 0, \quad -a \leq b \leq a, \quad (3)$$

Нормировка оператора выполнена таким образом, что коэффициенты a , b и c не зависят от размерности N .

Краевые условия периодичности. Пусть уравнение (3) дополняется краевыми условиями

$$u_0 = u_N, \quad u_1 = u_{N+1}. \quad (4)$$

Собственные функции и отвечающие им собственные значения задачи (3)-(4) записываются в виде

$$u_k(j) = q^{kj}, \quad \text{где } q = \exp(2\pi i/N), \\ \mu_k = c + (a+b) \cos \frac{2\pi k}{N} + i(b-a) \sin \frac{2\pi k}{N}, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (5)$$

Укажем частные случаи спектров. Для определенности в (3) положим $c = -(a+b)$, что интерпретируется физически как чистая конвекция-диффузия без реакции. Случаи таковы:

- а) $b = 0$ (схема с направленной разностью): μ_k лежат на окружности, проходящей через точку 0;
- б) $b < 0$ (преобладание конвекции): μ_k – на эллипсе, вытянутом вдоль вертикали (рис. 1 (а));
- в) $b > 0$ (преобладание диффузии): μ_k – на эллипсе, вытянутом вдоль горизонтали (рис. 1 (б));
- г) $b = -a$ (схема с центральной разностью): μ_k – на отрезке мнимой оси;
- д) $b = a$ (разностное уравнение теплопроводности): μ_k – на отрезке вещественной оси.

Краевые условия Дирихле. Пусть теперь уравнение (3) дополняется условиями 1-го рода

$$u_0 = u_{N+1} = 0. \quad (6)$$

Чтобы найти спектр такого оператора, можно воспользоваться, например, рекуррентным соотношением между определителями матриц

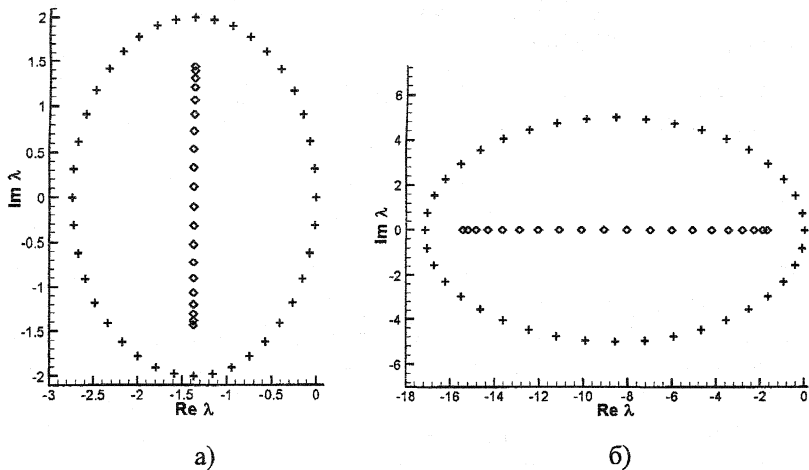


Рис. 1: Спектры задач конвекции-диффузии с краевыми условиями периодичности (+) и 1-го рода (o): а) при $b < 0$, б) при $b > 0$

(характеристическими многочленами) $P_N(\mu) = \det(A_N - \mu I)$, где I – единичный оператор, с ростом размерности N . Имеем:

$$P_N(\mu) = (c - \mu) P_{N-1}(\mu) - ab P_{N-2}(\mu), \quad P_0(\mu) = 1, \quad P_1(\mu) = c - \mu.$$

Отсюда искомый определитель выражается через многочлен Чебышева 2-го рода и находятся корни $P_N(\mu)$.

Собственные значения задач (3), (6) представляются в двух формах. При $b > 0$ (диффузия, рис. 1 (б)):

$$\mu_k = c - 2\sqrt{ab} \cos \frac{\pi k}{N+1}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (7)$$

При $b < 0$ (конвекция, рис. 1 (а)):

$$\mu_k = c + 2i\sqrt{|ab|} \cos \frac{\pi k}{N+1}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (8)$$

Можно заметить, что в обоих случаях (7) и (8) спектры располагаются на отрезке между фокусами эллипса из (5).

В предыдущих примерах, как и для большинства более сложных разностных операторов, спектры имеют относительно простой, "компактный" (в обыденном смысле слова) вид. Им не присущи изолированные точки и прочие специфические черты.

3. Исследование спектров трехточечных операторов с постоянными коэффициентами

Вновь рассмотрим семейство уравнений (3) для внутренних узлов, но с произвольным заданием краевых условий при $j = 0$ и $j = N$:

$$\mathcal{L}(\mu) u_0 = 0, \quad (9)$$

$$\mathcal{R}(\mu) u_N = 0. \quad (10)$$

Здесь \mathcal{L} и \mathcal{R} – линейные функционалы, в которых фигурирует параметр μ . Кроме того, их вид не зависит от размерности N . Остановимся на случае краевых условий, охватывающих несколько ближайших к границе узлов и называемых локальными. В частности, условия периодичности будут исключены из рассмотрения.

Наличие краевых условий общего вида может существенно изменить свойства разностного оператора. Он перестает быть нормальным, как (3) при условиях Дирихле либо периодичности. В частных случаях $b = a$ и $b = -a$, когда прежде операторы являлись, соответственно, симметричными и кососимметричными, их принадлежность к данным классам не сохраняется.

Для выявления изолированных собственных значений, точнее, предельных точек спектра в смысле определения 1, можно предложить аналитический метод, который восходит к работе [3]. Идея метода опирается на особую природу изолированных собственных значений.

Обратимся к основному уравнению (3). Ему соответствует характеристический трехчлен

$$a + (c - \mu)q + bq^2.$$

Если корни последнего $q_1(\mu)$ и $q_2(\mu)$ различны, то общее решение уравнения (3) есть

$$u_j = C_1 q_1(\mu)^j + C_2 q_2(\mu)^j.$$

Цепочки собственных значений обычно связаны с корнями $|q_{1,2}| \approx 1$, благодаря чему собственные функции похожи на гармоники. Два краевых условия выделяют из общего решения конкретную линейную комбинацию, а затем решается уравнение относительно μ . Изолированные спектральные точки ассоциируются с корнями трехчлена, модуль которых существенно отличается от единицы. Соответствующие собственные функции быстро затухают или возрастают от узла к узлу, т.е. существуют фактически в небольшой окрестности границы.

Если сделать предположение

$$q_1 \equiv q, \quad |q| < 1,$$

то в типичных случаях (3) оказывается $|q_2| \geq 1$.

Рассмотрим задачу в полубесконечной области, т.е. уравнение (3) при $N \rightarrow \infty$, с левым краевым условием (9) и с дополнительным требованием на бесконечности:

$$\begin{aligned} au_{j-1} + (c - \mu)u_j + bu_{j+1} &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, \\ \mathcal{L}(\mu)u_0 &= 0, \quad u_j \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (11)$$

Общим решением (11) без учета условия на левом конце является $u_j = q(\mu)^j$. Подстановка функции в левое краевое условие (9) дает выражение

$$\mathcal{L}(\mu)u_0 \equiv \widehat{\mathcal{L}}(q; \mu) = 0,$$

где $\widehat{\mathcal{L}}(q; \mu)$ – алгебраический многочлен.

В итоге имеем следующие соотношения:

$$a + (c - \mu)q + bq^2 = 0, \quad \widehat{\mathcal{L}}(q; \mu) = 0, \quad |q| < 1, \quad (12)$$

Назовем (12) системой определяющих уравнений. Из нее находится параметр собственной функции q и собственное значение $\mu = \mu_*$. Решение системы (12) существует не всегда: в частности, при левом условии Дирихле ($\widehat{\mathcal{L}}(q; \mu) \equiv 1$) решений нет. Если граничное условие (9) локальное, то степень многочлена $\widehat{\mathcal{L}}(q; \mu)$ невысока и не зависит от N и потому число решений невелико.

Вернемся к краевой задаче на конечном отрезке. Покажем, что она имеет собственную функцию, в определенном смысле близкую к найденной в полубесконечном случае, и собственное значение, близкое к μ_* .

Нормированное решение задачи (3), (9), (10) представимо в виде

$$u_j = (1 - \sigma)q_1(\mu)^j + \sigma q_2(\mu)^j, \quad j = 0, \dots, N, \quad (13)$$

где μ – искомое собственное значение, $\sigma = \sigma(\mu)$. Решению задачи без правой границы (11) соответствует

$$\sigma(\mu_*) = 0.$$

Правое краевое условие (10) определяет значение σ следующим образом. Для функции q^j имеем

$$\mathcal{R}(\mu) q^j \equiv q^j \widehat{\mathcal{R}}(q; \mu).$$

Поэтому при подстановке (13) в (10) находим

$$\sigma(\mu) = \frac{\delta \widehat{\mathcal{R}}(q_1; \mu)}{\delta \widehat{\mathcal{R}}(q_1; \mu) - \widehat{\mathcal{R}}(q_2; \mu)}, \quad \text{где } \delta(N, \mu) = (q_1/q_2)^N. \quad (14)$$

В частности, условие Дирихле на правом конце

$$u_N = 0 \quad (15)$$

дает

$$\sigma(\mu) = \delta/(\delta - 1). \quad (16)$$

При заданном выражении $\sigma(\mu)$ собственное значение μ удовлетворяет уравнению, которое вытекает из подстановки функции (13) в левое краевое условие (9):

$$(1-\sigma) \widehat{\mathcal{L}}(q_1(\mu); \mu) + \sigma \widehat{\mathcal{L}}(q_2(\mu); \mu) = 0. \quad (17)$$

Для $\sigma = 0$ корнем уравнения

$$\widehat{\mathcal{L}}(q_1(\mu); \mu) = 0 \quad (18)$$

является $\mu = \mu_*$. Малое по абсолютной величине значение σ как в выражении (16), так и в других типичных случаях (14), очевидно, влечет за собой и близость μ к эталонному значению μ_* . Доказательство этого факта проведем на простейшем примере правого условия 1-го рода.

Теорема. Пусть задача на полубесконечной сетке (11) имеет собственное значение $\mu = \mu_*$, причем этот корень уравнения (18) простой. Тогда при достаточно больших N задача (3), (9), (15) имеет собственное значение μ , удовлетворяющее неравенству

$$|\mu - \mu_*| < C(1 - \alpha)^N, \quad (19)$$

где $0 < \alpha < 1$.

Доказательство. С учетом выражения (16) для σ , уравнение (17) принимает вид

$$\widehat{\mathcal{L}}(q_1(\mu); \mu) = \delta \widehat{\mathcal{L}}(q_2(\mu); \mu). \quad (20)$$

Поскольку $|q_1(\mu_*)| < |q_2(\mu_*)|$, в некоторой окрестности этой точки справедливо неравенство

$$\left| \frac{q_1(\mu)}{q_2(\mu)} \right| < 1 - \alpha, \quad |\mu - \mu_*| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$|\delta| < (1 - \alpha)^N, \quad |\mu - \mu_*| < \varepsilon.$$

Ввиду того, что $\widehat{\mathcal{L}}(q; \mu)$ – многочлен, в ограниченной области

$$\left| \widehat{\mathcal{L}}(q_2(\mu); \mu) \right| < C_1.$$

Поэтому модуль правой части уравнения (20) оценивается сверху, и мы имеем:

$$\left| \widehat{\mathcal{L}}(q_1(\mu); \mu) \right| < C_1 (1 - \alpha)^N, \quad |\mu - \mu_*| < \varepsilon. \quad (21)$$

Следующее неравенство справедливо в силу того, что $\mu = \mu_*$ является простым корнем аналитической функции из (18):

$$\left| \widehat{\mathcal{L}}(q_1(\mu); \mu) - \widehat{\mathcal{L}}(q_1(\mu_*); \mu_*) \right| \geq C_2 |\mu - \mu_*|, \quad |\mu - \mu_*| < \varepsilon. \quad (22)$$

Отсюда вытекает, что уравнение (17) имеет решение при достаточно малой правой части. Объединяя оценки (21) и (22), получаем:

$$|\mu - \mu_*| \leq \frac{1}{C_2} \left| \widehat{\mathcal{L}}(q_1(\mu); \mu) \right| < \frac{C_1}{C_2} (1 - \alpha)^N.$$

Проведенные рассуждения верны при

$$N \geq \ln(\varepsilon C_2 / C_1) / \ln(1 - \alpha).$$

Теорема доказана.

Замечание 1. В доказательстве использовалась гипотеза о том, что $|q_1| < |q_2|$. Дополнительное требование $|q_2| \geq 1$ играет роль в обеспечении корректности краевой задачи. По крайней мере, если $|q_1|, |q_2| < 1$, то встает вопрос о численной устойчивости решения задачи.

Замечание 2. При постановке правого краевого условия общего вида усложняется формулировка теоремы, ибо на правый граничный оператор $\mathcal{R}(\mu)$ налагаются дополнительные требования.

Предельная точка спектра и соответствующая ей функция выводятся с учетом только левого краевого условия. Свойства правого краевого

условия проверяются отдельно, на основе совершенно аналогичной процедуры. Система определяющих уравнений принимает следующий вид:

$$a + (c - \mu)q + bq^2 = 0, \quad \widehat{\mathcal{R}}(q; \mu) = 0, \quad |q| > 1. \quad (23)$$

Сделаем выводы.

1. Существование изолированных точек спектра и их приближенные значения можно выяснить, решив систему алгебраических уравнений малой размерности.
2. Каждая изолированная точка спектра связана лишь с одним краевым условием и мало зависит от вида уравнения на противоположном конце отрезка.
3. Собственные значения сходятся к изолированным предельным точкам спектра с экспоненциальной скоростью.

В следующих двух параграфах рассмотрим применение построенной теории к двум классам спектральных задач: о центрально-разностной схеме для уравнения переноса с неотражающими краевыми условиями и о разностном уравнении теплопроводности с переменным приграничным шагом. Ряд интересных свойств операторов (особенно в первом примере) не нашли теоретического объяснения, в связи с чем были проведены вычисления спектров при помощи пакета Maple V Release 4.

4. Операторы переноса с неотражающими краевыми условиями

Дифференциальное уравнение переноса (конвекции), заданное на конечном отрезке, требует лишь левое краевое условие:

$$\partial u / \partial t + \partial u / \partial x = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad u(x = 0, t) = 0. \quad (24)$$

Перейдем к дискретному случаю. Пусть в (24) производные по x заменяются центральными разностями:

$$du_j / dt + u_{\bar{x}} = 0, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (25)$$

где, на равномерной сетке с шагом h ,

$$\varphi_{\bar{x}} = (\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}) / (2h).$$

Уравнение (25), в отличие от своего дифференциального прототипа, нуждается не только в левом, но и в правом краевом условии. Укажем один из вариантов граничных условий [4]:

$$u_0 = 0, \quad du_N/dt + u_{\bar{x},N} = 0, \quad (26)$$

где

$$\varphi_{\bar{x},j} = (\varphi_j - \varphi_{j-1})/h.$$

В (26) на правом конце задана аппроксимация уравнения переноса (24) с применением направленной разности, т.е. с первым порядком по h .

Рассмотрим спектральные задачи для разностного уравнения переноса (25), которое, в соответствии с (2), принимает вид

$$\lambda u_j + u_{\bar{x}} = 0, \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (27)$$

Исследуем различные варианты правого краевого условия из [5]. Выражение (26) переходит в следующее:

$$u_0 = 0, \quad \lambda u_N + u_{\bar{x},N} = 0. \quad (28)$$

Приведем результат приближения уравнения переноса $O(h^2)$:

$$u_0 = 0, \quad \lambda u_N + u_{\bar{x},N} = 0, \quad (29)$$

где

$$\varphi_{\bar{x}} = (3\varphi_j - 4\varphi_{j-1} + \varphi_{j-2})/(2h).$$

Продифференцируем уравнение переноса (24) по x и построим разностный аналог $O(h^2)$. Имеем:

$$u_0 = 0, \quad (\lambda u_{\bar{x}} + u_{\bar{x}x})_{N-1} = 0, \quad (30)$$

где

$$\varphi_{\bar{x}x} = (\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1})/h^2.$$

Следует упомянуть работу [6], где рассматривается компактная трехточечная аппроксимация уравнения (24) с сериями неотражающих условий на левом и правом концах. Эти граничные уравнения охватывают от 3 до 10 приграничных узлов.

По поводу оценки устойчивости выписанных задач необходимо сказать следующее. Если для (27) в сочетании с каждым из

граничных условий (28)-(30) разложить пространственный оператор на кососимметрическую и симметрическую части

$$A = A_i + A_r, \quad A_i^* = -A_i, \quad A_r^* = A_r,$$

то нигде не выполняется свойство $A_r \leq 0$. Неположительность спектра равносильна существованию энергетического скалярного произведения $(\cdot, \cdot)_D$, в котором

$$(Av, v)_D \leq 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^N.$$

Такое скалярное произведение легко находится для краевых условий (28) (см. [4]), однако в остальных случаях данная процедура сталкивается с большими затруднениями.

Численный эксперимент показал, что все три варианта краевых условий (28)-(30) дают устойчивые операторы, причем строго устойчивые, т.е. имеет место результат:

$$\operatorname{Re} \lambda_k < 0, \quad \forall k. \quad (31)$$

Напомним, что для краевых условий периодичности либо Дирихле спектры лежат целиком на мнимой оси.

На рисунке 2 отмечены собственные значения в трех вариантах краевых задач для разностного уравнения переноса при $h = 1$, $N = 22$. Видно, что спектры располагаются вдоль мнимой оси, причем во всех случаях левее нее, так что выполняется свойство (31). На устойчивость методов интегрирования по времени влияют прежде всего крайние собственные значения ($\max |\operatorname{Im} \lambda_k|$). Во-первых, именно они наиболее удалены от нуля. Во-вторых, эти точки лежат почти на мнимой оси и не дают затухания амплитуд соответствующих им собственных функций в задаче (1), дифференциальной по времени.

Рисунок 2 показывает, что у большинства собственных функций амплитуды затухают во времени. Чем лучше аппроксимация правого граничного условия, тем дальше все λ_k отстоят от мнимой оси. Еще в большей степени результаты согласуются с найденными в [5] коэффициентами отражения при использовании каждого из приведенных здесь краевых условий. Эти коэффициенты имеют следующие порядки величины: $O(h^2)$ для (28), $O(h^3)$ для (29) и $O(h^4)$ для (30). Отраженная волна слабеет с уменьшением погрешности аппроксимации, но зависит не только от нее.

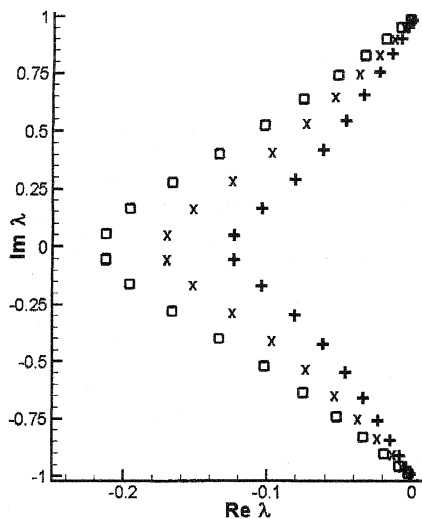


Рис. 2: Спектры аппроксимаций уравнения переноса при различных краевых условиях: + (28), × (29), □ (30)

Были проведены расчеты при различном числе узлов. Из них следует, что во всех вариантах безразмерные собственные значения ($\mu = \lambda h$) не распространяются выше и ниже $\pm i$, а с увеличением N они приближаются к мнимой оси:

$$|\operatorname{Im} \mu_k| < 1, \quad \forall k, \quad \min \operatorname{Re} \mu_k \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

"Выпрямление" цепочки собственных значений с ростом N происходит приблизительно по степенному закону. Это иллюстрирует рис. 3, где изображены графики зависимости $-\min \operatorname{Re} \mu_k$ от N в логарифмических шкалах по обеим осям. Во всех трех случаях вычисленные точки выстраиваются почти в прямые линии, угол наклона которых хорошо согласуется с показателем степени $N^{-3/4}$.

Из рисунка 2 можно заключить, что рассмотренные выше спектры не имеют изолированных точек. Отсутствие изолированных предельных точек подтверждается теоретически, на основе анализа системы определяющих уравнений (23) в каждом из случаев. Например, сочетание (27) с правым краевым условием (28) дает систему

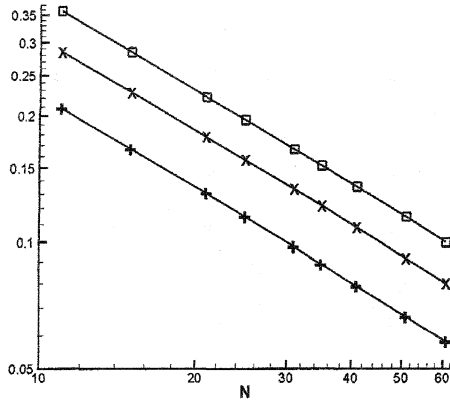


Рис. 3: Зависимость $-\min \operatorname{Re} \mu_k$ от N при различных краевых условиях: + (28), \times (29), \square (30)

$$q^2 + 2\mu q - 1 = 0, \quad \mu + 1 - q^{-1} = 0, \quad |q| > 1,$$

не имеющую решений.

Более интересные явления можно наблюдать при дискретизации уравнений газовой динамики Эйлера с неотражающими граничными условиями [5]. Для простоты рассмотрим безразмерные уравнения акустики

$$\partial u / \partial t + \partial v / \partial x = 0, \quad \partial v / \partial t + \partial u / \partial x = 0 \quad (32)$$

и краевые условия

$$\begin{aligned} \partial u / \partial t - \partial u / \partial x = 0, \quad \partial v / \partial t - \partial v / \partial x = 0, \quad x = 0, \\ \partial u / \partial t + \partial u / \partial x = 0, \quad \partial v / \partial t + \partial v / \partial x = 0, \quad x = L. \end{aligned} \quad (33)$$

Выберем центрально-разностную схему для уравнений (32) и аппроксимацию $O(h)$ краевых условий (33). Приходим к следующей спектральной задаче:

$$\begin{aligned} \lambda u_j + v_{\bar{x}} = 0, \quad \lambda v_j + u_{\bar{x}} = 0, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ (\lambda u - u_x)_0 = 0, \quad (\lambda v - v_x)_0 = 0, \quad (\lambda u + u_{\bar{x}})_N = 0, \quad (\lambda v + v_{\bar{x}})_N = 0, \end{aligned}$$

где

$$\varphi_x = (\varphi_{j+1} - \varphi_j)/h.$$

При данном выборе краевых условий систему удается расщепить на замкнутые задачи для инвариантов Римана $r^+ = u + v$ и $r^- = u - v$, аналогичные друг другу:

$$\begin{cases} \lambda r_j^+ + r_{\bar{x}}^+ = 0, & j = 1, \dots, N-1, \\ (\lambda r^+ - r_{\bar{x}}^+) = 0, & (\lambda r^+ + r_{\bar{x}}^+) = 0, \\ \lambda r_j^- - r_{\bar{x}}^- = 0, & j = 1, \dots, N-1, \\ (\lambda r^- - r_{\bar{x}}^-) = 0, & (\lambda r^- + r_{\bar{x}}^-) = 0. \end{cases}$$

Итак, задача свелась к уравнению (27) с граничными условиями

$$(\lambda u - u_x)_0 = 0, \quad (\lambda u + u_{\bar{x}})_N = 0. \quad (34)$$

Наряду с (34) рассмотрим применение на границах других зеркальных пар операторов:

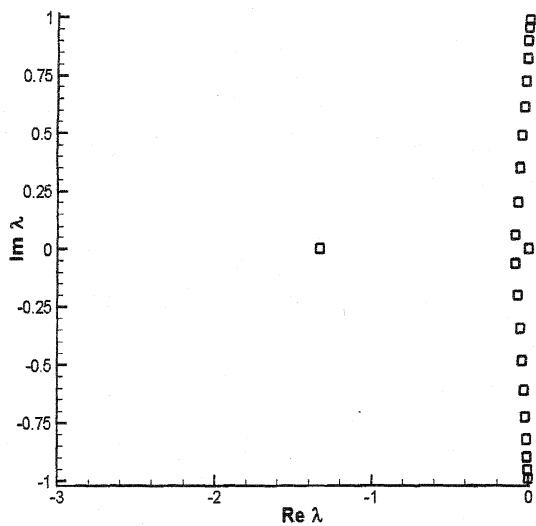
$$\lambda(u_0 + u_1) - 2u_{x,0} = 0, \quad \lambda(u_N + u_{N-1}) + 2u_{\bar{x},N} = 0; \quad (35)$$

$$(\lambda u - u_{x^*})_0 = 0, \quad (\lambda u + u_{\bar{x}})_N = 0, \quad (36)$$

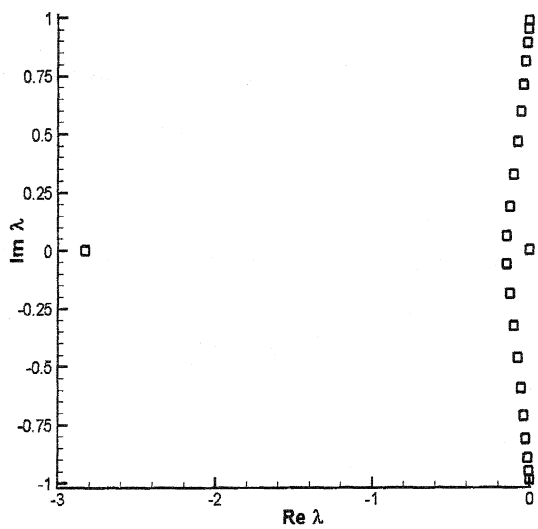
где

$$\varphi_{x^*} = (-3\varphi_j + 4\varphi_{j+1} - \varphi_{j+2})/(2h), \quad \varphi_{\bar{x}} = (3\varphi_j - 4\varphi_{j-1} + \varphi_{j-2})/(2h);$$

$$(\lambda u_{\bar{x}} - u_{\bar{x}x})_1 = 0, \quad (\lambda u_{\bar{x}} + u_{\bar{x}x})_{N-1} = 0. \quad (37)$$

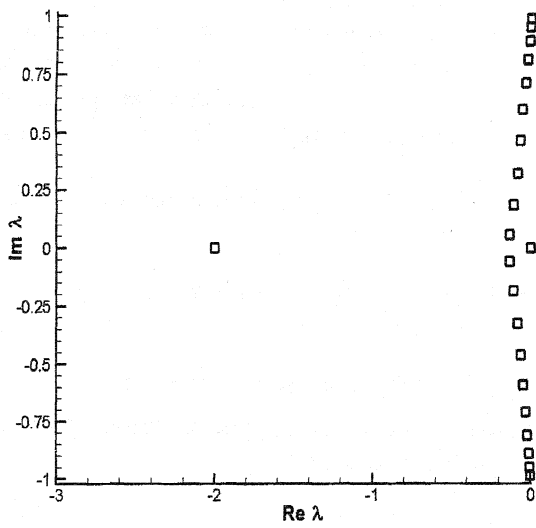


а)

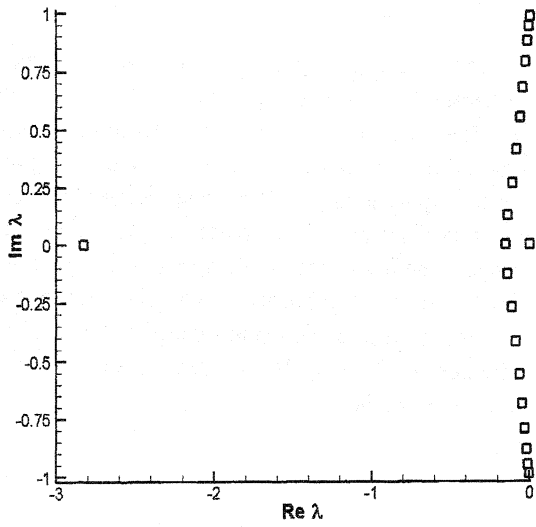


б)

Рис. 4. Спектры аппроксимаций уравнения переноса при различных краевых условиях: а) (34), б) (35)



в)



г)

Рис. 4. Спектры аппроксимаций уравнения переноса при различных краевых условиях: в) (34), г) (35)

На рисунке 4 (а-г) показаны спектры операторов в четырех указанных случаях. Цепочки собственных значений качественно не отличаются от рассмотренных выше примеров с левым условием Дирихле, однако степень диссипации (удаление точек от мнимой оси) во всех примерах уменьшилась. Точка $\lambda = 0$ соответствует решению $u \equiv 1$. Обращают на себя внимание изолированные точки – различные, но всюду отрицательные.

Для задачи (27), (34) система определяющих уравнений (12) принимает вид

$$q^2 + 2\mu q - 1 = 0, \quad \mu + 1 - q = 0, \quad |q| < 1.$$

Отсюда

$$q = -1/3, \quad \mu = \mu_* = -4/3.$$

При сочетании уравнения (27) с другими левыми краевыми условиями получаются следующие результаты.

$$(35): q = 2\sqrt{2} - 3, \quad \mu_* = -2\sqrt{2}.$$

$$(36): q = 2 - \sqrt{5}, \quad \mu_* = -2.$$

$$(37): q = 2\sqrt{2} - 3, \quad \mu_* = -2\sqrt{2}.$$

Что касается левого краевого условия из (36), то оно дает точное собственное значение $\lambda = -2/h$ при любом $N \geq 2$ и независимо от правого краевого условия. Причина проста: в матрице $A - \lambda I$ совпадают первая и вторая строки. Для остальных вариантов краевых условий (34), (35), (37) были проведены расчеты при различном числе узлов N , которые подтвердили быструю экспоненциальную сходимость μ к μ_* .

Итак, все перечисленные граничные условия для уравнений акустики приводят к устойчивым операторам. Однако изолированные точки спектра расположены далеко от основной цепочки собственных значений, особенно в случаях (35) и (37), и это может понизить пределы устойчивости явных методов.

5. Операторы второй разности с переменным приграничным шагом

Рассмотрим спектральную задачу для оператора второй разностной производной на неравномерной сетке, с крайевыми условиями Дирихле:

$$u_{\bar{x}\bar{x},j} - \lambda u_j = 0, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad u_0 = u_N = 0,$$

где

$$\varphi_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{2}{h_j + h_{j+1}} \left(\frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h_{j+1}} - \frac{\varphi_j - \varphi_{j-1}}{h_j} \right),$$

Пусть все шаги сетки постоянные, за исключением, быть может, первого и последнего. Практический смысл такого оператора – как составной части разностного оператора Лапласа на прямоугольной сетке в области произвольной формы.

Остановимся на случае, когда самый первый шаг меньше остальных одинаковых:

$$h_j \equiv h, \quad j = 2, \dots, N, \quad h_1 = ah, \quad 0 < a < 1.$$

Указанный оператор является симметризуемым, отрицательно определенным, и для него в [7] доказано свойство

$$\begin{aligned} \min \lambda &\geq -4/h^2 \quad \text{при } a \geq \sqrt{2}/2, \\ \min \lambda &\geq -\frac{1}{h^2} \cdot \frac{2}{a} \cdot \frac{1+2a}{1+a} \quad \text{при } a < \sqrt{2}/2. \end{aligned} \quad (38)$$

Тестовые расчеты демонстрируют, что диапазон собственных значений заметно уже, чем дает вторая оценка (38). Наблюдается факт, что

$$\min \mu > -\frac{2}{a\sqrt{1-a^2}} > -\frac{2}{a} \cdot \frac{1+2a}{1+a}, \quad \text{если } a < \sqrt{2}/2, \quad (39)$$

где $\mu = \lambda h^2$. Кроме того, все остальные собственные значения $\mu > -4$, что соответствует случаю равномерной сетки.

Применим изложенную здесь теорию к рассматриваемой спектральной задаче. Последнюю запишем в виде

$$u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1} - \mu u_j = 0, \quad j = 2, \dots, N-1, \quad (40)$$

$$-\frac{2}{a} u_1 + \frac{2}{1+a} u_2 - \mu u_1 = 0, \quad (41)$$

$$u_N = 0. \quad (42)$$

Уравнение (41) содержит аппроксимацию на неравномерном участке сетки и трактуется как левое краевое условие при $j = 1$. Неизвестное $u_0 = 0$ исключено и подставлено в (41).

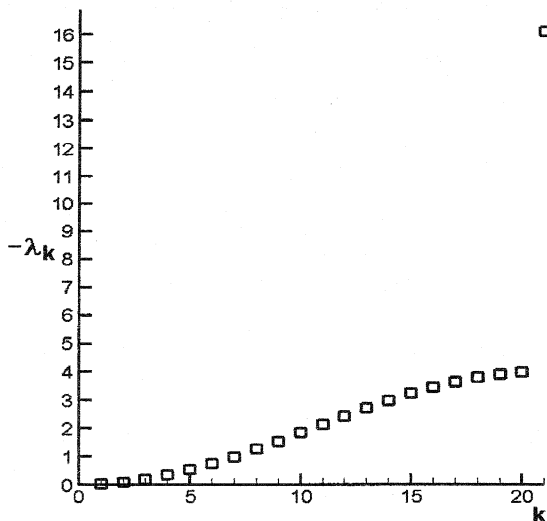


Рис. 5. Собственные значения оператора второй разностной производной при уменьшенном первом шаге

Система определяющих уравнений (12) для (40), (41) имеет вид

$$q^2 - (2 + \mu)q + 1 = 0, \quad \frac{2}{1+a}q - \frac{2}{a} - \mu = 0, \quad |q| < 1. \quad (43)$$

Единственное решение (43) существует только при $a < \sqrt{2}/2$ и имеет вид

$$q = \frac{1+a}{a} - \frac{\sqrt{1-a^2}}{a-a^2}, \quad \mu = \mu_* \equiv -\frac{2}{a\sqrt{1-a^2}}, \quad a < \sqrt{2}/2. \quad (44)$$

Проиллюстрируем расчет задачи (40)-(42) при $a = 1/8$, $N = 22$, $h = 1$. Для данного a , согласно (44),

$$\mu_* = -16 \sqrt{64/63}.$$

На рисунке 5 изображены собственные значения с обратным знаком ($-\lambda_k$), упорядоченные по возрастанию. Наблюдается изолированная точка

спектра λ_N . Остальные $\lambda_k > -4$ и ведут себя примерно как в случае равномерной сетки. В расчетах с различным числом узлов при $N \geq 6$ вычисленное значение $\lambda_N = -16.12648418$. При меньших N получаются меньшие по модулю λ_N . Последний факт установлен экспериментально, ибо предложенная выше теория не дает ответа на вопрос о том, с какой стороны от предельной точки μ_* находятся близкие к ней собственные значения конечномерной задачи.

Литература

1. *А.А. Самарский*. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1989.
2. *Э. Хайпер, Г. Ваннер*. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. - М.: Мир, 1999.
3. *B. Gustafsson, H. Kreiss, A. Sundström*. Stability theory of difference approximations for mixed initial boundary value problems // *Math. Comp.*, 1972, v.26, pp.649-686.
4. *А.А. Самарский, А.В. Гулин*. Устойчивость разностных схем. - М.: Наука, 1973.
5. *Л.В. Дородницын*. Искусственные граничные условия при численном моделировании дозвуковых течений газа // *ЖВМ и МФ*, 2005, т.45, N 7, с.1251-1278.
6. *C.W. Rowley, T. Colonius*. Discretely nonreflecting boundary conditions for linear hyperbolic systems // *J. Comp. Phys.*, 2000, v.157, N 2, pp.500-538.
7. *В.П. Ильютко*. Границы устойчивости разностных схем на неравномерных сетках // *Матем. моделирование*, 2005, т.17, N 11, с.85-92.