

НЕОТРАЖАЮЩИЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ¹

1. Введение

При численном моделировании внешних течений газа, в частности, задач обтекания, как правило, необходимо перенести задачу из бесконечной области в ограниченную. В дозвуковом случае непростой проблемой является формулировка условий на искусственных границах области. Главная причина возможных искажений решения лежит в отражении волн, генерируемых внутри области, от ее границ. Теория неотражающих граничных условий насчитывает около 25 лет², постепенно охватывая всё более сложные классы дифференциальных уравнений. В настоящей работе будут продолжены исследования автора [1]– [3] в области неотражающих граничных условий для систем уравнений газовой динамики. Рассмотрению подвергнутся уравнения Эйлера – как нелинейные, так и линеаризованные относительно фонового течения, – и две системы динамики вязкого газа: уравнения Навье– Стокса и квазигазодинамическая (КГД) система уравнений [4].

Стоит вопрос о взаимосвязи задач, поставленных в двух областях: во всем пространстве за вычетом обтекаемого тела и в ограниченной области вокруг тела. В [1]– [3] в качестве такой двумерной области рассмотрен прямоугольник. Будем, как и прежде, исследовать условия лишь на двух границах прямоугольника – левой (входной) и правой (выходной). Кроме того, каждую границу рассмотрим по отдельности, считая ее расположенной при $x = 0$. По этой причине вместо физической и расчетной областей, названных выше, будем сопоставлять другие пары областей. Для анализа условия на входной границе задачу, поставленную при $x \geq 0$, с дополнительными условиями на единственной границе $x = 0$, будем сравнивать с задачей в области $\{-\infty < x < \infty\}$, дополненную условиями при $x \rightarrow -\infty$. Последний случай назовем областью с границей, *бесконечно удаленной влево*. Аналогично, условие

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 00–01–00263а).

²Краткий обзор литературы по неотражающим условиям содержится в [1]– [3].

на выходной границе подразумевает $x \leq 0$, $x \rightarrow +\infty$ и область с границей, *бесконечно удаленной вправо*.

Процесс построения неотражающих граничных условий для нелинейных задач газовой динамики [1]– [3] состоит из следующих этапов.

1. Линеаризация исходных уравнений относительно возмущений.
2. Преобразование Фурье линеаризованных уравнений.
3. Выявление всех типов гармонических волн и подавление нежелательных мод с помощью граничных условий (ключевой пункт).
4. Обратное преобразование Фурье граничных условий.
5. Представление граничных условий для возмущений в терминах исходных физических параметров.

В настоящей работе критически пересмотрим пункты, касающиеся прямого и обратного преобразования Фурье. Прежде всего, оно неприменимо при учете непостоянства коэффициентов уравнений, что важно при моделировании проблем аэроакустики в терминах линеаризованных систем. В ряде других случаев линейных моделей можно обойтись без применения преобразования Фурье. Что касается нелинейных систем, то мы обсудим неотражающее свойство определенного класса граничных условий непосредственно для уравнений Эйлера.

Неотражающие граничные условия для линеаризованных уравнений Эйлера с переменными коэффициентами будут построены на основе непрямого использования математического аппарата Фурье-анализа. Проверкой теории послужит расчет одномерной задачи о распространении локального возмущения на неоднородном фоне. Неотражающие граничные условия для линеаризованных систем Навье– Стокса и КГД с постоянными коэффициентами будут получены из уравнений индивидуальных типов волн в вязком газе и адаптированы к исходным нелинейным системам. В качестве теста применимости методики выбрана задача о структуре неподвижной ударной волны.

2. Газодинамические уравнения и следствия из них

Систему уравнений Эйлера в консервативных переменных для двумерной плоской геометрии запишем в векторном виде:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0. \quad (2.1)$$

Здесь

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E+p) \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E+p) \end{pmatrix},$$

$$E = (\gamma - 1)^{-1} p + 0.5 \rho (u^2 + v^2), \quad p = \rho c^2 / \gamma,$$

ρ – плотность, u, v – компоненты скорости, E – полная энергия, p – давление, γ – показатель адиабаты, c – скорость звука.

Выпишем по аналогии с (2.1) систему уравнений Навье–Стокса

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial R^{NS}}{\partial x} + \frac{\partial S^{NS}}{\partial y} \quad (2.2)$$

и квазигазодинамическую систему уравнений

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y}. \quad (2.3)$$

Левые части (2.2) и (2.3) совпадают с уравнениями Эйлера (2.1), а векторы R^{NS} , S^{NS} , R , S содержат, в свою очередь, дифференциальные выражения, различные в (2.2) и (2.3).

Рассмотрим вектор примитивных переменных

$$V = (\rho \ u \ v \ p)^T.$$

Вводя матрицы Якоби

$$P = \frac{\partial Q}{\partial V}, \quad A_x = \frac{\partial F}{\partial V}, \quad A_y = \frac{\partial G}{\partial V}, \quad (2.4)$$

получаем из (2.1) векторную запись уравнений Эйлера в примитивных переменных

$$\frac{\partial V}{\partial t} + C_x \frac{\partial V}{\partial x} + C_y \frac{\partial V}{\partial y} = 0. \quad (2.5)$$

Здесь $C_x = P^{-1}A_x = \hat{C}_x + uI$, $C_y = P^{-1}A_y = \hat{C}_y + vI$, P^{-1} – матрица, обратная P , I – единичная матрица,

$$\hat{C}_x = \begin{pmatrix} 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{C}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & \gamma p & 0 \end{pmatrix}.$$

Объектом изучения будут также линеаризованные системы уравнений газовой динамики. Представим все переменные в виде сумм фоновых значений и возмущений:

$$V = \bar{V} + U, \quad \text{где } \bar{V} = (\bar{\rho} \bar{u} \bar{v} \bar{p})^T, \quad U = (\rho' u' v' p')^T.$$

Функции от невозмущенных величин будем отмечать прямыми чертами.

Вначале проведем линеаризацию уравнений Эйлера, для чего необходимы следующие предположения:

- (i) основные уравнения справедливы для фоновых величин;
- (ii) члены $O(U^2)$ несущественны.

Применение перечисленных принципов к системе (2.5) приводит к линеаризованным уравнениям Эйлера следующего вида:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \bar{C}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \bar{C}_y \frac{\partial U}{\partial y} + C'_x \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + C'_y \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} = 0.$$

В последнем выражении C'_x и C'_y – возмущения матриц C_x и C_y . В силу условия (ii) матрицы C'_x и C'_y являются линейными функциями возмущений U , что делает данное уравнение линейным по U , причем его коэффициенты зависят от фоновых параметров и их производных. В дальнейшем все линейные уравнения будут представляться именно в такой форме, в связи с чем опустим черты над коэффициентами (коэффициентными матрицами). Итак, линеаризованные уравнения Эйлера имеют вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} + C_x \frac{\partial U}{\partial x} + C_y \frac{\partial U}{\partial y} + KU = 0, \quad (2.6)$$

где $K = K_x + K_y$; в свою очередь,

$$K_x = \begin{pmatrix} u_x & \rho_x & 0 & 0 \\ -\rho^{-2} p_x & u_x & 0 & 0 \\ 0 & v_x & 0 & 0 \\ 0 & p_x & 0 & \gamma u_x \end{pmatrix}, \quad K_y = \begin{pmatrix} v_y & 0 & \rho_y & 0 \\ 0 & 0 & u_y & 0 \\ -\rho^{-2} p_y & 0 & v_y & 0 \\ 0 & 0 & p_y & \gamma v_y \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее производные скалярных величин для краткости обозначаются нижними индексами. Член KU в (2.6) называют *рефракционным* [5].

Если подвергнуть линеаризации уравнения Эйлера в консервативных переменных (2.1), получается выражение

$$\frac{\partial}{\partial t}(PU) + \frac{\partial}{\partial x}(A_x U) + \frac{\partial}{\partial y}(A_y U) = 0. \quad (2.7)$$

Уравнение (2.7) эквивалентно (2.6), являясь его дивергентной формой записи.

Последующие преобразования уравнений будут основываться на еще одной гипотезе:

- (iii) фоновые параметры изменяются плавно по сравнению с возмущениями.

Сформулируем данное условие более четко. В системе (2.6) присутствуют члены двух видов: фоновые параметры, умноженные на производные возмущений, и возмущения, умноженные на производные фона. Будем считать, что

$$\left\| \frac{\partial \bar{V}}{\partial \alpha} U \right\| \ll \left\| \bar{V} \frac{\partial U}{\partial \alpha} \right\|, \quad \text{где } \alpha = t, x, y. \quad (2.8)$$

Простейший подход – принять принцип замороженных коэффициентов, т.е. считать невозмущенные величины константами. Так поступал автор в [1]– [3] и, вообще, большинство разработчиков неотражающих условий. В настоящей работе будет уделено внимание производным невозмущенных параметров, хотя отказ от условия (iii) затруднил бы исследование.

Если трактовать постулат (iii) как принцип замороженных коэффициентов, то в линеаризованных уравнениях Эйлера (2.6) исчезает источниковый член и они принимают вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} + C_x \frac{\partial U}{\partial x} + C_y \frac{\partial U}{\partial y} = 0. \quad (2.9)$$

На тех же принципах в [1, 2] выполнена линеаризация уравнений Навье– Стокса и квазигазодинамической системы. Линеаризованные уравнения Навье– Стокса имеют вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} + C_x \frac{\partial U}{\partial x} + C_y \frac{\partial U}{\partial y} = \nu \left(D_{xx}^{NS} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2D_{xy}^{NS} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + D_{yy}^{NS} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right), \quad (2.10)$$

где $\nu = \mu/\rho$ – коэффициент кинематической вязкости, матрицы

$$D_{xx}^{NS} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -c^2/Pr & 0 & 0 & \gamma/Pr \end{pmatrix}, \quad D_{xy}^{NS} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_{yy}^{NS} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 0 \\ -c^2/Pr & 0 & 0 & \gamma/Pr \end{pmatrix},$$

Pr – число Прандтля. Линеаризованная квазигазодинамическая система отличается от (2.10) правой частью:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + C_x \frac{\partial U}{\partial x} + C_y \frac{\partial U}{\partial y} = \tau \left(D_{xx} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2D_{xy} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + D_{yy} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right), \quad (2.11)$$

где $\tau = \mu/p$ – среднее время свободного пробега молекулы,

$$D_{xx} = \begin{pmatrix} u^2 & 2\rho u & 0 & 1 \\ 0 & u^2 + 3p/\rho & 0 & 2u/\rho \\ 0 & 0 & u^2 + p/\rho & 0 \\ -c^4/\gamma & 2\gamma\rho u & 0 & u^2 + 2c^2 \end{pmatrix},$$

$$D_{xy} = \begin{pmatrix} uv & \rho v & \rho u & 0 \\ 0 & uv & p/\rho & v/\rho \\ 0 & p/\rho & uv & u/\rho \\ 0 & \gamma\rho v & \gamma\rho u & uv \end{pmatrix},$$

$$D_{yy} = \begin{pmatrix} v^2 & 0 & 2\rho v & 1 \\ 0 & v^2 + p/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v^2 + 3p/\rho & 2v/\rho \\ -c^4/\gamma & 0 & 2\gamma\rho v & v^2 + 2c^2 \end{pmatrix}.$$

3. Волны в линеаризованной системе Эйлера

Проведем анализ волн, описываемых линеаризованными уравнениями Эйлера, при пространственно-временной неоднородности фонового течения, а также обсудим возможность построения неотражающих граничных условий в этом случае. Преобразование Фурье здесь неприменимо, однако мы будем использовать "псевдоспектральный"

метод, близкий к предложенному Д.И. Блохинцевым [6], а также проводить параллель с формальным применением Фурье-анализа к системе с переменными коэффициентами. Пусть колебания, имеющие частоту ω , распространяются на фоне газодинамических процессов с характерным временем t_0 . Можно полагать $t_0 = L/c_0$, где L и c_0 – характерные длина и скорость звука. Примем гипотезу [6], что

$$\omega t_0 \gg 1, \quad (3.1)$$

тем самым конкретизируя постулат (iii) и формулу (2.8).

Рассмотрим линеаризованные уравнения Эйлера (2.6) в одномерном случае:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + C_x \frac{\partial U}{\partial x} + K_x U = 0. \quad (3.2)$$

Начнем с анализа следующей модели. Вообразим, будто матрицы в (3.2) неизменны в пространстве и времени, а K_x состоит из неких символов вместо производных по x от фоновых параметров. В такой модели, которую назовем *квазипостоянной*, уравнение (3.2) допускает преобразование Фурье. Будем искать функции вида

$$U = \hat{U} \exp\{i\omega t - i\omega x/c^*\}, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad c^* \in \mathbb{C}, \quad (3.3)$$

которые превращают (3.2) в

$$(ic^*\omega I - i\omega C_x + c^*K_x)\hat{U} = 0. \quad (3.4)$$

Равенство (3.4) представляет собой задачу на отыскание правого собственного вектора матрицы. Рассмотрим также аналогичную задачу для левого собственного вектора

$$\check{U}(ic^*\omega I - i\omega C_x + c^*K_x) = 0. \quad (3.5)$$

На следующем этапе, учитывая (3.1), разложим решения (3.4) и (3.5) по степеням малого параметра. Подражая [6], в качестве такового выберем размерную величину $(ik_0)^{-1}$, где

$$k_0 = \omega/c_0$$

– характерное волновое число. Представим

$$\begin{aligned} \hat{U} &= \hat{U}^{(0)} + \frac{1}{ik_0} \hat{U}^{(1)} + \dots, & \check{U} &= \check{U}^{(0)} + \frac{1}{ik_0} \check{U}^{(1)} + \dots, \\ c^* &= c^{(0)} - \frac{1}{ik_0} c^{(1)} + \dots \end{aligned} \quad (3.6)$$

Подстановка (3.6) в (3.4) дает для членов (3.6) нулевого порядка хорошо известную [3, 7] спектральную задачу для однородного фонового течения (2.9):

$$(c^{(0)}I - C_x) \hat{U}^{(0)} = 0.$$

Ее решение имеет вид

$$c^{(0)} = c_j, \quad \hat{U}^{(0)} = \hat{U}_j, \quad j = 1, \dots, 4, \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= u + c, \quad \hat{U}_1 = (\rho \quad c \quad 0 \quad \gamma p)^T, \\ c_2 &= u - c, \quad \hat{U}_2 = (\rho \quad -c \quad 0 \quad \gamma p)^T, \\ c_3 &= u, \quad \hat{U}_3 = (\rho \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T, \quad c_4 = u, \quad \hat{U}_4 = (0 \quad 0 \quad c \quad 0)^T. \end{aligned}$$

отвечают правой акустической, левой акустической, энтропийной и вихревой волнам. Два последних типа волн называются конвективными волнами. Сходным путем (3.5) приводит к набору

$$\check{U}^{(0)} = \check{U}_j, \quad j = 1, \dots, 4: \quad \check{U}_j C_x = c_j \check{U}_j, \quad (3.8)$$

где

$$\begin{aligned} \check{U}_1 &= \frac{1}{2\gamma p} (0 \quad \rho c \quad 0 \quad 1), \quad \check{U}_2 = \frac{1}{2\gamma p} (0 \quad -\rho c \quad 0 \quad 1), \\ \check{U}_3 &= \frac{1}{\gamma p} (c^2 \quad 0 \quad 0 \quad -1), \quad \check{U}_4 = (0 \quad 0 \quad 1/c \quad 0). \end{aligned}$$

Векторы из (3.7) и (3.8) выписаны в таком виде, что

$$\check{U}_j \hat{U}_k = \delta_{jk}, \quad (3.9)$$

где δ_{jk} – символ Кронекера.

Нахождение первого приближения (3.6) основывается на процедуре, которая соответствует общему случаю возмущенной задачи на собственные значения, приведенной в Приложении. В результате получаем поправки собственных значений

$$\frac{c_0}{c_j} c^{(1)} = c_j^{(1)} = \check{U}_j K_x \hat{U}_j, \quad j = 1, \dots, 4, \quad (3.10)$$

и уравнения для поправок собственных векторов

$$\begin{aligned} \frac{c_0}{c_j} \hat{U}^{(1)} &= \hat{U}_j^{(1)}, \quad j = 1, \dots, 4: \\ (c_j I - C_x) \hat{U}_j^{(1)} &= [(\check{U}_j K_x \hat{U}_j) I - K_x] \hat{U}_j, \quad j = 1, \dots, 4. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Поскольку имеется кратное собственное значение $c_3 = c_4 = u$, а для собственных векторов выполняется свойство

$$\check{U}_4 K_x \hat{U}_3 = 0, \quad \check{U}_3 K_x \hat{U}_4 = 0,$$

поправки $\hat{U}_3^{(1)}$ и $\hat{U}_4^{(1)}$ должны дополнительно удовлетворять уравнениям

$$\check{U}_4 \left[(\check{U}_3 K_x \hat{U}_3) I - K_x \right] \hat{U}_3^{(1)} = 0, \quad \check{U}_3 \left[(\check{U}_4 K_x \hat{U}_4) I - K_x \right] \hat{U}_4^{(1)} = 0. \quad (3.12)$$

Первое приближение (3.6) левых собственных векторов (3.5) определяется, аналогично (3.11), (3.12), выражениями

$$\frac{c_0}{c_j} \check{U}^{(1)} = \check{U}_j^{(1)}, \quad j = 1, \dots, 4:$$

$$\check{U}_j^{(1)} (c_j I - C_x) = \check{U}_j \left[(\check{U}_j K_x \hat{U}_j) I - K_x \right], \quad j = 1, \dots, 4, \quad (3.13)$$

$$\check{U}_3^{(1)} \left[(\check{U}_3 K_x \hat{U}_3) I - K_x \right] \hat{U}_4 = 0, \quad \check{U}_4^{(1)} \left[(\check{U}_4 K_x \hat{U}_4) I - K_x \right] \hat{U}_3 = 0.$$

Из (3.9), (3.11), (3.13) вытекает свойство векторов:

$$(c_j - c_l) \check{U}_j \hat{U}_l^{(1)} = (c_l - c_j) \check{U}_j^{(1)} \hat{U}_l = \check{U}_j K_x \hat{U}_l, \quad j \neq l. \quad (3.14)$$

Выпишем формулы приближенного решения спектральных задач (3.4), (3.5), которое следует из (3.6)–(3.13):

$$c^* \approx c_j - \frac{1}{ik_j} c_j^{(1)}, \quad \hat{U} \approx \hat{U}_j + \frac{1}{ik_j} \hat{U}_j^{(1)}, \quad \check{U} \approx \check{U}_j + \frac{1}{ik_j} \check{U}_j^{(1)}, \quad (3.15)$$

$$j = 1, \dots, 4,$$

где $k_j = \omega/c_j$ – волновые числа нулевого приближения,

$$c_1^{(1)} = \frac{\gamma+1}{2} u_x, \quad \hat{U}_1^{(1)} = \begin{pmatrix} -\rho_x + (\gamma-1) \frac{\rho}{c} u_x & \frac{\gamma-1}{2} u_x & -v_x & -p_x \end{pmatrix}^T,$$

$$\check{U}_1^{(1)} = \frac{1}{4\rho^2 c^3} (2c p_x \quad 0 \quad 0 \quad -(\gamma-1)\rho u_x),$$

$$c_2^{(1)} = \frac{\gamma+1}{2} u_x, \quad \hat{U}_2^{(1)} = \begin{pmatrix} -\rho_x - (\gamma-1) \frac{\rho}{c} u_x & \frac{\gamma-1}{2} u_x & -v_x & -p_x \end{pmatrix}^T,$$

$$\check{U}_2^{(1)} = \frac{1}{4\rho^2 c^3} (2c p_x \quad 0 \quad 0 \quad (\gamma-1)\rho u_x),$$

$$c_3^{(1)} = u_x, \quad \hat{U}_3^{(1)} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad -p_x)^T,$$

$$\check{U}_3^{(1)} = \frac{1}{\rho^2 c^2} (-p_x \quad -(\gamma-1)\rho^2 u_x \quad 0 \quad \rho_x),$$

$$c_4^{(1)} = 0, \quad \hat{U}_4^{(1)} = 0, \quad \check{U}_4^{(1)} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{\rho c^3} v_x),$$

причем

$$\left(\check{U}_j + \frac{1}{ik_j} \check{U}_j^{(1)} \right) \left(\hat{U}_l + \frac{1}{ik_l} \hat{U}_l^{(1)} \right) = \delta_{jl} + O(k_0^{-2}).$$

Общее решение квазипостоянной модели (3.2) с фиксированной ω есть линейная комбинация функций (3.3), куда подставляются \hat{U} и c^* из (3.15):

$$U_j = \left(\hat{U}_j + \frac{1}{ik_j} \hat{U}_j^{(1)} \right) \exp \left\{ i\omega t - ik_j x - \frac{1}{c_j} c_j^{(1)} x \right\}, \quad j = 1, \dots, 4. \quad (3.16)$$

Граничное условие

$$\mathcal{L}U|_{x=0} = 0 \quad (3.17)$$

выделяет из общего решения подмножество (линейное многообразие). Неотражающее граничное условие (3.17) дает разложение только по выходящим компонентам (3.16), согласно общему определению [3].

Мы рассмотрели условную, упрощенную модель для уравнений Эйлера (3.2). Она облегчит нам анализ модели реальной, с точки зрения принятых гипотез. Пусть коэффициенты зависят от пространства и времени:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + C_x(x, t) \frac{\partial U}{\partial x} + K_x(x, t) U = 0. \quad (3.18)$$

Будем, по примеру [6], искать решение (3.18) в виде

$$U = \hat{U}(x, t) \exp\{i\omega t - i\omega \theta(x, t)\}, \quad \text{где } \theta(x, t) = \int_0^x \frac{d\xi}{c^*(\xi, t)}. \quad (3.19)$$

Данная модификация гармонической волны (3.3) нас устраивает, поскольку требуется исследовать поведение решения на границе $x = 0$. Имеем:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{c^*(x, t)}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t}(0, t) = 0.$$

Поэтому подстановка (3.19) в (3.18) при $x = 0$ дает уравнение

$$(ic^*\omega I - i\omega C_x + c^*K_x) \hat{U} + c^* \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + C_x \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} \right) = 0. \quad (3.20)$$

Теперь разложим параметры волны по степеням $(ik_0)^{-1}$:

$$\hat{U} \approx \hat{U}^{(0)} + \frac{1}{ik_0} \hat{U}^{(1)}, \quad c^* \approx c^{(0)} - \frac{1}{ik_0} c^{(1)}. \quad (3.21)$$

Предлагаемый подход отличается от примененного в [6] тем, что фаза θ может зависеть от времени и она не фиксирована, а разлагается, как

и амплитуда. Для (3.20), (3.21) нулевое приближение совпадает с (3.7), но собственные значения и векторы – функции (x, t) . Поправки первого приближения определяются аналогично (3.10), (3.11):

$$\frac{c_0}{c_j} c^{(1)} = \tilde{c}_j^{(1)} = \check{U}_j K_x \hat{U}_j + \check{U}_j \left(\frac{\partial \hat{U}_j}{\partial t} + c_j \frac{\partial \hat{U}_j}{\partial x} \right), \quad j = 1, \dots, 4, \quad (3.22)$$

где учтено уравнение (3.8), и, для векторов,

$$\begin{aligned} \frac{c_0}{c_j} \hat{U}^{(1)} &= \hat{\tilde{U}}_j^{(1)}, \quad j = 1, \dots, 4: & (3.23) \\ (c_j I - C_x) \hat{\tilde{U}}_j^{(1)} &= [(\check{U}_j K_x \hat{U}_j) I - K_x] \hat{U}_j + \\ &+ \left[\check{U}_j \left(\frac{\partial \hat{U}_j}{\partial t} + c_j \frac{\partial \hat{U}_j}{\partial x} \right) \right] \hat{U}_j - \frac{\partial \hat{U}_j}{\partial t} - C_x \frac{\partial \hat{U}_j}{\partial x}. \end{aligned}$$

Кроме того, $\hat{\tilde{U}}_3^{(1)}$ и $\hat{\tilde{U}}_4^{(1)}$ удовлетворяют дополнительным уравнениям, причем, в отличие от (3.12), дифференциальным. Решение системы (3.18) разлагается по модам (3.19):

$$U_j = \left(\hat{U}_j + \frac{1}{ik_j} \hat{\tilde{U}}_j^{(1)} \right) \exp\{i\omega t - i\omega\theta_j\}, \quad j = 1, \dots, 4, \quad (3.24)$$

где правила определения θ_j следуют из вышеизложенного.

Сравнивая формулы (3.10)– (3.11) и (3.22)– (3.23), видим, что собственные значения и векторы системы с переменными коэффициентами (3.18) получаются прибавлением к аналогичным объектам квазипостоянной модели (3.2) новых членов. В дальнейшем будем использовать эту связь при построении неотражающих граничных условий для уравнения (3.18). Но прежде обратимся к более простому примеру – связи между линейными уравнениями Эйлера с постоянными коэффициентами (2.9) и исходными уравнениями (2.5) в одномерном случае.

4. О неотражающих условиях для нелинейных уравнений Эйлера

Пусть имеется система нелинейных газодинамических уравнений, дополненная условиями на одной границе. Решение такой системы не является простой суммой волн, выходящих и входящих. В связи с этим требуется уточнить определение неотражающего граничного условия, что мы сделаем, отталкиваясь от формулировки [8].

Определение. Условие на левой (правой) границе является неотражающим для данной системы, если при его удовлетворении множество решений системы совпадает с множеством следов решений системы для области с бесконечно удаленной влево (вправо) границей, оставленных в заданной ограниченной области.

Подчеркнем два обстоятельства относительно "эталонного" решения в бесконечной области. Во-первых, речь идет о множестве решений, которые, в общем случае, не обязаны на бесконечности стремиться к заданным значениям параметров. Во-вторых, ограничимся ситуацией, когда в упомянутых решениях нет генерации волн за пределами рассматриваемой полуограниченной области.

Точные неотражающие граничные условия для нелинейной системы, очевидно, не всегда возможны, а если возможны, то построить их намного труднее, чем в линейном случае. Основной путь – граничные условия для линеаризованной системы преобразовывать к форме, употребляемой для исходной системы, и считать получаемые уравнения приближенными нелинейными неотражающими условиями. Способ преобразования дифференциальных граничных уравнений (3.17) сформулирован в [2] и состоит в замене

$$\mathcal{L}(\bar{V})U \mapsto \mathcal{L}(V)V. \quad (4.1)$$

То есть в коэффициенты подставляются текущие значения параметров, а производные возмущений заменяются производными самих параметров. Последнее допустимо, если справедлива оценка

$$\left\| \frac{\partial \bar{V}}{\partial \alpha} \right\| \ll \left\| \frac{\partial U}{\partial \alpha} \right\|, \quad \text{где } \alpha = t, x, y,$$

– гораздо более жесткая, чем (2.8). Однако, как покажем ниже, замена (4.1) в ряде случаев правомерна на других основаниях.

Среди линеаризованных газодинамических систем точные неотражающие условия допускают только одномерные уравнения Эйлера с постоянными коэффициентами. Для остальных систем, по-видимому, возможны лишь приближенные неотражающие условия. В [3] для линейной одномерной системы Эйлера приводятся различные классы неотражающих граничных уравнений. Попытаемся выяснить, какие из них остаются точными в нелинейном случае после применения преобразования (4.1).

Известно, что одномерные нелинейные уравнения Эйлера

$$\frac{\partial V}{\partial t} + C_x \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (4.2)$$

представимы в характеристической форме [9]:

$$\check{U}_j \frac{\partial V}{\partial t} + c_j \check{U}_j \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad j = 1, \dots, 4, \quad (4.3)$$

(см. (3.7), (3.8)). На данном представлении базируются характеристические граничные условия [10, 11]:

$$\check{U}_j \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad j \notin \mathcal{J}, \quad (4.4)$$

где \mathcal{J} – множество индексов выходящих волн. В [10] доказана теорема о том, что условие (4.4) является неотражающим в случае одномерных уравнений Эйлера, т.е. оно не дает входящих волн, если из области выходит *простая* волна.

Для линейных одномерных уравнений Эйлера в [3] выведен критерий неотражающего граничного условия. Условие (3.17) является неотражающим тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}(k_j, \omega) \hat{U}_j &= 0, \quad j \in \mathcal{J}; \\ \hat{\mathcal{L}}(k_j, \omega) \hat{U}_j &\text{ – линейно независимы, } j \notin \mathcal{J}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь $\hat{\mathcal{L}}(k, \omega)$ – образ Фурье оператора \mathcal{L} в терминах гармоник (3.3), где $k = \omega/c^*$. (Критерий (4.5) в выписанном виде справедлив для любой гиперболической [9] системы с постоянными коэффициентами без младших членов.) В [3] приведены примеры условий, удовлетворяющих (4.5), среди которых встречаются уравнения алгебраические и дифференциальные с производными различного порядка. Будут ли эти условия неотражающими для нелинейных уравнений Эйлера?

Рассмотрим класс граничных операторов, содержащих только первые производные по пространству и/или времени. Оказывается, что если оператор из данного класса является неотражающим в случае линейных одномерных уравнений Эйлера, то он будет точным неотражающим и для нелинейных уравнений Эйлера (4.2). При этом такое граничное условие равносильно характеристическому условию (4.4).

Теорема. Пусть оператор имеет вид

$$\mathcal{L}U = L_1 \frac{\partial U}{\partial t} + L_2 \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (4.6)$$

где L_1, L_2 – некоторые матрицы, и удовлетворяет (4.5). Тогда при замене (4.1) граничное условие $\mathcal{L}(V)V = 0$ для уравнения (4.2) эквивалентно условию (4.4), если решение V на границе остается непрерывно дифференцируемой функцией.

Доказательство. Выпишем образ оператора (4.6) при подстановке $k = k_j$:

$$\hat{\mathcal{L}}(k_j, \omega) = i\omega L_1 - ik_j L_2 = ik_j (c_j L_1 - L_2). \quad (4.7)$$

Обозначим

$$w_t^j = \check{U}_j \frac{\partial U}{\partial t}, \quad w_x^j = \check{U}_j \frac{\partial U}{\partial x}$$

и запишем (4.3) в виде

$$w_t^j + c_j w_x^j = 0. \quad (4.8)$$

Действие оператора (4.6) на вектор V представим с учетом (3.9):

$$\mathcal{L}V = \sum_j (L_1 \hat{U}_j w_t^j + L_2 \hat{U}_j w_x^j).$$

Далее, применяя последовательно формулы (4.8) и (4.7), получаем:

$$\mathcal{L}V = - \sum_j (c_j L_1 - L_2) \hat{U}_j w_x^j = - \sum_{j \notin \mathcal{J}} (c_j L_1 - L_2) \hat{U}_j w_x^j,$$

в силу (4.5). Поскольку выписанное выражение равно нулю, а векторы, согласно (4.5), линейно независимы, то обращаются в нуль все коэффициенты:

$$w_x^j = 0, \quad j \notin \mathcal{J},$$

что совпадает с (4.4). Достаточность (4.4) очевидна. Теорема доказана.

Таким образом, для нелинейных уравнений Эйлера в одномерном случае любые неотражающие условия с первыми производными (4.6) тождественны характеристическим условиям. Но из данного факта не следует, что другие варианты операторов (4.6) бесполезны. Эквивалентность граничных условий теряется при появлении двумерности [12], диссипации, при дискретной аппроксимации тех или иных операторов (4.6). Различные неотражающие операторы могут служить основой для их модификации с учетом перечисленных факторов.

Приведем конкретные примеры (4.6). На входной границе неотражающим является оператор левой акустической волны:

$$\mathcal{L}U \equiv \frac{\partial U}{\partial t} + c_2 \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \quad (4.9)$$

На выходе строится оператор [3]

$$\mathcal{L}U \equiv c \frac{\partial U}{\partial t} + cu \frac{\partial U}{\partial x} + \hat{C}_x^2 \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \quad (4.10)$$

Как следует из доказанной теоремы, условия $\mathcal{L}(V) V = 0$ в случаях (4.9) и (4.10) являются неотражающими для нелинейных уравнений Эйлера (4.2). Выпишем эти условия покомпонентно. Условие на входе (4.9):

$$\begin{aligned} \rho_t - (c-u) \rho_x &= 0, & u_t - (c-u) u_x &= 0, \\ v_t - (c-u) v_x &= 0, & p_t - (c-u) p_x &= 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Условие на выходе (4.10):

$$\begin{aligned} \rho_t + u \rho_x + c^{-1} p_x &= 0, & u_t + (c+u) u_x &= 0, \\ v_t + u v_x &= 0, & p_t + (c+u) p_x &= 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

5. Неотражающие граничные условия для линейных уравнений Эйлера с рефракцией

Вернемся к линеаризованным уравнениям Эйлера (3.18) и оценим наши средства для построения неотражающих граничных условий к ним. В уравнении (3.18) присутствуют параметры *известного* фонового течения. В зависимости от его поведения на границе $x = 0$ выделим две ситуации:

- фоновое течение не содержит волн, входящих через границу;
- фоновое течение имеет общий вид, допустимый одномерной системой (4.2).

В двух случаях можно предложить принципиально различные способы построения неотражающих условий для системы относительно возмущений U , причем первый случай намного проще. С него и начнем.

Невозмущенные параметры \bar{V} , в силу предположения (i), удовлетворяют нелинейным уравнениям (4.2). Если в фоновом течении

нет волн, входящих в область извне, то любое точное неотражающее граничное условие, сформулированное для (4.2), будет справедливо как для исходных величин V , так и для фона \bar{V} . Поэтому можно линеаризовать не только основные уравнения (3.2), но и граничные условия к ним, применив постулаты (i) и (ii).

Из (4.11) получим входное условие

$$\frac{\partial U}{\partial t} - (c-u) \frac{\partial U}{\partial x} - (c'-u') \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

или, выражая c' через ρ' и p' , в покомпонентной записи:

$$\begin{aligned} \rho'_t - (c-u) \rho'_x + 0.5 c \rho^{-1} \rho_x \rho' + \rho_x u' - 0.5 c \rho^{-1} \rho_x p' &= 0, \\ u'_t - (c-u) u'_x + 0.5 c \rho^{-1} u_x \rho' + u_x u' - 0.5 c \rho^{-1} u_x p' &= 0, \\ v'_t - (c-u) v'_x + 0.5 c \rho^{-1} v_x \rho' + v_x u' - 0.5 c \rho^{-1} v_x p' &= 0, \\ p'_t - (c-u) p'_x + 0.5 c \rho^{-1} p_x \rho' + p_x u' - 0.5 c \rho^{-1} p_x p' &= 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Из (4.12) следует условие на выходе

$$\begin{aligned} \rho'_t + u \rho'_x + c^{-1} p'_x + 0.5 (\rho c)^{-1} p_x \rho' + \rho_x u' - 0.5 (c \rho)^{-1} p_x p' &= 0, \\ u'_t + (c+u) u'_x - 0.5 c \rho^{-1} u_x \rho' + u_x u' + 0.5 c \rho^{-1} u_x p' &= 0, \\ v'_t + u v'_x + v_x u' &= 0, \\ p'_t + (c+u) p'_x - 0.5 c \rho^{-1} p_x \rho' + p_x u' + 0.5 c \rho^{-1} p_x p' &= 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Выпишем результаты линеаризации характеристических граничных условий (4.4), заданных на левой и правой границах (см. (3.8)). Вход:

$$\begin{aligned} \rho c u'_x + p'_x + 0.5 c u_x \rho' + 0.5 \gamma c^{-1} u_x p' &= 0, \\ c^2 \rho'_x - p'_x - c^2 \rho^{-1} \rho_x \rho' + \gamma \rho^{-1} \rho_x p' &= 0, \quad v'_x = 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Выход:

$$-\rho c u'_x + p'_x - 0.5 c u_x \rho' - 0.5 \gamma c^{-1} u_x p' = 0. \quad (5.4)$$

Как уже говорилось, такие граничные условия будут неотражающими в случае одномерного фонового течения без входящих волн. Однако на практике не всегда фоновые параметры известны точно. Если невозмущенное течение найдено численно или оно заведомо содержит входящие волны, то надежность описанного подхода теряется.

В общем случае линеаризованных уравнений Эйлера будем опираться на связь между квазипостоянной моделью (3.2) и реальной системой (3.18). Отметим важный факт. Уравнения Эйлера (3.18)

приводятся к характеристической форме по аналогии с (4.3). При этом достаточно использовать величины, относящиеся к квазипостоянной модели, (3.15). В уравнение (4.3) внесем поправки характеристической скорости c_j и левого собственного вектора \check{U}_j с учетом (3.15) и получим:

$$\check{U}_j \frac{\partial U}{\partial t} + \check{U}_j^{(1)} C_x U + c_j \left(\check{U}_j \frac{\partial U}{\partial x} - \check{U}_j^{(1)} U \right) + c_j^{(1)} \check{U}_j U = 0, \quad (5.5)$$

$$j = 1, \dots, 4.$$

Действительно, дифференциальные члены (5.5) можно заменить при помощи формулы (3.8) и основного уравнения (3.2):

$$\check{U}_j \left(\frac{\partial U}{\partial t} + c_j \frac{\partial U}{\partial x} \right) = \check{U}_j \left(\frac{\partial U}{\partial t} + C_x \frac{\partial U}{\partial x} \right) = -\check{U}_j K_x U.$$

Левая часть (5.5) превращается в

$$\left[\check{U}_j^{(1)} (C_x - c_j I) + \check{U}_j (c_j^{(1)} I - K_x) \right] U.$$

Выражение в квадратных скобках равно нулю в силу (3.10), (3.13). Отметим, что уравнение (5.5) выведено без отбрасывания членов второго порядка малости.

Приступим к построению неотражающих граничных условий для одномерных уравнений Эйлера с рефракцией (3.18). Выберем следующий путь. На основе результатов [3] для уравнений с однородным фоном будем строить для квазипостоянной модели (3.2) граничные операторы, неотражающие в первом приближении. Применение этих операторов к волновым решениям системы с переменными коэффициентами будет, как правило, давать нежелательные добавочные члены. Их вид позволит скорректировать граничные условия, сделав их неотражающими в первом приближении для основной системы (3.18).

Обобщим критерий (4.5) на случай уравнений с дисперсией (3.2). Для измененных базисных функций (3.16) критерий неотражающего условия приобретает вид:

$$\hat{\mathcal{L}} \left(k_j + \frac{1}{ic_j} c_j^{(1)}, \omega \right) \left(\hat{U}_j + \frac{1}{ik_j} \hat{U}_j^{(1)} \right) \begin{cases} = 0, & j \in \mathcal{J}, \\ \text{линейно независимы,} & j \notin \mathcal{J}. \end{cases} \quad (5.6)$$

На практике линейную независимость векторов достаточно проверять в нулевом приближении, т.е. исследовать $\hat{\mathcal{L}}(k_j, \omega) \hat{U}_j$, оставляя только главные члены $\hat{\mathcal{L}}(k_j, \omega)$.

Продемонстрируем методику построения неотражающих граничных условий. "Эталонное" входное условие (4.9) модифицируем для квазипостоянной модели (3.2) с учетом поправки (3.15):

$$\mathcal{L}U \equiv \frac{\partial U}{\partial t} + c_2 \frac{\partial U}{\partial x} + c_2^{(1)}U = 0. \quad (5.7)$$

Граничное условие (5.7) – неотражающее с точки зрения критерия (5.6). Чтобы в этом убедиться, достаточно найти действие оператора на выходящую левую акустическую волну:

$$\hat{\mathcal{L}} \left(k_2 + \frac{1}{ic_2} c_2^{(1)}, \omega \right) \left(\hat{U}_2 + \frac{c_2}{i\omega} \hat{U}_2^{(1)} \right) = O(k_0^{-2}). \quad (5.8)$$

Применим оператор (5.7) к решению уравнений с рефракцией (3.18), отвечающему за левую акустическую волну. Прежде введем обозначение

$$\tilde{\mathcal{L}}_j = \exp\{-i\omega t + i\omega\theta_j\} \mathcal{L} \quad (5.9)$$

(см. (3.24)). В выражении $\mathcal{L}U_2$ исчезнет большая часть членов благодаря (5.8), а останется, в связи с (3.10), (3.22),

$$\tilde{\mathcal{L}}_2 U_2 = - \left[\check{U}_2 \left(\frac{\partial \hat{U}_2}{\partial t} + c_2 \frac{\partial \hat{U}_2}{\partial x} \right) \right] \hat{U}_2 + \frac{\partial \hat{U}_2}{\partial t} + c_2 \frac{\partial \hat{U}_2}{\partial x} + O(k_0^{-2}).$$

(Отметим свойство ортогональности $\check{U}_2 \cdot \mathcal{L}U_2 = 0$.) Исправить положение можно, задав вместо (5.7) условие

$$\mathcal{L}U \equiv \frac{\partial U}{\partial t} + c_2 \frac{\partial U}{\partial x} + \tilde{c}_2^{(1)}U - (\check{U}_2 U) \left(\frac{\partial \hat{U}_2}{\partial t} + c_2 \frac{\partial \hat{U}_2}{\partial x} \right) = 0. \quad (5.10)$$

Тогда $\mathcal{L}U_2 = 0$, и условие на левой границе – неотражающее для линейных уравнений Эйлера (3.18).

Оператор (5.10) легко преобразуется к другим формам, также неотражающим в первом приближении, поскольку для левой акустической волны справедливы (см. (3.7)) приближенные равенства:

$$\rho'/\rho \approx -u'/c \approx p'/(c\rho).$$

В частности, система (5.10) приводится к диагональному виду, который выпишем покомпонентно, заменяя $\partial \hat{U}_2 / \partial t$ с помощью (4.2):

$$\rho'_t - (c-u) \rho'_x + \frac{1}{4} [5c\rho^{-1} \rho_x + (7-\gamma) u_x - 3c\rho^{-1} p_x] \rho' = 0,$$

$$u'_t - (c-u)u'_x + \frac{1}{4}[-c\rho^{-1}\rho_x + (\gamma+1)u_x - c\rho^{-1}p_x]u' = 0, \quad (5.11)$$

$$v'_t - (c-u)v'_x + \frac{1}{4}[c\rho^{-1}\rho_x + (3-\gamma)u_x - 3c\rho^{-1}p_x]v' = 0,$$

$$p'_t - (c-u)p'_x + \frac{1}{4}[c\rho^{-1}\rho_x + (3+3\gamma)u_x + c\rho^{-1}p_x]p' = 0.$$

Ранее мы получили упрощенный вариант (5.10) – входное условие (5.1). Его неотражающее свойство можно выяснить аналогичным образом: $\tilde{\mathcal{L}}_2 U_2 = 0$, поскольку в левой акустической волне фонового течения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \forall \varphi; \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{c} \tilde{U}_2 u_x.$$

В качестве примера неотражающего условия на выходе рассмотрим уточнение характеристического условия (5.4). Пространственная часть оператора в уравнении (5.5) для левой акустической волны ($j = 2$) имеет вид

$$\mathcal{L}U = c_2 \left(\tilde{U}_2 \frac{\partial U}{\partial x} - \tilde{U}_2^{(1)} U \right) + c_2^{(1)} \tilde{U}_2 U. \quad (5.12)$$

Такой оператор является неотражающим для квазипостоянной модели (3.2). По критерию (5.6),

$$\hat{\mathcal{L}} \left(k_j + \frac{1}{ic_j} c_j^{(1)}, \omega \right) \left(\hat{U}_j + \frac{1}{ik_j} \hat{U}_j^{(1)} \right) = 0, \quad j \neq 2,$$

что проверяется путем элементарных алгебраических преобразований, с учетом свойства (3.14). Применение оператора (5.12) к выходящей волне уравнений с рефракцией (3.18) дает, в терминах (5.9),

$$\tilde{\mathcal{L}}_j U_j = \tilde{U}_2 \hat{H}_j, \quad j \neq 2,$$

где

$$\hat{H}_j = \frac{c_2}{c_j - c_2} \left(\frac{\partial \hat{U}_j}{\partial t} + c_j \frac{\partial \hat{U}_j}{\partial x} \right). \quad (5.13)$$

Скорректировать оператор (5.12) можно следующим образом:

$$\mathcal{L}U \equiv c_2 \left(\tilde{U}_2 \frac{\partial U}{\partial x} - \tilde{U}_2^{(1)} U \right) + c_2^{(1)} \tilde{U}_2 U - \sum_{j \neq 2} \left(\tilde{U}_2 \hat{H}_j \right) \left(\tilde{U}_j U \right) = 0. \quad (5.14)$$

Выходное условие (5.14) – неотражающее для уравнений Эйлера (3.18) с принятой нами точностью. Собственные векторы данной системы (3.7), (3.8) таковы, что при подстановке (5.13) в сумму остается только

первое слагаемое ($j = 1$). Кроме того, варьировать источниковые члены (5.14) позволяет приближенное соотношение $\rho c u' \approx p'$, справедливое для всех выходящих волн. Выпишем одно из допустимых представлений неотражающего условия на выходе (5.14) покомпонентно:

$$\rho c u'_x - p'_x + \rho^{-1} p_x \rho' + \frac{1}{8} \left[\frac{1}{\rho} \rho_x - \frac{3-\gamma}{c} u_x + \frac{1}{\rho} p_x \right] (\rho c u' + p') = 0. \quad (5.15)$$

Если численный алгоритм требует большего числа граничных условий, то недостающие уравнения можно выбрать из характеристической системы (5.5) для $j = 1, 3, 4$:

$$\begin{aligned} \rho c u'_t + p'_t + (c+u) (\rho c u'_x + p'_x) - c \rho^{-1} p_x \rho' + \\ + (\rho c u_x + p_x) u' + \gamma u_x p' = 0, \quad (5.16) \\ c^2 \rho'_t - p'_t + u (c^2 \rho'_x - p'_x) + c^2 u_x \rho' + (c^2 \rho_x - p_x) u' - \gamma u_x p' = 0, \\ v'_t + u v'_x + v_x u' = 0. \end{aligned}$$

6. Уравнения изолированных волн в невязких и вязких средах

Предыдущие примеры показывают, что при построении неотражающих граничных условий базовой моделью газодинамической системы служат одномерные уравнения Эйлера с постоянными коэффициентами. Более сложные модели, как правило, сводятся к наличию дополнительных членов, снабженных каким-либо малым параметром. Если учитывать сразу несколько факторов, усложняющих систему, то, по-видимому, произведения двух малых величин не будут играть существенной роли. Это позволяет принять принцип *аддитивности поправок*. А значит, можно по отдельности рассматривать поправку на нелинейность (в определенных случаях равную нулю) либо на неоднородность фона, поправку на многомерность [2, 3], на вязкость и т.д.

Нахождение гармонического решения линеаризованных систем динамики вязкого газа (2.10) и (2.11) в одномерном случае аналогично решению квазипостоянной модели с дисперсией (3.2). Так, подстановка в (2.11) гармонической волны (3.3) порождает спектральную задачу (ср. (3.4))

$$\left(c^* I - C_x - i \frac{\tau \omega}{c^*} D_{xx} \right) \hat{U} = 0,$$

в которой присутствует малый параметр $\tau\omega$. Действительно, условие

$$\tau\omega \ll 1 \quad (6.1)$$

не противоречит гипотезе (3.1) при достаточно высоких числах Рейнольдса, типичных для задач аэродинамики.

В данном параграфе мы не будем пользоваться преобразованием Фурье. Оно, как известно, не для любых систем применимо. Кроме того, не всегда есть необходимость в его применении: например, при анализе волн в линейных системах с постоянными коэффициентами, содержащих диссипацию и/или пространственную двумерность (в последнем случае сказанное верно не для всех волн). Продолжая начатое в [1], из линеаризованных систем Эйлера, Навье–Стокса и КГД получим замкнутые дифференциальные уравнения волн каждого типа как алгебраические или дифференциальные следствия. На этой основе построим неотражающие граничные условия для перечисленных моделей газовой динамики.

6.1. Волны в уравнениях Эйлера

Линеаризованные уравнения Эйлера (2.9) удобно переписать, введя лагранжеву производную по времени

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}, \quad (6.2)$$

в форме

$$\frac{dU}{dt} + \hat{C}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \hat{C}_y \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad (6.3)$$

или, покомпонентно,

$$\begin{aligned} \rho'_t + \rho(u'_x + v'_y) &= 0, & u'_t + \rho^{-1} p'_x &= 0, \\ v'_t + \rho^{-1} p'_y &= 0, & p'_t + \gamma p(u'_x + v'_y) &= 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Чтобы получить уравнение для любых акустических волн, применим к (6.3) оператор

$$I \frac{d}{dt} - \hat{C}_x \frac{\partial}{\partial x} - \hat{C}_y \frac{\partial}{\partial y}. \quad (6.5)$$

Отсюда следует уравнение

$$\frac{d^2 U}{dt^2} - \hat{C}_x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - (\hat{C}_x \hat{C}_y + \hat{C}_y \hat{C}_x) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \hat{C}_y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad (6.6)$$

где все коэффициентные матрицы весьма разреженные. Последнее из четырех уравнений системы (6.6) является замкнутым волновым уравнением относительно возмущения давления p' :

$$\mathcal{L}p' \equiv p'_{tt} - c^2(p'_{xx} + p'_{yy}) = 0. \quad (6.7)$$

Уравнение энтропийной волны следует из первого и четвертого уравнений (6.4), а именно, в результате применения оператора

$$\begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

к (6.3):

$$w'_t = 0, \quad \text{где } w' = c^2 \rho' - p'. \quad (6.8)$$

Уравнение вихревой волны получается из второго и третьего уравнений (6.4) применением дифференциального оператора

$$\begin{pmatrix} 0 & \partial/\partial y & -\partial/\partial x & 0 \end{pmatrix}$$

к (6.3):

$$w'_t = 0, \quad \text{где } w' = u'_y - v'_x. \quad (6.9)$$

Перепишем уравнения волн в невязком газе (6.7)–(6.9) в неподвижной системе координат:

$$p'_{tt} + 2u p'_{xt} + 2v p'_{yt} - (c^2 - u^2) p'_{xx} + 2uv p'_{xy} - (c^2 - v^2) p'_{yy} = 0, \quad (6.10a)$$

$$w'_t + u w'_x + v w'_y = 0, \quad \text{где } w' = c^2 \rho' - p', \quad (6.10b)$$

$$w''_t + u w''_x + v w''_y = 0, \quad \text{где } w'' = u'_y - v'_x. \quad (6.10b)$$

Таким образом, мы имеем замкнутые уравнения энтропийной и вихревой волн, однако уравнение (6.10a) объединяет акустические волны, бегущие вправо и влево. И только в одномерном случае правые и левые акустические волны разделяются. В уравнении (6.7), записанном в лагранжевых координатах, оператор \mathcal{L} разлагается в произведение операторов правой и левой акустических волн:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^+ \mathcal{L}^-, \quad \text{где } \mathcal{L}^+ \varphi = \varphi_t + c \varphi_x, \quad \mathcal{L}^- \varphi = \varphi_t - c \varphi_x. \quad (6.11)$$

В неподвижных координатах $\mathcal{L}^+ \varphi = \varphi_t + (c+u) \varphi_x$, $\mathcal{L}^- \varphi = \varphi_t - (c-u) \varphi_x$.

Посредством операторов волн строятся неотражающие граничные условия для линейных уравнений Эйлера. В одномерном случае \mathcal{L}^- дает

оператор на левой границе (4.9). Оператор на правой границе строится на основе произведения операторов правой акустической и конвективной (6.106) волн

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_3, \quad \text{где } \mathcal{L}_1 \varphi = \varphi_t + (c+u) \varphi_x, \quad \mathcal{L}_3 \varphi = \varphi_t + u \varphi_x. \quad (6.12)$$

Затем (см. [3]) получающийся член $\partial^2 U / \partial t^2$ заменяем с помощью (6.6), а в итоговом выражении порядок производных по x понижаем на 1. Это и приводит к оператору (4.10).

6.2. Волны в системах динамики вязкого газа

Уравнения Навье–Стокса и квазигазодинамическая система сводятся к уравнениям отдельных волн на основе действий, применявшихся к уравнениям Эйлера, а также дальнейших превращений. В ходе преобразований уравнений в них будут возникать члены с разными степенями ν либо τ . В согласии с формулой (6.1) выдвинем гипотезу:

(iv) члены, имеющие второй порядок по параметру вязкости, можно игнорировать.

Уравнения Навье–Стокса (2.10) перепишем, используя лагранжеву производную по времени (6.2):

$$\frac{dU}{dt} + \hat{C}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \hat{C}_y \frac{\partial U}{\partial y} = \nu \left(D_{xx}^{NS} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2D_{xy}^{NS} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + D_{yy}^{NS} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right), \quad (6.13)$$

или, покомпонентно,

$$\rho'_t + \rho (u'_x + v'_y) = 0, \quad (6.14a)$$

$$u'_t + \frac{1}{\rho} p'_x = \nu \left(\frac{4}{3} u'_{xx} + \frac{1}{3} v'_{xy} + u'_{yy} \right), \quad (6.14б)$$

$$v'_t + \frac{1}{\rho} p'_y = \nu \left(v'_{xx} + \frac{1}{3} u'_{xy} + \frac{4}{3} v'_{yy} \right), \quad (6.14в)$$

$$p'_t + \gamma p (u'_x + v'_y) = -\frac{\nu}{Pr} c^2 (\rho'_{xx} + \rho'_{yy}) + \frac{\nu}{Pr} \gamma (p'_{xx} + p'_{yy}). \quad (6.14г)$$

Из (6.13) выводится уравнение акустических волн. Применяя оператор (6.5), получаем аналог (6.6) с правой частью, пропорциональной коэффициенту вязкости [1, 2]. Четвертое уравнение системы имеет вид

$$p'_{tt} - c^2 (p'_{xx} + p'_{yy}) = -\frac{\nu}{Pr} c^2 (\rho'_{xxt} + \rho'_{yyt}) + \frac{\nu}{Pr} \gamma (p'_{xxt} + p'_{yyt}) + \frac{4}{3} \nu \gamma p (u'_{xxx} + v'_{xxy} + u'_{xyy} + v'_{yyy}). \quad (6.15)$$

Для получения замкнутого уравнения относительно p' избавимся в правой части (6.15) от "недиагональных" членов с помощью вязкого аналога (6.8) и уравнения (6.14г):

$$c^2 \rho'_t = p'_t + O(\nu), \quad p'_t + \gamma p (u'_x + v'_y) = O(\nu).$$

В итоге получаем *обобщенное* волновое уравнение, содержащее диссипацию, для возмущения давления:

$$p'_{tt} - c^2 (p'_{xx} + p'_{yy}) = \nu^* (p'_{xxt} + p'_{yyt}) + O(\nu^2),$$

где $\nu^* = \nu \left(\frac{\gamma-1}{\text{Pr}} + \frac{4}{3} \right).$ (6.16)

Уравнение вихревой волны в системе Навье–Стокса (6.13) строится по аналогии с (6.9). Для переменной $w' = u'_y - v'_x$ из (6.14б), (6.14в) получаем известное уравнение диффузии вихря

$$w'_t = \nu (w'_{xx} + w'_{yy}). \quad (6.17)$$

Выведем из (6.13) уравнение энтропийной волны. Для переменной $w' = c^2 \rho' - p'$ (см. (6.8)) имеем:

$$w'_t = \frac{\nu}{\text{Pr}} [w'_{xx} + w'_{yy} - (\gamma-1) (p'_{xx} + p'_{yy})].$$

Издадимся от лапласиана давления, пользуясь уравнением (6.16). Вводя новую переменную

$$w'' = w' + \frac{\nu}{\text{Pr}} (\gamma-1) c^{-2} p'_t = c^2 \rho' - p' - \frac{\nu}{\text{Pr}} (\gamma-1) \rho (u'_x + v'_y) + O(\nu^2),$$

получаем уравнение

$$w''_t = \frac{\nu}{\text{Pr}} (w''_{xx} + w''_{yy}) + O(\nu^2). \quad (6.18)$$

Уравнения конвективных волн (6.17), (6.18) являются замкнутыми. В одномерном случае из (6.16) получаются уравнения правой и левой акустических волн. По примеру невязкого случая (6.11), разлагаем оператор (6.16), пренебрегая, согласно (iv), величинами второго порядка малости:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^+ \mathcal{L}^-, \quad \text{где } \mathcal{L}^+ \varphi = \varphi_t + c \varphi_x - 0.5 \nu^* \varphi_{xx}, \quad (6.19)$$

$$\mathcal{L}^- \varphi = \varphi_t - c \varphi_x - 0.5 \nu^* \varphi_{xx}.$$

Перейдем к анализу волн в линеаризованной квазигазодинамической системе (2.11). При этом мы в определенной степени сведем ее к уравнениям Навье–Стокса. Следуя принципу (iv), будем игнорировать любые величины второго порядка по τ , возникающие в ходе выкладок. Вводя лагранжеву производную (6.2) и специальным образом [1, 2] модифицируя правую часть (2.11), получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} + \hat{C}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \hat{C}_y \frac{\partial U}{\partial y} = \\ = \tau \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \hat{D}_{xx} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\hat{D}_{xy} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \hat{D}_{yy} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + O(\tau^2), \quad (6.20) \end{aligned}$$

где

$$\hat{D}_{xx} = D_{xx} - C_x^2, \quad \hat{D}_{xy} = D_{xy} - \frac{1}{2}(C_x C_y + C_y C_x), \quad \hat{D}_{yy} = D_{yy} - C_y^2.$$

$$\hat{D}_{xx} = \frac{c^2}{\gamma} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -c^2 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad \hat{D}_{xy} = \frac{c^2}{2\gamma} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\gamma & 0 \\ 0 & 2-\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{D}_{yy} = \frac{c^2}{\gamma} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\gamma & 0 \\ -c^2 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Тем самым КГД система приобретает сходство с уравнениями Навье–Стокса (6.13):

$$\begin{aligned} \frac{d\rho'}{dt} + \rho(u'_x + v'_y) &= \tau \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + O(\tau^2), \\ \frac{du'}{dt} + \frac{1}{\rho} p'_x &= \tau \frac{c^2}{\gamma} [(3-\gamma)u'_{xx} + (2-\gamma)v'_{xy} + u'_{yy}] + \tau \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} + O(\tau^2), \\ \frac{dv'}{dt} + \frac{1}{\rho} p'_y &= \tau \frac{c^2}{\gamma} [v'_{xx} + (2-\gamma)u'_{xy} + (3-\gamma)v'_{yy}] + \tau \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} + O(\tau^2), \\ \frac{dp'}{dt} + \gamma p(u'_x + v'_y) &= \tau \left[-\frac{c^4}{\gamma} (\rho'_{xx} + \rho'_{yy}) + c^2 (p'_{xx} + p'_{yy}) \right] + \\ &+ \tau \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + O(\tau^2). \end{aligned}$$

Аналогичная связь между соответствующими нелинейными системами уравнений отмечена в [13, 14].

Рассмотрим акустические волны в КГД системе. Оператором (6.5) уравнение (6.20) превращается в аналог (6.6). Все члены, берущие начало от $\partial^2 U / \partial t^2$, достаточно гибко трансформируются [1], делая коэффициентные матрицы почти диагональными. В остальном преобразования правой части повторяют случай уравнений Навье–Стокса (6.13). Замкнутое обобщенное волновое уравнение для давления принимает вид:

$$p'_{tt} - c^2(p'_{xx} + p'_{yy}) = 2\tau \left[\left(u^2 + \frac{\gamma+1}{\gamma} c^2 \right) p'_{xxt} + 2uv p'_{xyt} + \right. \\ \left. + \left(v^2 + \frac{\gamma+1}{\gamma} c^2 \right) p'_{yyt} - 2c^2(u p'_{xxx} + v p'_{xxy} + u p'_{xyy} + v p'_{yyy}) \right] + O(\tau^2).$$

Уравнение вихревой волны в КГД системе (6.20) записывается для переменной $w' = u'_y - v'_x$ и отличается от своего аналога (6.17) в уравнениях Навье–Стокса присутствием второй частной производной по времени:

$$\frac{dw'}{dt} = \tau \frac{c^2}{\gamma} (w'_{xx} + w'_{yy}) + \tau \frac{\partial^2 w'}{\partial t^2} + O(\tau^2).$$

Заменим указанный член с помощью формулы (6.2), в которой существенны только конвективные слагаемые, ввиду того что $w'_t = O(\tau)$. Получаем:

$$w'_t = \tau \left[(u^2 + c^2/\gamma) w'_{xx} + 2uv w'_{xy} + (v^2 + c^2/\gamma) w'_{yy} \right] + O(\tau^2). \quad (6.22)$$

Уравнение энтропийной волны в КГД системе (6.20) выводится на основе тех же приемов, которые использовались для уравнений (6.18) и (6.22). Оно записывается для переменной

$$w' = c^2 \rho' - p' - \tau(\gamma-1)p(u'_x + v'_y)$$

и совпадает с (6.22).

В одномерном случае волновой оператор (6.21) можно представить как произведение операторов левой и правой волн, хотя ситуация отличается от уравнений Навье–Стокса (ср. (6.19)). Эффективная вязкость зависит от направления, поэтому будем искать разложение вида

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^+ \mathcal{L}^-, \quad \text{где } \mathcal{L}^+ \varphi = \varphi_t + c \varphi_x - \nu^+ \varphi_{xx}, \quad (6.23) \\ \mathcal{L}^- \varphi = \varphi_t - c \varphi_x - \nu^- \varphi_{xx}.$$

Подстановка (6.23) в (6.21) дает выражение

$$\nu^\pm = \tau \left((c \pm u)^2 + c^2/\gamma \right). \quad (6.24)$$

Итак, из уравнений Навье–Стокса (2.10) выведены уравнения акустических, энтропийной и вихревой волн (6.16)–(6.18), которые перепишем в неподвижной системе координат:

$$p'_{tt} + 2u p'_{xt} + 2v p'_{yt} - (c^2 - u^2) p'_{xx} + 2uv p'_{xy} - (c^2 - v^2) p'_{yy} = \nu^* (p'_{xxt} + p'_{yyt} + u p'_{xxx} + v p'_{xyy} + u p'_{xyy} + v p'_{yyy}), \quad (6.25a)$$

$$w'_t + u w'_x + v w'_y = \frac{\nu}{\bar{\rho}} (w'_{xx} + w'_{yy}), \quad (6.25b)$$

$$\text{где } w' = c^2 \rho' - p' - \frac{\nu}{\bar{\rho}} (\gamma - 1) \rho (u'_x + v'_y),$$

$$w''_t + u w''_x + v w''_y = \nu (w''_{xx} + w''_{yy}), \quad \text{где } w'' = u'_y - v'_x. \quad (6.25b)$$

КГД система (2.11) дает следующие уравнения акустических и конвективных волн (6.21), (6.22):

$$p'_{tt} + 2u p'_{xt} + 2v p'_{yt} - (c^2 - u^2) p'_{xx} + 2uv p'_{xy} - (c^2 - v^2) p'_{yy} = 2\tau \left[\left(u^2 + \frac{\gamma+1}{\gamma} c^2 \right) p'_{xxt} + 2uv p'_{xyt} + \left(v^2 + \frac{\gamma+1}{\gamma} c^2 \right) p'_{yyt} + u \left(u^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma} c^2 \right) p'_{xxx} + v \left(3u^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma} c^2 \right) p'_{xxy} + u \left(3v^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma} c^2 \right) p'_{xyy} + v \left(v^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma} c^2 \right) p'_{yyy} \right], \quad (6.26a)$$

$$W'_t + u W'_x + v W'_y = \tau \left[(u^2 + c^2/\gamma) W'_{xx} + 2uv W'_{xy} + (v^2 + c^2/\gamma) W'_{yy} \right], \quad (6.26b)$$

где

$$W' = (c^2 \rho' - p' - \tau (\gamma - 1) p (u'_x + v'_y), \quad u'_y - v'_x).$$

Рассмотрим способ уточнения одномерных невязких неотражающих условий (4.9) и (4.10) для систем уравнений вязкой газодинамики. Начнем с уравнений Навье–Стокса. Условие на входе, аналогичное (4.9), следует из (6.19):

$$\frac{\partial U}{\partial t} - (c-u) \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\nu^*}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \quad (6.27)$$

Условие на выходе должно описывать свободное прохождение трех волн: правой акустической, энтропийной и вихревой. Задача облегчается тем, что в одномерном случае вихревая волна переносит исключительно скорость v' , а остальные волны – только величины $\bar{U} = (\rho' \ u' \ p')^T$.

Ориентируясь на (6.12), составим следующее граничное условие на выходе:

$$\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_3 \tilde{U} = 0, \quad \mathcal{L}_4 v'_x = 0, \quad (6.28)$$

где (см. (6.19), (6.25б), (6.25в))

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 \varphi &= \varphi_t + (c+u) \varphi_x - \frac{\nu^*}{2} \varphi_{xx}, & \mathcal{L}_3 \varphi &= \varphi_t + u \varphi_x - \frac{\nu}{\text{Pr}} \varphi_{xx}, \\ \mathcal{L}_4 \varphi &= \varphi_t + u \varphi_x - \nu \varphi_{xx}. \end{aligned}$$

Перейдем в лагранжевы координаты, в которых

$$\mathcal{L}_1 \varphi = \varphi_t + c \varphi_x - 0.5 \nu^* \varphi_{xx}, \quad \mathcal{L}_3 \varphi = \varphi_t - \frac{\nu}{\text{Pr}} \varphi_{xx}, \quad \mathcal{L}_4 \varphi = \varphi_t - \nu \varphi_{xx},$$

и преобразуем первое уравнение (6.28), пренебрегая, по условию (iv), членами $O(\nu^2)$. Для замены второй производной по времени будем использовать одномерное следствие (6.13) типа (6.6) и одномерный вариант уравнения давления (6.16). В результате из (6.28) получим:

$$\begin{aligned} c \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial x} + \hat{C}_x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{\nu^*}{2} + \frac{\nu}{\text{Pr}} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \nu D_{xx}^{NS} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right] + \\ &+ \nu \frac{c}{\text{Pr}} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \nu \hat{C}_x D_{xx}^{NS} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}, \end{aligned} \quad (6.29a)$$

$$c p'_{xt} + c^2 p'_{xx} = \left(\frac{\nu}{\text{Pr}} - 0.5 \nu^* \right) p'_{xxt} + \nu \frac{c}{\text{Pr}} p'_{xxx}, \quad (6.29б)$$

где в системе (6.29a) берутся только первое и второе уравнения.

Граничные условия (6.29) являются неотражающими по отношению к правой акустической и энтропийной волнам, однако с точки зрения численной реализации правые части (6.29a) слишком сложны. Их можно упростить, делая поэлементные замены, как и при выводе уравнения давления (6.16). С этой целью воспользуемся соотношениями

$$\rho c u'_{xxx} = p'_{xxx} + O(\nu), \quad c \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\hat{C}_x^2 \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + O(\nu),$$

последнее из которых напрямую следует из граничного условия (6.29a), а первое – отсюда же, но с учетом исходного уравнения (6.13). В итоге заменяем (6.29) и оставляем прежним уравнение (6.28) для v' :

$$\begin{aligned} c \rho'_{xt} + p'_{xx} &= \nu \frac{c}{\text{Pr}} \rho'_{xxx} - \frac{\nu}{c} \left(\frac{\gamma+1}{2\text{Pr}} - \frac{2}{3} \right) p'_{xxx}, \\ u'_{xt} + c u'_{xx} &= -\frac{\nu c}{\rho \text{Pr}} \rho'_{xxx} + \nu \left(\frac{\gamma+1}{2\text{Pr}} + \frac{2}{3} \right) u'_{xxx}, \end{aligned}$$

$$p'_{xt} + c p'_{xx} = 0.5 \nu^* p'_{xxx},$$

$$v'_{xt} = \nu v'_{xxx}.$$

Переходя в неподвижную систему координат и убирая "лишнее" дифференцирование по x , получаем неотражающее условие на выходе для уравнений Навье–Стокса:

$$\begin{aligned} c \rho'_t + cu \rho'_x + p'_x &= \nu \frac{c}{P\Gamma} \rho'_{xx} - \frac{\nu}{c} \left(\frac{\gamma+1}{2P\Gamma} - \frac{2}{3} \right) p'_{xx}, \\ u'_t + (c+u) u'_x &= -\frac{\nu c}{\rho P\Gamma} \rho'_{xx} + \nu \left(\frac{\gamma+1}{2P\Gamma} + \frac{2}{3} \right) u'_{xx}, \\ v'_t + u v'_x &= \nu v'_{xx}, \quad p'_t + (c+u) p'_x = 0.5 \nu^* p'_{xx}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Граничные условия (6.27) и (6.30) содержат в правых частях вторые производные только по x . Однако устойчивые вычислительные алгоритмы получаются при использовании другого варианта вязких членов [1, 2], где присутствуют также смешанные производные. С помощью левой части уравнения (6.27) изменим его правую часть и придем к неотражающему условию на входе

$$\frac{\partial U}{\partial t} - (c-u) \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\nu^*}{c-u} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + \frac{\nu^*}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0. \quad (6.31)$$

Тем же способом преобразуем (6.30) и получим неотражающее условие на выходе

$$\begin{aligned} c \rho'_t + cu \rho'_x + p'_x + 2 \frac{\nu c}{u P\Gamma} \rho'_{xt} + \nu \frac{c}{P\Gamma} \rho'_{xx} + \\ + \frac{\nu}{c} \left(\frac{2c}{u P\Gamma} + \frac{\gamma+1}{2P\Gamma} - \frac{2}{3} \right) p'_{xx} &= 0, \\ u'_t + (c+u) u'_x + \frac{\nu c}{\rho P\Gamma} \rho'_{xx} + \nu \left(\frac{\gamma+1}{2P\Gamma} + \frac{2}{3} \right) \left[\frac{2}{c+u} u'_{xt} + u'_{xx} \right] &= 0, \\ v'_t + u v'_x + 2 \frac{\nu}{u} v'_{xt} + \nu v'_{xx} &= 0, \\ p'_t + (c+u) p'_x + \frac{\nu^*}{c+u} p'_{xt} + \frac{\nu^*}{2} p'_{xx} &= 0. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Выпишем одномерные неотражающие условия для КГД системы, которые следуют из (6.23), (6.24), (6.26) и выводятся по образцу навье-стоксовского случая (6.31), (6.32). Условие на входе:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - (c-u) \frac{\partial U}{\partial x} + \tau \left((c-u)^2 + c^2/\gamma \right) \left(\frac{2}{u-c} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (6.33)$$

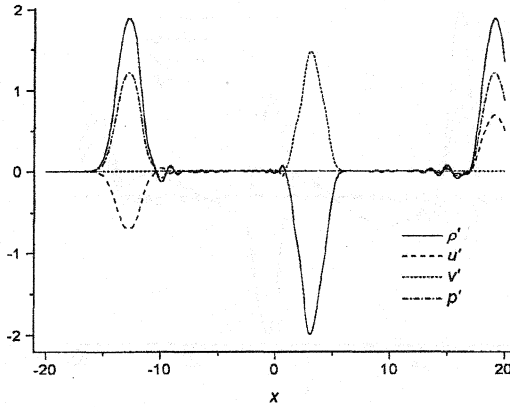


Рис. 1. Возмущения в течении с постоянным фоном: $t = 20$

Условие на выходе:

$$\begin{aligned}
 & c\rho'_t + cu\rho'_x + p'_x + \tau c(c^2/\gamma + u^2)(2u^{-1}\rho'_{xt} + \rho'_{xx}) + \\
 & \quad + \tau c\left(\frac{2c}{\gamma u} - 1\right)p'_{xx} = 0, \\
 & u'_t + (c+u)u'_x + \frac{\tau c^3}{\gamma\rho}\rho'_{xx} + \tau(u^2 + 2cu + \frac{\gamma+2}{\gamma}c^2)\left[\frac{2}{c+u}u'_{xt} + u'_{xx}\right] = 0, \\
 & v'_t + uv'_x + \tau(c^2/\gamma + u^2)(2u^{-1}v'_{xt} + v'_{xx}) = 0, \quad (6.34) \\
 & p'_t + (c+u)p'_x + \tau\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}c^2 + u^2\right)\left[\frac{2}{c+u}p'_{xt} + p'_{xx}\right] = 0.
 \end{aligned}$$

7. Расчеты тестовых задач

Свойства неотражающих граничных условий для одномерных линеаризованных уравнений Эйлера (3.18) проверялись на примере расчета следующей задачи. Рассматривается эволюция локального возмущения на фоне энтропийно-вихревой волны

$$\bar{u} = u_0, \quad \bar{p} = p_0 \equiv \rho_0 c_0^2/\gamma, \quad \bar{\rho} = f(x - u_0 t), \quad \bar{v} = g(x - u_0 t), \quad (7.1)$$

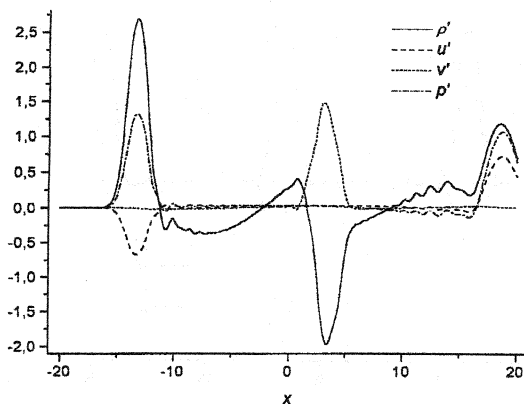


Рис. 2. Возмущения в течении с $\bar{\rho}$, \bar{v} переменными: $t = 20$

где

$$f(\xi) = \rho_0 [1 + A \sin a\xi], \quad g(\xi) = u_0 B \sin b\xi, \quad (7.2)$$

с числом Маха $M \equiv u_0/c_0 = 0.2$. Начальное возмущение $U(x, 0) = \tilde{U}_0 h(x)$, где

$$\tilde{U}_0 = (\rho_0 \quad 0 \quad 2c_0 \quad 2\gamma p_0)^T, \quad h(x) = \begin{cases} 1 - |x/\Delta|, & -\Delta \leq x \leq \Delta, \\ 0, & |x| > \Delta. \end{cases}$$

Использовалось значение $\Delta = 2.13$. Выбрана расчетная область $x \in [-20, 20]$ с равномерной сеткой из 300 узлов. Константы в (7.2): $a = 0.3$, $b = 2/9$. В основе алгоритма лежит схема для линеаризованных уравнений Эйлера (2.7) с квазигазодинамическим регуляризатором и аппроксимацией по времени с весом $1/2$ по образцу [15]:

$$(PU)_t + (A_x U)_{\bar{x}}^{(1/2)} = (\tau (B_{xx} U)_{\bar{x}})_x^{(1/2)},$$

где (см. (2.11)) матрица $B_{xx} = PD_{xx}$ и употребляются стандартные индексные обозначения разностных операторов. Параметр $\tau \approx 10^{-3}$ дает эффективное число Рейнольдса $Re \sim 10^4$.

Моделировалось распространение волн четырех видов как для случая постоянного фонового течения (в (7.2) задано $A = B = 0$), так

и для периодического случая ($A = B = 0.3$). Рисунки 1 и 2 показывают, что решения при однородном и неоднородном фоне еще до возможного появления отраженных волн существенно различаются. Фоновое течение (7.1), (7.2) таково, что акустические волны возмущений возбуждают энтропийную (ρ') и вихревую (v') волны, но, впрочем, квазипериодические – с основным периодом, совпадающим с периодом f и g соответственно.

Исследовались два варианта граничных условий: (4.9) и (4.10) на входе и выходе соответственно, т.е. условия, неотражающие при постоянном течении, а также (5.11) на входе и (5.2) на выходе. В последнем случае учитывался тот факт, что фоновое течение (7.1) содержит волны, входящие через левую границу, а на правой границе входящих волн нет. При постоянном фоне указанные пары граничных условий эквивалентны и практически безукоризненно пропускают через границы любые выходящие волны. Остановимся на случае периодического фона.

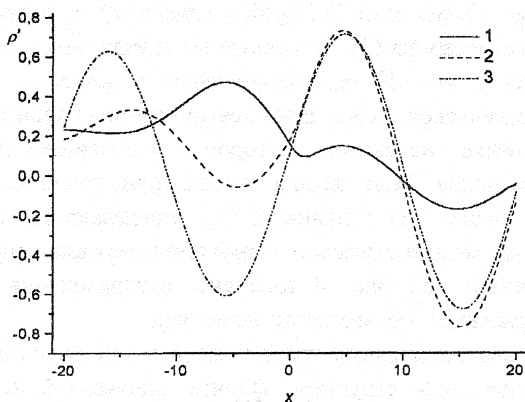


Рис. 3. Возмущение плотности в непостоянном течении: $t = 160$

Пространственные распределения возмущения плотности ρ' в момент времени, когда начальные конфигурации акустических и конвективных волн покинули область, изображены на рис. 3. Сравниваются результаты расчетов с применением граничных условий

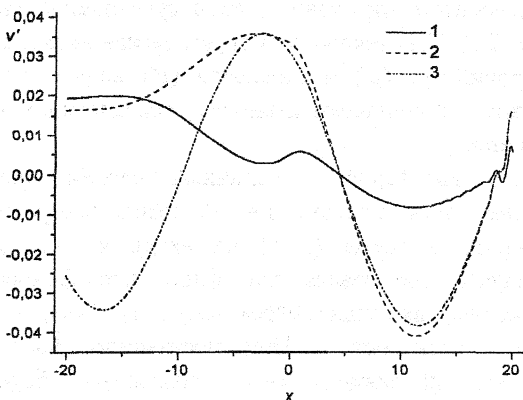


Рис. 4. Возмущение вертикальной скорости в непостоянном течении:
 $t = 160$

(4.9), (4.10) (цифра 1), условий (5.11), (5.2) (цифра 2), а также расчета в области удвоенного размера (3). В последнем случае энтропийная волна от левой границы $x = -40$ еще не достигла точки $x = -20$. При прохождении акустической волны через левую границу волна возмущения плотности испытывает искажение, которое в дальнейшем переносится течением. Нарушение фазы волны велико при граничном условии (4.9) и гораздо слабее при условии (5.11), учитывающем рефракцию. Аналогичные слова можно сказать о возмущении вертикальной скорости v' (вихревой волне): на рис. 4 показаны распределения v' в трех вышеуказанных расчетах (обозначения такие же).

Для исследования влияния граничных условий на вязкие течения проведено моделирование структуры фронта одномерной неподвижной ударной волны с помощью квазигазодинамической системы (2.3). Параметры газа взяты из [16], в частности, число Маха перед фронтом $M = 5$, показатель адиабаты $\gamma = 5/3$. Основные расчеты выполнялись в области $x \in [-20, 20]$ на равномерной сетке в 180 узлов.

Профили плотности ρ в установившемся течении представлены на рис. 5. В начальный момент времени задается разрыв всех параметров в точке $x = 0$ и их постоянные значения слева (ρ_0, u_0, p_0) и

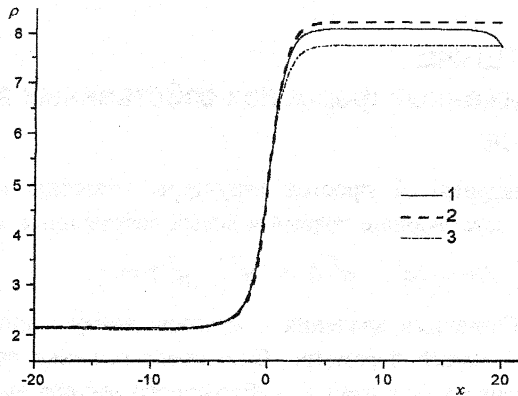


Рис. 5. Плотность во фронте ударной волны

справа (ρ_1, u_1, p_1), рассчитанные по соотношениям Гюгонио. Поскольку левая граница – сверхзвуковой вход, на ней фиксируются параметры невозмущенного течения. На правой границе (дозвуковом выходе) тестировались различные варианты граничных условий. Условия Дирихле (задание всех величин; цифра 1) сравнивались с вязкими неотражающими условиями (6.34) (цифра 2), адаптированными к нелинейным уравнениям по принципу (4.1). В первом случае, несмотря на жесткую фиксацию плотности на границе, в ближайшей же ее окрестности ρ перестраивается на другое значение. При "свободном" неотражающем условии (6.34) плотность отклоняется на величину того же порядка, тогда как давление p и скорость u почти равны p_1 и u_1 .

На рис. 5 приведен также профиль плотности (3) в расчете на расширенной области $x \in [-40, 40]$, где использовалось продолжение той же равномерной сетки и невязкий вариант неотражающих условий на выходе (4.12). За пределами зоны основного перехода совпадение ρ с точными значениями почти полное. При расчете с условиями (4.12) в области базового размера профиль плотности неотличим от вязкого случая (6.34). Существенная разница проявляется во времени установления стационарного решения: эти времена в расчетах с условиями Дирихле, (4.12) и (6.34) соотносятся примерно как 5 : 2 : 1.

Автор выражает благодарности И.В. Абалакину и Б.Н. Четверушкину за полезные дискуссии и поддержку.

ПРИЛОЖЕНИЕ.

О приближенных формулах собственных значений и векторов

Пусть у матрицы A простой структуры известны собственное значение λ и соответствующие правый и левый собственные векторы:

$$Ax = \lambda x, \quad y^T A = \lambda y^T, \quad y^T x = 1. \quad (\text{A.1})$$

Будем искать собственные значения и векторы возмущенной матрицы $A + \varepsilon A'$, где ε – малый параметр. Ожидаемое решение разложим по степеням ε , в частности, для правого собственного вектора имеем

$$\begin{aligned} (A + \varepsilon A')(x + \varepsilon x' + \varepsilon^2 x'' + \dots) &= \\ &= (\lambda + \varepsilon \lambda' + \varepsilon^2 \lambda'' + \dots)(x + \varepsilon x' + \varepsilon^2 x'' + \dots). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Приравнявая в (A.2) коэффициенты при ε^1 , получаем систему для нахождения поправки первого приближения x' :

$$(A - \lambda I)x' = (\lambda' I - A')x. \quad (\text{A.3})$$

Матрица системы (A.3), как видно из (A.1), – вырожденная. Поэтому решение (A.3) существует при условии ортогональности правой части решению однородной сопряженной системы, т.е. вектору y :

$$y^T(\lambda' I - A')x = 0.$$

Отсюда (см. (A.1)) находим

$$\lambda' = y^T A' x, \quad (\text{A.4})$$

и система (A.3) превращается в

$$(A - \lambda I)x' = [(y^T A' x) I - A'] x. \quad (\text{A.5})$$

Вектор x' определяется неоднозначно, но многообразие решений (A.5) сводится к произволу в задании собственного вектора x невозмущенной матрицы (A.1). Аналогично поправка первого приближения левого собственного вектора y' есть решение

$$(y')^T (A - \lambda I) = y'^T [(y^T A' x) I - A']. \quad (\text{A.6})$$

Рассмотрим теперь случай, когда λ является кратным собственным значением матрицы A (для простоты – кратности 2). Это означает, что, помимо (A.1), существуют такие векторы v и z , что

$$Av = \lambda v, \quad z^T A = \lambda z^T, \quad z^T x = 0, \quad y^T v = 0, \quad z^T v = 1. \quad (\text{A.7})$$

Поскольку собственное значение возмущенной матрицы может перестать быть кратным, необходим правильный выбор собственных векторов A . Система (A.3) предъявляет второе требование ортогональности

$$z^T (\lambda' I - A') x = 0,$$

которое, в силу (A.7), дает условие

$$z^T A' x = 0. \quad (\text{A.8})$$

Ему должны удовлетворять векторы x и z – в противном случае их всегда можно выбрать так, чтобы выполнялось (A.1), (A.7) и (A.8).

Приравнивая в (A.2) коэффициенты при ε^2 , получаем систему для нахождения второго приближения

$$(A - \lambda I) x'' = (\lambda' I - A') x' + \lambda'' x.$$

Второе приближение само по себе нас не интересует, но условием разрешимости выписанной системы будет

$$z^T [(\lambda' I - A') x' + \lambda'' x] = 0.$$

Последнее, с учетом (A.4) и (A.7), эквивалентно

$$z^T [(y^T A' x) I - A'] x' = 0. \quad (\text{A.9})$$

Таким образом, поправка первого приближения в случае кратного λ есть решение расширенной системы (A.5), (A.9). Аналогично поправка левого собственного вектора находится при условии

$$y^T A' v = 0$$

из системы (A.6) и

$$(y')^T [(y^T A' x) I - A'] v = 0.$$

Литература

1. Дородницын Л.В. Акустические волны и граничные условия в моделях вязких дозвуковых течений: Препринт. – М.: Диалог-МГУ, 1999, 28 с.

2. Дородницын Л.В. Акустика в моделях вязких дозвуковых течений и неотражающие граничные условия // Прикладная математика и информатика, N 3 – М.: Диалог-МГУ, 1999, с.43– 64.
3. Дородницын Л.В. Акустические свойства непрерывных и дискретных газодинамических моделей // Прикладная математика и информатика, N 6 – М.: МАКС Пресс, 2000, с.39– 62.
4. Четверушкин Б.Н. Кинетически-согласованные схемы в газовой динамике: новая модель вязкого газа, алгоритмы, параллельная реализация, приложения. – М.: Изд-во МГУ, 1999.
5. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. – М.: Мир, 1981.
6. Блохинцев Д.И. Акустика неоднородной движущейся среды. – М.: Наука, 1981.
7. Giles M.B. Nonreflecting boundary conditions for Euler equation calculations // AIAA J., 1990, v.28, N 12, pp.2050– 2058.
8. Рябенький В.С. Точный перенос краевых условий // Вычислительная механика деформируемого твердого тела, 1990, вып.1, с.129– 145.
9. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – М.: Наука, 1978.
10. Hedstrom G.W. Nonreflecting boundary conditions for nonlinear hyperbolic systems // J. Comp. Phys., 1979, v.30, N 2, pp.222– 237.
11. Thompson K.W. Time-dependent boundary conditions for hyperbolic systems // J. Comp. Phys., 1990, v.89, N 2, pp.439– 461.
12. Nicoud F. Defining wave amplitude in characteristic boundary conditions // J. Comp. Phys., 1999, v.149, N 2, pp.418– 422.
13. Граур И.А., Дородницын Л.В., Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н. Кинетически-согласованные схемы газовой динамики с неполной коррекцией: Препринт N 5. – М.: ИПМатем. АН СССР, 1987, 21 с.
14. Елизарова Т.Г., Шеретов Ю.В. Инвариантный вид и асимптотические свойства обобщенной квазигазодинамической системы // ЖВМ и МФ, 1991, т.31, N 7, с.1042– 1050.
15. Дородницын Л.В., Четверушкин Б.Н. Об одной неявной схеме для моделирования дозвукового течения газа // Матем. моделирование, 1997, т.9, N 5, с.108– 118.
16. Граур И.А., Елизарова Т.Г., Шеретов Ю.В. Расчет структуры неподвижной ударной волны на основе квазигазодинамических уравнений: Препринт N 42. – М.: ВЦММ РАН, 1992, 20 с.