

Акустические свойства непрерывных и дискретных газодинамических моделей

1. Введение

Работа посвящена проблемам, возникающим при численном моделировании дозвуковых внешних течений. Неприятной особенностью многих применяемых методов являются нефизичные высокочастотные осцилляции газодинамических параметров, и притом во всей расчетной области. Чем ниже характерное число Маха, тем сильнее эти колебания влияют на общий вид решения. Кроме того, встречаются локальные искажения картины течения, в основном вблизи границ области.

Рассмотрим в общем виде задачу о дозвуковом внешнем течении газа в плоской постановке. Можно выделить два класса задач: обтекания твердых тел (рис. 1) и течения типа струи или слоя смешения (рис. 2). В физической постановке параметры внешнего потока необходимо задать на бесконечном удалении от зоны взаимодействия. Для численного моделирования, как правило, используется область конечных размеров, в простейшем случае прямоугольник. Возникает проблема переноса параметров внешнего потока на границы новой области, называемые *искусственными границами*.

Детализируем процедуру перехода от изначальной нестационарной задачи к ее конечно-разностной аппроксимации. В исходной постановке задается система четырех дифференциальных уравнений газовой динамики на всей плоскости или, в крайнем случае, полуплоскости (в область не входит обтекаемое тело (рис. 1), генератор струи или участок с разделенными потоками (рис. 2)). Обозначим физическую область символом Ω . Для уравнений ставятся начальные условия, граничные условия на поверхности тела (если таковое есть), на входной границе (для области, ограниченной слева) и на бесконечности. Следующий шаг: задаются те же дифференциальные уравнения и начальные условия, но в ограниченной области $\Omega' \subset \Omega$; физические граничные условия и условия на четырех сторонах прямоугольника — искусственные граничные условия. Наконец, проводится дискретизация уравнений четырех перечисленных групп на основе принципов, инди-видуальных для каждой группы.

Уже на стадии переноса задачи, поставленной в исходной области Ω , в ограниченную подобласть Ω' возникают искажения решения задачи.

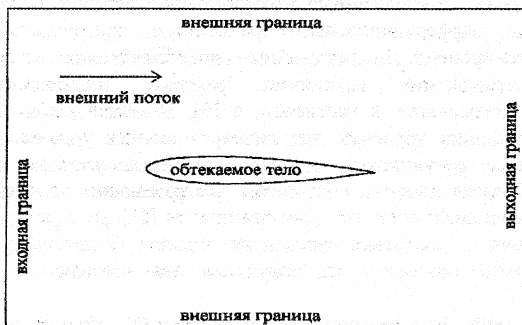


Рис. 1. Схема расчетной области в задаче обтекания тела

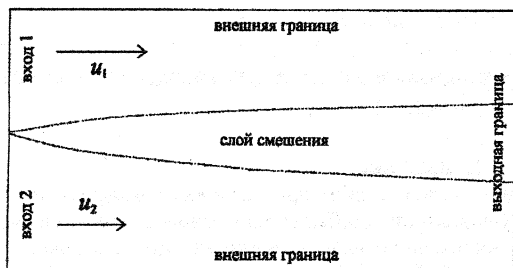


Рис.2. Схема расчетной области в задаче о слое смещения

Как отмечалось в [1, 2], наиболее неприятны волнообразные, осцилляционные эффекты, проявляющиеся практически во всей расчетной области. Основная причина такого поведения решения заключается в следующем.

Зона взаимодействия постоянно генерирует возмущения, обычно малые, которые не уходят в бесконечность, а в той или иной степени отражаются от искусственных границ. В результате внутри области накапливаются возмущения. При низких числах Маха осцилляции скорости становятся сравнимыми с характерным значением самой скорости. Трудности усугубляются, когда проводится моделирование задач аэроакустики и необходимо отличать физические колебания от нефизических.

Амплитуда и характер колебаний зависят от выбранной газодинамической модели. Для невязкого газа могут использоваться уравнения Эйлера, для вязкого теплопроводного газа — уравнения Навье–Стокса, а также квазигазодинамическая система уравнений, подробно рассмотренная в книге [3]. Теоретически и экспериментально установлено, что при моделировании пограничного слоя уравнения Навье–Стокса и квазигазодинамическая система сходны, если их диссипативные параметры согласованы. Вместе с тем, расчеты, проведенные в [4], показывают, что осцилляции решения, которые появляются в квазигазодинамической системе, слабее присущих уравнениям Навье–Стокса. Наконец, важную роль играет разностная аппроксимация уравнений.

Цель настоящей работы — анализ волн, существующих в рамках заданных газодинамических моделей, и построение условий свободного прохождения этих волн через искусственные границы. Такого типа условия известны давно и носят название *неотражающих граничных условий*. Точные неотражающие условия возможны только для линейных систем уравнений и представляют собой, как правило, нелокальные псевдодифференциальные уравнения. Приближенные неотражающие условия могут быть алгебраическими или, чаще, дифференциальными уравнениями, содержащими производные по пространству и по времени. Для нелинейных гиперболических систем строится разновидность неотражающих граничных условий, называемых характеристическими: о них рассказывается, в частности, в [5]. Имеется довольно обширная литература о неотражающих условиях для линеаризованных уравнений Эйлера [6]–[9]. Гораздо меньше результатов, относящихся исключительно к уравнениям Навье–Стокса [10]. Первая попытка построения неотражающих условий специально для квазигазодинамической системы предпринята в [1]. Дискретные неотражающие граничные условия — наименее изведанная область. В литературе [6, 11, 12, 13] пока не выработаны принципы их получения для всевозможных разностных схем.

Обсудим постановку условий на искусственных границах Ω' . Количество граничных условий для гиперболической системы уравнений Эйлера [5] должно равняться числу волн (т.е. характеристик), входящих через данную границу в область

(от 0 до 4). Для уравнений Навье–Стокса, относящихся к непольностью параболическим системам [14], требуется от трех до четырех условий на границе. Для квазигазодинамической системы необходимо 4 условия на каждой границе. Что касается разностных аппроксимаций уравнений газовой динамики, то здесь граничные условия чрезвычайно специфичны по числу и характеру. Для линейных систем уравнений существует более общий подход к определению числа граничных условий, чем характеристический. Связан он с анализом полного набора дисперсионных соотношений, которые, в отличие от характеристик, имеют смысл для любых систем уравнений, как дифференциальных, так и разностных. Аппаратом исследования объекта является преобразование Фурье.

В данной работе будут обсуждаться как общие принципы построения неотражающих граничных условий, так и конкретные их примеры. Внимание будет уделено специфике различных дифференциальных газодинамических систем и их конечно-разностных аппроксимаций. Свойства граничных условий будут исследоваться численно на примере моделирования полной нелинейной задачи обтекания.

2. Линеаризованные уравнения газовой динамики

Пусть физические параметры удовлетворяют основным газодинамическим уравнениям. Нас будут интересовать уравнения, справедливые для малых возмущений этих параметров.

Различные системы уравнений газовой динамики в двумерной плоской геометрии представимы в следующем векторном виде:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y}. \quad (2.1)$$

Здесь

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E + p) \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{pmatrix}.$$

Q — вектор консервативных переменных; F и G — конвективные потоки; R и S — диффузионные (диссипативные, вязкие) потоки, которые в случае уравнений Эйлера равны нулю, а в уравнениях Навье–Стокса и в квазигазодинамической системе содержат дифференциальные выражения [1, 2], специфичные для каждой из названных моделей.

Из системы (2.1) следуют приближенные уравнения для вектора U возмущений примитивных переменных (плотности, двух составляющих скорости и давления)

$$(\rho u v p)^T = (\bar{\rho} \bar{u} \bar{v} \bar{p})^T + U, \quad U = (\rho' u' v' p')^T.$$

Эти уравнения линейны относительно возмущений U . Линеаризация трех систем вида (2.1) выполнена в [1, 2] и основана на нижеперечисленных предположениях:

- (i) основные уравнения справедливы для фоновых величин;
- (ii) члены $O(U^2)$ несут существенны;
- (iii) фоновые параметры изменяются плавно по сравнению с возмущениями (принцип замороженных коэффициентов).

Последний принцип означает, что любые производные от фоновых параметров пренебрежимо малы в сравнении с производными их возмущений. На практике это дает возможность выносить коэффициенты из-под знака дифференцирования.

Линеаризованные уравнения Эйлера имеют вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + C_x \frac{\partial U}{\partial x} + C_y \frac{\partial U}{\partial y} = 0. \quad (2.2)$$

Здесь участвуют коэффициентные матрицы $C_x = \hat{C}_x + \bar{u}I$, $C_y = \hat{C}_y + \bar{v}I$, где I — единичная матрица,

$$\hat{C}_x = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\bar{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\gamma}\bar{\rho} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{C}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\bar{\rho} \\ 0 & 0 & \bar{\gamma}\bar{\rho} & 0 \end{pmatrix},$$

Линеаризованная квазигазодинамическая система отличается от аналогичной системы Эйлера наличием правой части:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + C_x \frac{\partial U}{\partial x} + C_y \frac{\partial U}{\partial y} = \tau \left(D_{xx} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2D_{xy} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + D_{yy} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right), \quad (2.3)$$

где τ — характерное время между столкновениями молекулы [3]. Матрицы в правой части (2.3) таковы:

$$D_{xx} = \begin{pmatrix} \bar{u}^2 & 2\bar{\rho}\bar{u} & 0 & 1 \\ 0 & \bar{u}^2 + 3\bar{\rho}/\bar{\rho} & 0 & 2\bar{u}/\bar{\rho} \\ 0 & 0 & \bar{u}^2 + \bar{\rho}/\bar{\rho} & 0 \\ -\bar{c}^4/\gamma & 2\bar{\gamma}\bar{\rho}\bar{u} & 0 & \bar{u}^2 + 2\bar{c}^2 \end{pmatrix},$$

$$D_{xy} = \begin{pmatrix} \bar{u}\bar{v} & \bar{\rho}\bar{v} & \bar{\rho}\bar{u} & 0 \\ 0 & \bar{u}\bar{v} & \bar{\rho}/\bar{\rho} & \bar{v}/\bar{\rho} \\ 0 & \bar{\rho}/\bar{\rho} & \bar{u}\bar{v} & \bar{u}/\bar{\rho} \\ 0 & \bar{\gamma}\bar{\rho}\bar{v} & \bar{\gamma}\bar{\rho}\bar{u} & \bar{u}\bar{v} \end{pmatrix},$$

$$D_{yy} = \begin{pmatrix} \bar{v}^2 & 0 & 2\bar{\rho}\bar{v} & 1 \\ 0 & \bar{v}^2 + \bar{\rho}/\bar{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{v}^2 + 3\bar{\rho}/\bar{\rho} & 2\bar{v}/\bar{\rho} \\ -\bar{c}^4/\gamma & 0 & 2\bar{\gamma}\bar{\rho}\bar{v} & \bar{v}^2 + 2\bar{c}^2 \end{pmatrix},$$

где \bar{c} — невозмущенная скорость звука: $\bar{c}^2 = \gamma\rho/\rho$.

Наконец, выпишем линеаризованные уравнения Навье–Стокса:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + C_x \frac{\partial U}{\partial x} + C_y \frac{\partial U}{\partial y} = \nu \left(D_{xx}^{NS} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2D_{xy}^{NS} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + D_{yy}^{NS} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right), \quad (2.4)$$

где ν — коэффициент кинематической вязкости, матрицы

$$D_{xx}^{NS} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\bar{c}^2 / \text{Pr} & 0 & 0 & \gamma / \text{Pr} \end{pmatrix}, \quad D_{xy}^{NS} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_{yy}^{NS} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 0 \\ -\bar{c}^2 / \text{Pr} & 0 & 0 & \gamma / \text{Pr} \end{pmatrix},$$

Pr — число Прандтля. Существует связь между диссипативными параметрами квазигазодинамической системы и уравнений Навье–Стокса

$$\gamma \nu = \bar{c}^2. \quad (2.5)$$

Линейные системы уравнений (2.2), (2.3), (2.4) будем анализировать с точки зрения свойств описываемых ими волн. О математической корректности исследования можно говорить только в случае постоянных коэффициентных матриц. Иными словами, предполагается постоянное фоновое течение, которое по сути и отвечает принципу (iii). Результаты предстоит использовать для построения искусственных граничных условий. Последние могут применяться для исходных нелинейных систем уравнений или же — при решении задач аэроакустики — для систем уравнений, линейных относительно возмущений, с переменными коэффициентами.

О технологии решения аэроакустических проблем следует сказать особо. Один из простейших способов заключается в следующем.

- Вначале рассчитывается задача в терминах нелинейных газодинамических уравнений на относительно грубой сетке.

- Параметры, полученные в предыдущем расчете, используются в качестве фона для расчета линеаризованных уравнений, который выполняется на более подробной сетке и дает возможность судить о характере распространения возмущений.

В процедуре существуют некоторые нюансы. Как правило, после выполнения первого этапа проводится выявление возможных источников колебаний: их местонахождения, частоты и интенсивности; в результате уравнения пульсаций могут содержать источникные члены. Кроме того, последовательность двух этапов может повторяться в итерационном режиме. Заметим также, что нелинейная и линеаризованная модели не обязательно основаны на одних и тех же газодинамических уравнениях.

Актуальность проблемы искусственных граничных условий бесспорна как на первом, так и на втором этапе решения сложных задач. Однако требования, предъявляемые к граничным условиям в двух ситуациях, существенно различаются. В целом для нелинейной задачи важны не только отражающие свойства уравнений на

границе, но и другие показатели, например, балансы потоков параметров через границы. В линейной задаче тоже есть проблемы, связанные с неоднородностью внешнего поля и, особенно, с возможными колебательными источниками (в данной работе источниковые члены уравнений рассматриваться не будут). Но волновые свойства выдвигаются в линейном случае на первый план.

Неотражающие граничные условия будут представлять собой линейные алгебраические либо дифференциальные уравнения относительно возмущений U с коэффициентами, зависящими от фоновых параметров. При решении нелинейной газодинамической задачи необходимо переформулировать эти условия в терминах исходных физических величин. Принципы линеаризации уравнений, декларированные в начале параграфа, легко решают данную проблему. Малость возмущений (ii) позволяет принять в качестве фона текущие локальные значения параметров. Производные возмущений, в силу (iii), можно отождествить с производными самих параметров, как и поступают большинство разработчиков неотражающих граничных условий.

3. Волны в системах линейных уравнений

Исследуя поведение среды, будем опираться на гипотезу, что общее решение системы линеаризованных уравнений газовой динамики представляется в виде разложения по гармоническим волнам. Полагаем, что внутри области Ω' присутствуют незатухающие источники колебаний, волны от которых распространяются с определенными скоростями и достигают границ расчетной области. Вблизи искусственных границ и за пределами области нет источников, поэтому любые волны, движущиеся от границ внутрь области, не имеют физических оснований. Необходимо выяснить для конкретной системы уравнений, какие волны в принципе возможны в ней, и поставить граничные условия, запрещающие появление нефизичных волн.

Начнем с простейшего примера системы дифференциальных уравнений: линеаризованных уравнений Эйлера (2.2) в пространственно одномерном случае

$$\frac{\partial U}{\partial t} + C_x \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \quad (3.1)$$

Будем искать вектор U — частное решение уравнения (3.1) — в виде гармонической волны

$$U = \hat{U} \exp\{i\omega t - ikx\}, \quad \omega \in \mathbf{R}, \quad k \in \mathbf{C}. \quad (3.2)$$

Здесь ω — частота, которая из физических соображений считается вещественной, k — волновое число, в общем случае комплексное.

Решение (3.1) вида (3.2) должно удовлетворять уравнению

$$(kC_x - \omega I) \hat{U} = 0, \quad (3.3)$$

представляющему собой спектральную задачу: ω является собственным значением, а \hat{U} — собственным вектором. Легко видеть, что в данном случае собственные векторы не будут зависеть от параметра k .

Выпишем полный набор решений задачи (3.3). При этом требуется для произвольного ω определить соответствующее число k .

1. Акустическая волна, бегущая вправо:

$$\omega = (\bar{u} + \bar{c})k; \quad k_1 = \frac{\omega}{\bar{c} + \bar{u}}; \quad \hat{U}_1 = (\bar{\rho} \quad \bar{c} \quad 0 \quad \bar{p})^T.$$

2. Акустическая волна, бегущая влево:

$$\omega = (\bar{u} - \bar{c})k; \quad k_2 = -\frac{\omega}{\bar{c} - \bar{u}}; \quad \hat{U}_2 = (\bar{p} \quad -\bar{c} \quad 0 \quad \bar{p})^T.$$

$$3. \text{ Энтروпийная волна: } \omega = \bar{u}k; \quad k_3 = \omega/\bar{u}; \quad \hat{U}_3 = (\bar{p} \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T.$$

$$4. \text{ Вихревая волна: } \omega = \bar{u}k; \quad k_4 = k_3 = \omega/\bar{u}; \quad \hat{U}_4 = (0 \quad 0 \quad \bar{c} \quad 0)^T.$$

Таким образом, у задачи (3.3) имеется полный набор собственных векторов. Поэтому линейная комбинация четырех решений имеет вид (3.2)

$$U = a_1 \hat{U}_1 \exp[iat - ik_1 x] + a_2 \hat{U}_2 \exp[iat - ik_2 x] + (a_3 \hat{U}_3 + a_4 \hat{U}_4) \exp[iat - ik_3 x] \quad (3.4)$$

есть общее решение системы линеаризованных уравнений Эйлера (3.1) с фиксированной частотой ω . Матрица C_x представима в форме

$$C_x = U \Lambda U^{-1}, \quad \text{где } U U^{-1} = I,$$

$$U = (\hat{U}_1 \quad \hat{U}_2 \quad \hat{U}_3 \quad \hat{U}_4), \quad \Lambda = \text{diag}(\bar{u} + \bar{c}, \bar{u} - \bar{c}, \bar{u}, \bar{u}). \quad (3.5)$$

Рассмотрим теперь граничное условие для системы (3.1). Условия как на правой, так и на левой границах для простоты будем считать заданными в точке $x = 0$, поскольку нам предстоит исследовать каждую границу по отдельности. Пусть граничное условие линейно, однородно и имеет общий вид

$$L U|_{x=0} = 0. \quad (3.6)$$

Количество уравнений в (3.6) обозначим через n , причем $n \leq 4$. Из общего гармонического решения (3.4) дополнительное условие (3.6) выделяет определенное подмножество. Опишем процедуру его нахождения.

Обозначим образ Фурье оператора L для функции (3.2) через $\hat{L}(k, \omega)$. Последний представляет собой матрицу размерности $n \times 4$. Волны, удовлетворяющие уравнению (3.1) и граничному условию (3.6), представимы в виде линейной комбинации (3.4) с коэффициентами, являющимися решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} V a = 0, \quad \text{где } a = (a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4)^T, \\ V = (\hat{V}_1 \quad \hat{V}_2 \quad \hat{V}_3 \quad \hat{V}_4), \quad \hat{V}_j = \hat{L}(k_j, \omega) \hat{U}_j, \quad j = 1, \dots, 4. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Матрица V имеет размерность $n \times 4$.

Итак, имея заданное граничное условие для линеаризованных уравнений Эйлера, мы получаем возможность проверить его на применимость к описанию распространения волн. В идеале амплитуды волн, выходящих через границу, должны быть произвольны, а амплитуды входящих волн должны равняться нулю. Ниже мы изложим способы построения граничных операторов, удовлетворяющих такому критерию. Однако, как отмечалось в §2, не всегда идеальные неотражающие условия применимы к реальной задаче. Поэтому необходим инструмент исследования граничного условия, заданного наперед, а также его верификации с точки зрения отражающих свойств. Указанный подход будет особенно важен при построении дискретных граничных условий.

Пусть полученная для конкретного граничного условия (3.6) система (3.7) имеет нетривиальное решение, единственное с точностью до множителя. Будем считать граничное условие удовлетворительным, если найденные коэффициенты a_j при входящих волнах (3.4) равны нулю либо малы по сравнению с коэффициентами

при выходящих волнах. Однако обычны ситуации, когда (3.7) имеет только нулевое решение либо несколько линейно независимых решений. В таких случаях судить о качестве граничного условия можно на основании анализа характерного масштаба каждого коэффициента a_j , фигурирующего в системе (3.7).

Предположим, матрица V — квадратная невырожденная, т.е. у системы (3.7) существует только тривиальное решение. Можно рассмотреть возмущенную правую часть (3.7), что оправдывается с физической точки зрения, например, неоднородностью внешнего поля. Решение новой системы становится нетривиальным, и оценить относительные масштабы амплитуд a_j позволяет обратная матрица V^{-1} . Необходимо только учесть, что каждое из граничных уравнений (3.6) можно умножить на любое отличное от нуля число, чем создается произвол в определении матрицы V . В связи со сказанным алгоритм нахождения характерного масштаба коэффициентов a_j состоит из двух этапов:

- обезразмеривание каждой строки матрицы V на масштаб максимального ее элемента;
- выбор в качестве масштаба a_j размера наибольшего элемента в j -й строке матрицы V^{-1} .

Поставим теперь задачу построения идеально неотражающих условий для линеаризованной системы уравнений Эйлера. В качестве примера рассмотрим условия на дозвуковом выходе. На указанной границе возможна только одна входящая волна — левая акустическая. Ее амплитуда должна равняться нулю, а амплитуды остальных волн — произвольные, то есть в (3.4) коэффициенты $a_2 = 0$; a_1, a_3, a_4 — любые.

Данное требование налагает условия на матрицу V системы (3.7), представимые в виде

$$\begin{aligned} \rho \bar{c} u'_i - p'_i = 0, \quad \bar{v}'_2 \neq 0 \quad \text{или} \\ \begin{cases} \hat{L}(k_1, \omega) \hat{U}_1 = 0, \\ \hat{L}(k_3, \omega) \hat{U}_3 = 0, \\ \hat{L}(k_3, \omega) \hat{U}_4 = 0, \\ \hat{L}(k_2, \omega) \hat{U}_2 \neq 0, \end{cases} \quad \forall \omega. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Выписанная система уравнений является критерием, которому должен удовлетворять образ оператора L на выходной границе. Здесь мы имеем дело с обратной задачей, и притом нелинейной, поскольку априорный вид оператора L достаточно произволен. Если ограничиться локальными операторами, то $\hat{L}(k, \omega)$ может быть любым многочленом от k и ω . Как правило, авторы, которые изобретают неотражающие граничные условия, изначально рассматривают граничный оператор L конкретного вида и получают (в одномерном случае, на дозвуковом выходе) по существу частные случаи системы (3.8).

Первое семейство граничных условий, подлежащее нашему анализу, — это чисто алгебраические уравнения. В данном случае образ граничного оператора не зависит от параметров k, ω и совпадает с матрицей оператора: $\hat{L}(k, \omega) \equiv L$. Следовательно, требование на выходное условие (3.8) примет вид $L \hat{U}_j = \delta_{2,j}$, что равносильно уравнению

$$L = \check{U}_2, \quad \text{где} \quad U^{-1} = (\check{U}_1 \quad \check{U}_2 \quad \check{U}_3 \quad \check{U}_4)^T.$$

L равен второй строке матрицы U^{-1} или, с другой стороны, является левым собственным вектором матрицы C_x , отвечающим k_2^1 :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (c + u) p_x = 0$$

Таким образом, граничное условие на дозвуковом выходе представляется одним уравнением

$$\overline{\rho c} u' - p' = 0. \quad (3.9)$$

Условие (3.9) фактически получено в [9] для линеаризованных уравнений Эйлера, когда игнорируются потоки в направлении y , и — независимо — в [10] для линеаризованных уравнений Навье—Стокса, когда, вдобавок, опускаются вязкие члены.

Уравнение (3.9) можно продифференцировать по t либо по x . При этом образ граничного оператора умножится на $i\omega$ или на $(-ik)$, то есть полученные граничные условия останутся неотражающими. Выпишем указанные условия:

$$\overline{\rho c} u_t' - p_t' = 0, \quad (3.10a)$$

$$\overline{\rho c} u_x' - p_x' = 0. \quad (3.10b)$$

Нижними индексами для краткости обозначены производные по времени и по пространству. Если записать уравнение (3.10b) в терминах основных величин вместо возмущений, то получится известное так называемое характеристическое граничное условие на выходе [5] для нелинейных уравнений Эйлера:

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Рассмотрим второй подход к построению граничного оператора, удовлетворяющего критерию на дозвуковом выходе (3.8). Найдем такой оператор L , что

$$\widehat{L}(k_1, \omega) \equiv 0, \quad \widehat{L}(k_3, \omega) \equiv 0, \quad \widehat{L}(k_2, \omega) \neq 0. \quad (3.11)$$

Выписанные выражения справедливы для оператора

$$\widehat{L}(k, \omega) = (k - k_1)(k - k_3) I,$$

которому отвечает уравнение

$$(\omega - (\bar{c} + \bar{u})k)(\omega - \bar{u}k) \widehat{U} \equiv (\omega^2 - (\bar{c} + 2\bar{u})k\omega + \bar{u}(\bar{c} + \bar{u})k^2) \widehat{U} = 0, \quad (3.12)$$

дающее при обратном преобразовании Фурье

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\bar{c} + \bar{u}) \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + (\bar{c} + 2\bar{u}) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + \bar{u}(\bar{c} + \bar{u}) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0. \quad (3.13)$$

Условие (3.13), записанное в факторизованной форме, имеет аналогичный вид и сходную физическую природу со скалярными граничными условиями [11, 15, 16] для уравнений волнового типа. В обоих подходах преследуется цель полного пропускания через границу волн с заданными дисперсионными соотношениями. Кстати, если из системы уравнений (3.13) выбрать любую подсистему, требования (3.11) будут выполнены. Например, можно оставить единственное уравнение для четвертой компоненты U — возмущения давления p' . Всё зависит от количества необходимых граничных условий.

Наличие в граничном условии второй производной по времени в ряде случаев нежелательно, о чем говорилось в [1, 2] и будет еще сказано в настоящей работе. В связи с этим модифицируем (3.13), заменяя с помощью исходного уравнения (3.1)

¹ Скалярный коэффициент перед вектором не играет роли.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -C_x \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t}.$$

Отсюда возникает граничное условие

$$-\hat{C}_x \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + (\bar{c} + \bar{u}) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + \bar{u} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (3.14)$$

Легко убедиться в том, что граничное условие (3.14) удовлетворяет исходному критерию (3.8). Если рассмотреть действие оператора на собственный вектор $\hat{L}(k_j, \omega) \hat{U}_j$, то от матрицы $\hat{C}_x = C_x - \bar{u}I$ можно избавиться благодаря равенству (3.3).

$$\hat{L}(k_j, \omega) \hat{U}_j = \left[-\omega^2 + (\bar{c} + 2\bar{u})k_j \omega - \bar{u}(\bar{c} + \bar{u})k_j^2 \right] \hat{U}_j.$$

Выражение в квадратных скобках (ср. (3.12)) обращается в нуль ровно на тех значениях k_j , на которых это требуется.

Пересмотрим уравнение (3.14). Каждый его член содержит дифференцирование по x , убрав которое, получаем выражение

$$-\hat{C}_x \frac{\partial U}{\partial t} + (\bar{c} + \bar{u}) \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial U}{\partial x} \right) = 0. \quad (3.15)$$

Уравнение (3.15) пригодно в качестве выходного граничного условия, так как его образ Фурье умножением на $(-ik)$ превращается в образ (3.14), а далее применимы все рассуждения для последнего.

Возможна другая замена второй производной по времени в граничном условии (3.13):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -2\bar{u} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} - \bar{u}^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \hat{C}_x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Тогда (3.13) переходит в

$$\bar{c} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + \bar{c}\bar{u} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \hat{C}_x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0. \quad (3.16)$$

Выпишем также вариант (3.16) без дополнительного дифференцирования по x :

$$\bar{c} \frac{\partial U}{\partial t} + \bar{c}\bar{u} \frac{\partial U}{\partial x} + \hat{C}_x^2 \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \quad (3.17)$$

Удостовериться в выполнении граничными условиями (3.16) и (3.17) критерия (3.8) можно тем же способом, что и в случае условия (3.14).

Как видим, база для выбора неотражающих граничных условий достаточно широка. Но необходима дополнительная селекция граничных условий. Во-первых, много проблем возникает при адаптации условий, построенных для линейных уравнений, к нелинейному случаю, о чем говорилось ранее. Во-вторых, следует выбирать такие граничные условия, которые допускают разностную аппроксимацию, удобную и хорошо сочетающуюся с выбранным алгоритмом решения задачи.

Методы построения неотражающих граничных условий для линеаризованных одномерных уравнений Эйлера нуждаются в обобщении, во-первых, на многомерный случай и, во-вторых, на системы уравнений динамики вязкого газа. Однако предъявленные требования делают гораздо более громоздкими как получаемые граничные условия, так и, в особенности, процесс вывода этих условий.

Решение системы двумерных уравнений Эйлера (2.2) следует искать в виде

$$U = \hat{U} \exp\{i\omega t - ikx - i\ell y\}, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad k, \ell \in \mathbb{C}. \quad (3.18)$$

Здесь присутствуют волновые числа k и l по x и y соответственно. Уравнение (2.2) переходит в спектральную задачу

$$(\omega I - kC_x - lC_y)\hat{U} = 0. \quad (3.19)$$

Анализ системы (3.19) и определенный класс неотражающих условий на различных типах границ приведены в [9].

Рассмотрим квазигазодинамическую систему (2.3) в одномерном случае. Ее решение вида плоской гармонической волны (3.2) удовлетворяет уравнению

$$(\omega I - kC_x - i\tau k^2 D_{xx})\hat{U} = 0. \quad (3.20)$$

Выписанная спектральная задача по сложности несоизмерима с аналогичной (3.3) для уравнений Эйлера. Дисперсионные соотношения, определяемые (3.20), весьма громоздки, их больше, чем в уравнениях Эйлера, а собственные векторы (3.20) зависят от частоты. Немногом лучше обстоят дела и в отношении уравнений Навье–Стокса (2.4). Собственные значения и векторы в первом приближении по коэффициенту вязкости ν можно найти в [10].² Там же построен соответствующий вариант неотражающих граничных условий.

Трудности, возникающие в случае многомерных и вязких задач, можно частично обойти, если применить упрощенный подход, изложенный в [1, 2]. Его обсудим в следующем параграфе.

4. Уравнения волнового типа и акустические граничные условия

Системы линейаризованных газодинамических уравнений, выписанные в §2, сводятся к скалярным уравнениям, а именно к волновому уравнению либо в чистом виде, либо с дополнительными членами, вызывающими диссипацию и дисперсию. Впредь будем называть такие уравнения обобщенными волновыми. Поскольку уравнения, о которых идет речь, являются дифференциальными следствиями исходных линейаризованных систем, могут возникать дополнительные решения и теряться информация, заложенная в первоначальной постановке. Однако, как мы постараемся показать, самые важные волновые свойства систем в результате преобразований практически не изменяются.

Обратимся к волнам, описываемым линейаризованными уравнениями Эйлера в форме (3.3). Что происходит с интенсивностью волн, когда внешнее течение становится всё медленнее? Глядя на собственные векторы акустических волн \hat{U}_1, \hat{U}_2 , заключаем, что их амплитуда не зависит от скорости течения \bar{u} . Следовательно, при уменьшении числа Маха $M = \bar{u}/c$ колебания скорости усиливаются по сравнению с ней самой³ и способны разрушить решение задачи. В то же время энтропийная и вихревая волны исчезают при $M \rightarrow 0$ (их нет, когда $\bar{u} = 0$). Поэтому при моделировании существенно дозвуковых течений важнее всего обеспечить неотражение именно акустических (в узком смысле слова) волн, т.е. необходимо амплитуды входящих акустических волн сделать равными нулю или достаточно малыми.

² В [10] собственные векторы представлены в иной, нежели в настоящей статье, форме, поскольку там фигурирует другой вектор возмущений.

³ С помощью квазигазодинамической системы удастся моделировать вязкие течения при $M \geq 0.01$.

При исследовании волн в вязких средах, описываемых уравнениями Навье–Стокса либо квазигазодинамической системой, мы получим обобщенные волновые уравнения лишь в приближенном виде. Но эти приближения будут иметь удовлетворительную точность для двух акустических волн. В ряде случаев скалярные уравнения приведут к дополнительным дисперсионным соотношениям, сопоставить которые с решениями исходных линейных систем затруднительно. Между тем, такие волны влияют на физические процессы гораздо меньше, чем акустика. Кроме того, дополнительные волны как из систем уравнений, так и из их скалярных приближений практически не воспроизводятся в соответствующих конечно-разностных моделях.

4.1. Акустика в уравнениях Эйлера

Начнем с линеаризованных уравнений Эйлера, которые сведем к волновому уравнению. Прежде всего, удобно переписать (2.2), введя лагранжеву производную по времени

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y},$$

в форме

$$\frac{dU}{dt} + \bar{C}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \bar{C}_y \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$

Из данного уравнения в предположении (iii) следует уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 U}{dt^2} - \bar{C}_x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - (\bar{C}_x \bar{C}_y + \bar{C}_y \bar{C}_x) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \bar{C}_y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad (4.1)$$

где все коэффициентные матрицы весьма разреженные. Последнее из четырех уравнений системы (4.1) является замкнутым волновым уравнением для возмущения давления p' :

$$p''_{tt} - \bar{c}^2 (p'_{xx} + p'_{yy}) = 0$$

или, в неподвижной системе координат,

$$p''_{tt} + 2\bar{u}p'_{xt} + 2\bar{v}p'_{yt} - (\bar{c}^2 - \bar{u}^2)p'_{xx} + 2\bar{u}\bar{v}p'_{xy} - (\bar{c}^2 - \bar{v}^2)p'_{yy} = 0. \quad (4.2)$$

Неотражающие граничные условия будем формулировать применительно к уравнению (4.2). При дозвуковом течении акустические условия на входе и на выходе совершенно аналогичны (симметричны). Что касается полной системы (2.2), то именно условие для волнового уравнения давления послужит неотражающим условием для системы, а остальные граничные условия к (2.2) могут выбираться из других принципов. О таком подходе уже говорилось в [2]. Снижая амплитуду волны давления, к примеру, бегущей влево, мы автоматически подавляем колебания прочих параметров: достаточно взглянуть на собственный вектор \bar{U}_2 левой акустической волны (3.3).

Построим для уравнения (4.2) неотражающие граничные условия на выходе (условия на входе выглядят аналогично). Рассматривая двумерные гармонические волны (3.18), получаем образ Фурье уравнения (4.2):

$$-\omega^2 + 2\bar{u}\omega k + 2\bar{v}\omega l + (\bar{c}^2 - \bar{u}^2)k^2 - 2\bar{u}\bar{v}kl + (\bar{c}^2 - \bar{v}^2)l^2 = 0. \quad (4.3)$$

Разрешим соотношение (4.3) относительно k , выбрав решение, отвечающее правой акустической волне:

$$k = \frac{1}{\bar{c}^2 - \bar{u}^2} \left(-\bar{u}\omega + \bar{u}\bar{v}\ell + \bar{c}\omega\sqrt{1 - 2\bar{v}\ell/\omega - (\bar{c}^2 - \bar{u}^2 - \bar{v}^2)\ell^2/\omega^2} \right). \quad (4.4)$$

Наличие в выписанном уравнении иррационального выражения делает преобраз (4.4) нелокальным оператором. Подробнее об этом говорится в [2, 8]. Три первых приближения радикала по формуле Тейлора относительно $s = \bar{c}\ell/\omega$, дающие

$$k = \frac{\omega}{\bar{c} + \bar{u}}, \quad k = \frac{\omega - \bar{v}\ell}{\bar{c} + \bar{u}}, \quad k = \frac{\omega - \bar{v}\ell}{\bar{c} + \bar{u}} - \frac{\bar{c}\ell^2}{2\omega},$$

приводят к трем вариантам правого граничного условия, соответственно,

$$p'_t + (\bar{c} + \bar{u})p'_x = 0, \quad (4.5a)$$

$$p'_t + (\bar{c} + \bar{u})p'_x + \bar{v}p'_y = 0, \quad (4.5b)$$

$$(\bar{c} - \bar{u})p'_{xt} - \bar{v}p'_{yt} + (\bar{c}^2 - \bar{u}^2)p'_{xx} - 2\bar{u}\bar{v}p'_{xy} + (0.5\bar{c}(\bar{c} - \bar{u}) - \bar{v}^2)p'_{yy} = 0. \quad (4.5b)$$

Уравнение (4.5b) получается после замены нежелательной для нас второй временной производной p''_t с помощью (4.2).

4.2. Акустика в уравнениях динамики вязкого газа

Квазигазодинамическая система и уравнения Навье–Стокса также сводятся к обобщенным волновым уравнениям на основе приемов, аналогичных предыдущему, хотя и более сложных. Детальное изложение процесса вывода содержится в [1, 2]. В векторном уравнении типа (4.1) появляется правая часть, пропорциональная коэффициенту вязкости. Затем правые части таких уравнений, получаемых из линеаризованных квазигазодинамической системы (2.3) и уравнений Навье–Стокса (2.4), подвергаются преобразованиям с помощью самих же систем (2.3) либо (2.4). При этом используется принцип:

(i) члены, имеющие второй порядок по параметру вязкости, можно игнорировать.

В итоге из уравнений Навье–Стокса следует приближенное обобщенное волновое уравнение, которое запишем в неподвижной системе координат:

$$\begin{aligned} p'_{tt} + 2\bar{u}p'_{xt} + 2\bar{v}p'_{yt} - (\bar{c}^2 - \bar{u}^2)p'_{xx} + 2\bar{u}\bar{v}p'_{xy} - (\bar{c}^2 - \bar{v}^2)p'_{yy} = \\ = v \left(\frac{\gamma-1}{\text{Pr}} + \frac{4}{3} \right) (p'_{xxt} + p'_{yyt} + \bar{u}p'_{xxx} + \bar{v}p'_{xxy} + \bar{u}p'_{xyy} + \bar{v}p'_{yyy}). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Для квазигазодинамической системы получается уравнение

$$\begin{aligned} p'_{tt} + 2\bar{u}p'_{xt} + 2\bar{v}p'_{yt} - (\bar{c}^2 - \bar{u}^2)p'_{xx} + 2\bar{u}\bar{v}p'_{xy} - (\bar{c}^2 - \bar{v}^2)p'_{yy} = \\ = 2\tau \left[\left(\bar{u}^2 + \frac{\gamma+1}{\gamma}\bar{c}^2 \right) p'_{xxt} + 2\bar{u}\bar{v}p'_{xyt} + \left(\bar{v}^2 + \frac{\gamma+1}{\gamma}\bar{c}^2 \right) p'_{yyt} + \right. \\ \left. + \bar{u} \left(\bar{u}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma}\bar{c}^2 \right) p'_{xxx} + \bar{v} \left(3\bar{u}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma}\bar{c}^2 \right) p'_{xxy} + \right. \\ \left. + \bar{u} \left(3\bar{v}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma}\bar{c}^2 \right) p'_{xyy} + \bar{v} \left(\bar{v}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma}\bar{c}^2 \right) p'_{yyy} \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Теперь проанализируем акустические волны в вязких средах. Следуя [2], ограничимся одномерным приближением, т.е. $O(s^0)$, приводящим в случае уравнений Эйлера к граничному условию (4.5a). Руководствуясь постулатом (iv), будем учитывать только члены порядка $\eta \sim \omega\tau$.

Уравнения (4.6) и (4.7) в одномерном случае представимы в общей форме

$$p'_{tt} + 2\bar{u}p'_{xx} - (\bar{c}^2 - \bar{u}^2)p'_{xx} = v_1 p'_{xxt} + v_2 \bar{u} p'_{xxx}. \quad (4.8)$$

Подстановка (3.2) в (4.8) дает его образ Фурье:

$$-\omega^2 + 2\bar{u}\omega k + (\bar{c}^2 - \bar{u}^2)\omega^2 = -i(v_1 \omega k^2 - v_2 \bar{u} k^3). \quad (4.9)$$

Среди корней k кубического уравнения (4.9) нас интересует лишь волновое число звуковой волны, бегущей вправо:

$$k = \frac{\omega}{\bar{c} + \bar{u}} [1 - i\eta + O(\eta^2)], \quad \text{где } \eta = \omega \tau^*, \quad (4.10)$$

а коэффициент τ^* различен в двух моделях: для навье-стоксовских волн (4.6)

$$\tau^* = \frac{\nu}{(\bar{c} + \bar{u})^2} \left(\frac{\gamma - 1}{2Pr} + \frac{2}{3} \right), \quad (4.11)$$

тогда как для волн (4.7) в квазигазодинамической среде, с учетом (2.5),

$$\tau^* = \nu (\gamma \bar{c}^{-2} + (\bar{c} + \bar{u})^{-2}). \quad (4.12)$$

В обеих ситуациях (4.11) и (4.12) волны (4.10) затухают в пространстве.

Выходное неотражающее условие для уравнений вязкого газа получается следующим образом. Преобраз Фурье (4.10)

$$p'_t + (\bar{c} + \bar{u})p'_x = \tau^* p'_{tt}$$

непригоден в качестве граничного условия, однако дифференциальные следствия из него же позволяют заменить p'_t . Например, правое акустическое условие может представляться уравнением

$$p'_t + (\bar{c} + \bar{u})p'_x + \tau^*(\bar{c} + \bar{u})(2p'_{xt} + (\bar{c} + \bar{u})p'_{xx}) = 0. \quad (4.13)$$

Величина τ^* определяется, в зависимости от модели, по формуле (4.11) либо (4.12). Уравнение (4.13) является, очевидно, аналогом (4.5а) для вязких газов.

5. Волны в системах разностных уравнений

Обратимся к проблеме построения дискретных неотражающих граничных условий. Если по отдельности аппроксимировать газодинамические уравнения и граничные условия, то хороших результатов достигнуть трудно. Способ аппроксимации неотражающих условий существенно зависит от используемой разностной схемы. В [2] рассмотрен пример разностной схемы и подходы к построению акустического условия для нее. Но можно поставить вопрос более радикально: какую разностную схему применять для моделирования задачи, чтобы было легче подавить нефизические волны, возникающие в расчете. Как увидим ниже, разностные системы уравнений неодинаково описывают волны, существующие в дифференциальных системах, а также способны (или не способны) образовывать специфические "схемные" волны, не имеющие аналогов в континуальном случае.

В данной работе ограничимся рассмотрением двухслойных схем с весами на одномерной пространственной сетке с постоянным шагом h . В указанном случае дискретизация по времени не вносит никаких новых эффектов в волновые характеристики уравнений (при использовании многшаговых алгоритмов, как, например, в [17], появляются дополнительные проблемы). Поэтому, следуя [2], будем считать уравнения дифференциальными по времени и разностными по пространству. В тексте используются стандартные индексные обозначения разностных операторов [18]. Фурье-анализ схем будет проводиться на основе волн (3.2) с дискретным пространственным аргументом $x = x_j$.

Ввиду двухслойного характера схем, нас интересуют граничные условия, содержащие производные по времени не выше первого порядка. Их, как говорилось ранее, надо заменять конечными разностями. Вторые и следующие по счету временные производные крайне нежелательны с вычислительной точки зрения, и их необходимо преобразовывать к иным формам.

5.1. Схема с центральными разностями

Рассмотрим аппроксимацию линеаризованных уравнений Эйлера (3.1) схемой с центральными разностями:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + C_x U_x = 0. \quad (5.1)$$

Фактически к такому выражению приводит изложенная в [2] линеаризация полунявной (т.е. с весом 1/2) схемы для уравнений Навье–Стокса либо для квазигазодинамической системы [4], если пренебречь диссипативными членами.

Исследуем гармонические волны, удовлетворяющие (5.1). Подставляя в (5.1) решение вида (3.2), получаем уравнение для волн — собственных векторов:

$$\left(\frac{\sin kh}{h} C_x - \omega I \right) \hat{U} = 0. \quad (5.2)$$

Спектральная задача (5.2) легко сводится к аналогичной (3.3) для дифференциальной системы Эйлера введением символа

$$\tilde{k} = (\sin kh) / h.$$

Отсюда видно, что набор параметров \tilde{k}_j совпадает с волновыми числами k_j для (3.3) и собственные векторы \hat{U}_j в обоих случаях одни и те же. Однако “настоящих” волновых чисел у (5.2) будет не четыре, а восемь.

Выпишем полный набор решений задачи (5.2).

1. Правая акустическая волна:

$$\omega = (\bar{u} + \bar{c}) \tilde{k}; \quad \tilde{k}_1 = \frac{\omega}{\bar{c} + \bar{u}}; \quad k_{11} = \frac{1}{h} \arcsin \frac{\omega h}{\bar{c} + \bar{u}}, \quad k_{12} = \frac{\pi}{h} - k_{11}.$$

2. Левая акустическая волна:

$$\omega = (\bar{u} - \bar{c}) \tilde{k}; \quad \tilde{k}_2 = -\frac{\omega}{\bar{c} - \bar{u}}; \quad k_{21} = -\frac{1}{h} \arcsin \frac{\omega h}{\bar{c} - \bar{u}}, \quad k_{22} = -\frac{\pi}{h} - k_{21}.$$

3. Энтропийная волна:

$$\omega = \bar{u} \tilde{k}; \quad \tilde{k}_3 = \omega / \bar{u}; \quad k_{31} = \frac{1}{h} \arcsin \frac{\omega h}{\bar{u}}, \quad k_{32} = \frac{\pi}{h} - k_{31}.$$

4. Вихревая волна: $\omega = \bar{u} \tilde{k}; \quad k_{41} = k_{31}, \quad k_{42} = k_{32}.$

Как видно из вышеприведенного перечня, в схеме с центральными разностями (5.1) при умеренной частоте ω каждую из газодинамических волн сопровождает паразитная пространственная высокочастотная осцилляция (правильнее ее назвать коротковолновой осцилляцией). Общее гармоническое решение (5.1) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 U = & \hat{U}_1 [a_1 \exp\{i\omega t - ik_{11}x\} + a_2 \exp\{i\omega t - ik_{12}x\}] + \\
 & + \hat{U}_2 [a_3 \exp\{i\omega t - ik_{21}x\} + a_4 \exp\{i\omega t - ik_{22}x\}] + \\
 & + \hat{U}_3 [a_5 \exp\{i\omega t - ik_{31}x\} + a_6 \exp\{i\omega t - ik_{32}x\}] + \\
 & + \hat{U}_4 [a_7 \exp\{i\omega t - ik_{31}x\} + a_8 \exp\{i\omega t - ik_{32}x\}].
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Граничные условия для разностной схемы (5.1), как и в дифференциальном случае, определим формулой (3.6). Образом Фурье граничного оператора L служит матрица $\hat{L}(k, \omega)$ размерности $n \times 4$. Решение (5.3), удовлетворяющее граничным условиям, следует из системы уравнений для коэффициентов

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}\mathbf{a} = 0, \quad \text{где } \mathbf{a} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_8)^T, \quad \mathbf{V} = (\hat{V}_1 \ \hat{V}_2 \ \dots \ \hat{V}_8), \\
 \hat{V}_{2j-1} = \hat{L}(k_{j,1}, \omega) \hat{U}_j, \quad \hat{V}_{2j} = \hat{L}(k_{j,2}, \omega) \hat{U}_j, \quad j = 1, \dots, 4.
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

В данной ситуации размерность матрицы \mathbf{V} равна $n \times 8$. Для реализации разностной схемы (5.1) необходимо $n = 4$ условия на каждой границе. Следовательно, система (5.4) всегда имеет, как минимум, четырехмерное пространство решений.

Изложенные результаты свидетельствуют о сложности проблемы задания неотражающих граничных условий для конечно-разностной системы (5.1). Предположим, ставится задача *аппроксимации* граничных условий, построенных для дифференциальных уравнений Эйлера (3.1). Как известно, критерием проверки качества этих условий служило решение алгебраической системы (3.7). Но, сколько точно ни приближаются граничные условия для (3.1), их применимость к (5.1) характеризуется решением совсем другой системы (5.4).

В качестве примера рассмотрим аппроксимацию простейшего акустического условия на правой границе для уравнений Эйлера (4.5а), вернее, его векторного аналога

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (\bar{c} + \bar{u}) \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \tag{5.5}$$

Условие

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (\bar{c} + \bar{u}) U_x = 0 \tag{5.6}$$

является точным в том смысле, что правая акустическая волна (5.2) ему удовлетворяет. Другое условие

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial U}{\partial t} + \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{j-1} \right] + (\bar{c} + \bar{u}) U_{\bar{x}} = 0, \tag{5.7}$$

имеющее образ Фурье граничного оператора

$$\hat{L}(k, \omega) = \left[\omega \cos \frac{kh}{2} - (\bar{c} + \bar{u}) \frac{2}{h} \sin \frac{kh}{2} \right] \mathbf{I},$$

лишь приближает (5.5) и (5.6). Оба дискретных граничных условия исследовались в [2] для случая скалярного волнового уравнения.

Выясним, какие волны описывают вышеприведенные граничные условия. Для (5.6) система (5.4) сводится к выражению (см. (3.5))

$$\mathbf{U}\tilde{\mathbf{a}} = 0 \quad \text{или} \quad \tilde{\mathbf{a}} = 0, \tag{5.8}$$

$$\text{где } \tilde{\mathbf{a}} = \left(0 \quad \frac{2\bar{c}}{\bar{c}-\bar{u}}(a_3 + a_4) \quad -\frac{\bar{c}}{\bar{u}}(a_5 + a_6) \quad -\frac{\bar{c}}{\bar{u}}(a_7 + a_8) \right)^T. \tag{5.9}$$

Проанализируем данный результат, обратившись к формуле (5.3). Амплитуды правой акустической волны a_1 и сопутствующей ей осцилляции a_2 совершенно произвольны. Амплитуды остальных физических волн равновелики амплитудам лобочных волн, связанных с каждой из них. Поскольку в обезразмеренной матрице U все ненулевые элементы порядка единицы, относительные масштабы амплитуд следуют из (5.9):

$$\frac{\bar{u}}{c} a_3 \sim a_5 \sim a_7.$$

Граничное условие (5.7) также приводит к системе (5.8), где

$$\tilde{\mathbf{a}} = \left(-\frac{r_+^3}{4} a_1 - 2a_2, \quad \frac{2\bar{c}}{\bar{c}-\bar{u}} r_+ a_3 + 2a_4, \quad -2\frac{\bar{c}}{\bar{u}} r_+ a_5 - 2a_6, \quad -2\frac{\bar{c}}{\bar{u}} r_+ a_7 - 2a_8 \right)^T,$$

$$r_+ = \omega h / (\bar{c} + \bar{u}), \quad r_- = \omega h / (\bar{c} - \bar{u}), \quad r = \omega h / \bar{c}.$$

Элементы $\tilde{\mathbf{a}}$ выписаны приближенно, в виде главных членов разложения по степеням малого параметра r . Отсюда амплитуды удовлетворяют следующим уравнениям и имеют следующие относительные масштабы:

$$a_2 = -\frac{r_+^3}{8} a_1, \quad a_4 = -\frac{\bar{c}}{\bar{c}-\bar{u}} r_+ a_3, \quad a_6 = -\frac{\bar{c}}{\bar{u}} r_+ a_5, \quad a_8 = -\frac{\bar{c}}{\bar{u}} r_+ a_7;$$

$$a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5 : a_6 : a_7 : a_8 \sim 1 : r^3 : r^2 : r^3 : \frac{\bar{u}}{c} r^2 : r^3 : \frac{\bar{u}}{c} r^2 : r^3.$$

Правая акустическая волна значительно сильнее всех остальных, а каждая осцилляция, в особенности правая акустическая, много слабее соответствующей физической волны. Таким образом, приближенное акустическое условие (5.7) лучше точного условия (5.6).

Возможны ли идеально неотражающие условия для схемы с центральными разностями? Опять рассмотрим случай правой, выходной границы. Через нее должны проходить волны (5.2): правая акустическая (k_{11}), энтропийная (k_{31}) и вихревая (k_{41}), а остальные волны запрещены. Отсюда следуют требования на коэффициенты (5.3):

$$a_1, a_5, a_7 \text{ — любые; } a_2 = a_3 = a_4 = a_6 = a_8 = 0.$$

Значит, матрица V системы (5.4) обязана удовлетворять следующим условиям:

$$\hat{V}_1 = \hat{V}_5 = \hat{V}_7 = 0, \quad \text{rg } V_+ \geq 5, \quad \text{где } V_+ = (\hat{V}_2 \quad \hat{V}_3 \quad \hat{V}_4 \quad \hat{V}_6 \quad \hat{V}_8).$$

Требование о ранге матрицы V_+ невыполнимо, ибо она состоит не более чем из четырех строк — по количеству граничных условий. Сформулируем более слабые условия на столбцы матрицы V , руководствуясь скорее практическими соображениями, чем теоретическими заключениями:

$$\begin{cases} \hat{L}(k_{11}, \omega) \hat{U}_1 = 0, & \hat{L}(k_{12}, \omega) \hat{U}_1 \neq 0, \\ \hat{L}(k_{31}, \omega) \hat{U}_3 = 0, & \hat{L}(k_{32}, \omega) \hat{U}_3 \neq 0, \\ \hat{L}(k_{31}, \omega) \hat{U}_4 = 0, & \hat{L}(k_{32}, \omega) \hat{U}_4 \neq 0, \\ \hat{L}(k_{21}, \omega) \hat{U}_2 \neq 0, & \hat{L}(k_{22}, \omega) \hat{U}_2 \neq 0, \end{cases} \quad \forall \omega. \quad (5.10)$$

Рассмотренные выше граничные условия (5.6) и (5.7) не отвечают требованиям (5.10), но условие (5.7) в определенной степени лучше.

Что дает алгебраическое неотражающее условие (3.9) для дифференциальных уравнений Эйлера в применении к разностной схеме (5.1)? Легко проверить, что данный оператор L не удовлетворяет ряду неравенств из (5.10). Решением системы (5.4) являются произвольные амплитуды любых волн и осцилляций, за исключением левой акустической волны, для которой $a_4 = -a_3$. То есть результат весьма далек от

желаемого. Не лучше обстоит дело и с дифференциальными следствиями (3.9) — условиями (3.10а) и (3.10б).

5.2. Схема с направленными разностями

Рассмотрим пример разностной схемы для линеаризованных уравнений Эйлера (3.1), которая при низких частотах ω не дает коротковолновых осцилляций. Схема с направленными разностями имеет вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + C_x U_x - \frac{h}{2} |C_x| U_{\bar{x}x} = 0. \quad (5.11)$$

Матрица $|C_x|$ строится на основе разложения (3.5) матрицы C_x как

$$|C_x| = U |\Lambda| U^{-1}, \quad \text{где } |\Lambda| = \text{diag} (|\bar{u} + \bar{c}|, |\bar{u} - \bar{c}|, |\bar{u}|, |\bar{u}|).$$

При сверхзвуковом ($\bar{u} > \bar{c}$) течении $|C_x| = C_x$, а при дозвуковом ($0 < \bar{u} < \bar{c}$) справедлива формула

$$|C_x| = \begin{pmatrix} \bar{u} & \overline{\rho u} / \bar{c} & 0 & (\bar{c} - \bar{u}) / \bar{c}^2 \\ 0 & \bar{c} & 0 & \bar{u} / (\overline{\rho c}) \\ 0 & 0 & \bar{u} & 0 \\ 0 & \overline{\rho c u} & 0 & \bar{c} \end{pmatrix}.$$

Обычно под временной производной в (5.11) понимается разность вперед, т.е. имеется в виду явная схема. Она получается при линеаризации известных схем для нелинейных уравнений Эйлера — методов Годунова, Стегера–Уорминга и др.

Подстановка в (5.11) выражения (3.2) приводит к следующей спектральной задаче:

$$\left(\omega I - \frac{\sin kh}{h} C_x - \frac{2i}{h} \sin^2 \frac{kh}{2} |C_x| \right) \hat{U} = 0. \quad (5.12)$$

Матрицы C_x и $|C_x|$ имеют общий базис из собственных векторов \hat{U}_j из задачи (3.3), следовательно, эти же собственные векторы соответствуют (5.12).

Выпишем решения (5.12).

1. Правая акустическая волна:

$$\omega = (\bar{u} + \bar{c}) \frac{1}{h} [\sin kh + i(1 - \cos kh)]; \quad k_1 = \frac{1}{h} \arctg r_+ - \frac{i}{2h} \ln(1 + r_+^2).$$

2. Левая акустическая волна:

$$\omega = (\bar{u} - \bar{c}) \frac{1}{h} [\sin kh - i(1 - \cos kh)]; \quad k_2 = -\frac{1}{h} \arctg r_- + \frac{i}{2h} \ln(1 + r_-^2).$$

3. Энтропийная волна:

$$\omega = \frac{\bar{u}}{h} [\sin kh + i(1 - \cos kh)]; \quad k_3 = \frac{1}{h} \arctg \frac{\omega h}{\bar{u}} - \frac{i}{2h} \ln(1 + (\omega h / \bar{u})^2).$$

4. Вихревая волна: собственное значение совпадает с предыдущим, $k_4 = k_3$.

Таким образом, схема с направленными разностями (5.11) не имеет побочных волновых решений, и для нее не существует проблемы подавления паразитных колебаний. Общее гармоническое решение (5.11) формально записывается в том же виде (3.4), что и для дифференциальных уравнений Эйлера (3.1).

Главным недостатком схемы с направленными разностями является ее значительная диссипативность — первого порядка по h . Волны в такой системе имеют характерное

затухание. Например, для правой акустической волны (5.12) справедливо дисперсионное соотношение

$$k_1 = \frac{\omega}{\bar{c} + \bar{u}} (1 - 0.5 ir_+ + O(r^2)),$$

т.е. акустические волны линейной системы Эйлера (3.1) передаются с погрешностью порядка r .

Чтобы сформулировать неотражающие или слабо отражающие граничные условия для схемы (5.11), вполне допустимо использовать аппроксимации неотражающих граничных условий для линеаризованных дифференциальных уравнений Эйлера (3.1). Никаких "сюрпризов" в виде нефизических решений эти условия не преподнесут. Однако система (5.11) допускает точные неотражающие граничные условия, задаваемые на разностной сетке. В самом деле, прообразы Фурье волн задачи (5.12) представляют собой скалярные схемы с направленными разностями: для левой акустической волны (k_2) — с разностью вперед, для остальных волн — с разностью назад.

Укажем неотражающие условия на выходной границе. Условие прохождения правой акустической волны зададим в виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (\bar{c} + \bar{u}) U_{\bar{x}} = 0, \quad (5.13)$$

а условие прохождения энтропийной и вихревой волн — как

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \bar{u} U_{\bar{x}} = 0. \quad (5.14)$$

Легко заметить, что (5.13) аппроксимирует акустическое условие для уравнений Эйлера (5.5). Подставляя в образы граничных операторов (5.13) и (5.14) волновые числа соответствующих волн, заключаем, что (5.13) обеспечивает $\hat{L}(k_1, \omega) = 0$, а (5.14) дает $\hat{L}(k_3, \omega) = 0$. Таким образом, построены два точных неотражающих условия на выходе для схемы с направленными разностями (5.11).

5.3. Другие разностные схемы

Два рассмотренных примера разностных схем далеко не исчерпывают возможных методов решения линеаризованных газодинамических уравнений. Однако почти все *линейные* сеточные алгоритмы обладают фактически теми же недостатками, что и схема с центральными разностями (5.1). Методы, использующие расширенные пространственные шаблоны, всегда порождают для фиксированной частоты побочные волновые числа. Многошаговые по времени методы создают ложные дополнительные частоты.

Заслуживают внимания так называемые схемы, сохраняющие дисперсионные соотношения (DRP-схемы), описанные в [17]. Эталонная DRP-схема в применении к линеаризованным уравнениям Эйлера (3.1) имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} + C_x \frac{1}{h} \sum_{j=-3}^3 b_j U(x + jh) = 0, \quad (5.15)$$

если не учитывать дискретизацию по времени. Коэффициенты b_j имеют конкретные числовые значения и антисимметричны:

$$b_0 = 0, \quad b_j = -b_{-j}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (5.16)$$

Фурье-анализ схемы (5.15) аналогичен случаю схемы с центральными разностями (5.1). Решается спектральная задача для дифференциальных уравнений Эйлера (3.3) относительно эффективных волновых чисел

$$\tilde{k} = \frac{i}{h} \sum_{j=-3}^3 b_j e^{-ikjh}. \quad (5.17)$$

Коэффициенты b_j выбраны с целью обеспечить максимальную близость величины $\tilde{k}(k)$ к волновому числу k . Но заданному значению \tilde{k} соответствует не единственное значение k . Опираясь на (3.3), находим

$$\tilde{k}_j = \tilde{k}_j(\omega), \quad j=1, \dots, 4, \quad k_{jm} = k_{jm}(\tilde{k}_j), \quad m=1, \dots, 6. \quad (5.18)$$

Легко обнаруживаются паразитные осцилляции в схеме (5.15).

По формуле (5.17), с учетом (5.16), получаем, что при $k \in \mathbb{R}$ функция $\tilde{k}(k)$ вещественная и $\tilde{k}(0) = \tilde{k}(\pi/h) = 0$. Это означает, что нулевой частоте отвечает, среди прочих волн, пространственная осцилляция с длиной волны в два шага сетки. График $\tilde{k}(k)$, приведенный в [17], показывает, что функция принимает равные значения при двух $k \in [0, \pi/h]$.

Таким образом, схема (5.15) гарантирует высокую точность главных дисперсионных соотношений в широком диапазоне частот ω , т.е. выражений $k_{j,1}(\omega)$ из набора (5.18). Для контроля побочных волн нужны дополнительные меры. Проблема задания дискретных граничных условий для (5.15) весьма сложна и детально не исследовалась.

Следующий вопрос, которого надо коснуться,— это свойства разностных схем динамики вязкого газа. В [4] квазигазодинамическая система аппроксимировалась схемой, которая в линеаризованном виде, в одномерном случае и без учета временной дискретизации есть разностный аналог (2.3):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + C_x U_x = \tau D_{xx} U_{xx}. \quad (5.19)$$

Аналогичным образом аппроксимируются уравнения Навье–Стокса (2.4). Исследование разностных схем для вязких систем, как явствует из сказанного в §3 о соответствующих дифференциальных системах, затруднительно. Вместе с тем некоторые оценки степени затухания волн и величины поправок к неотражающим условиям для (5.1) сделать можно.

Рассмотрим случай неподвижного течения ($\bar{u} = 0$). В сплошных средах существуют акустические волны, бегущие вправо и влево, описываемые одинаковыми формулами типа (4.10) для уравнений Навье–Стокса и квазигазодинамической системы. Система (5.19) и ее навье-стоксовский эквивалент сводятся (см. §4.2) к аппроксимации обобщенного волнового уравнения (4.8) при отбрасывании малых величин высших порядков. В неподвижном случае имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \bar{c}^2 p'_{xx} = \nu_1 \frac{\partial}{\partial t} p'_{xx}$$

с образом Фурье

$$-\omega^2 + \bar{c}^2 \frac{\sin^2 kh}{h^2} + i\nu_1 \omega \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{kh}{2} = 0.$$

Отсюда находим волновое число правой акустической волны

$$k_{11} \approx \frac{\omega}{\bar{c}} (1 - i\eta + r^2/6),$$

задающее такую же диссипацию, как (4.10), и дополнительную разностную дисперсию $O(r^2)$, где $r = \omega h/\bar{c}$. Здесь η и r^2 считаются величинами одного порядка, хотя в практических задачах они могут различаться в обе стороны. Правая осциллирующая волна определяется соотношением

$$k_{12} \approx \frac{\pi}{h} - \frac{\omega}{\sqrt{2}\bar{c}} \sqrt{\zeta + 1} + \frac{i\omega}{\sqrt{2}\bar{c}} \sqrt{\zeta - 1}, \quad \text{где } \zeta = (1 + 64\eta^2 r^{-4})^{1/2}.$$

Осцилляция не затухает в направлении распространения, а, наоборот, усиливается.

Таким образом, вязкое акустическое граничное условие (4.13) должно аппроксимироваться с добавлением специальных членов. Что касается затухания или усиления побочных волн, то на него влияет наличие скорости течения \bar{u} , причем по-разному в уравнениях Навье–Стокса и квазигазодинамики.

6. Применение неотражающих условий к моделированию тестовой задачи

Для испытания методики, изложенной в данной работе, проведено моделирование задачи внешнего обтекания (рис. 1) в терминах полной нелинейной квазигазодинамической системы. В качестве обтекаемого тела выбрана пластина конечной длины. Ввиду симметрии задачи рассматривается верхняя половина области Ω' . Для расчетов использовалась полуневязная схема из [3, 4].

Число Маха внешнего течения $M = 0.01$, число Рейнольдса $Re \sim 10^3$. Пластина изотермична и имеет температуру $T_w = 1.4 T_0$, где T_0 — температура внешнего потока. Пластина имеет безразмерную длину 47; промежуток перед пластиной длины 20, а позади пластины — 46. Ширина области равна 8. Расчеты велись на прямоугольной сетке 181×35 узлов по x, y . Сетка по y сгущается с приближением к пластине по закону геометрической прогрессии. Сетка по x сгущается в окрестности передней кромки пластины и равномерна в правой части области.

Постановка начальных условий заимствована из [4]. Задавалось течение с постоянными значениями параметров $u = u_0, v = 0, p = p_0, T = T_0$ в невязкой части течения и с плавным их изменением в областях пограничного слоя и следа.

Перечислим границы расчетной области и условия на них.

Вход:	$T = T_0, L^+(\varphi) = 0, u = u_0, v = 0;$
выход:	$\partial^2(\log T)/\partial x^2 = 0, L^+(\varphi) = 0, u + X \partial u/\partial x = u_0,$ $\partial^2 v/\partial x^2 = 0;$
внешняя граница:	$\partial \varphi/\partial y = 0, \text{ где } \varphi = T, p, u, v;$
пластина:	$T = T_w, \partial p/\partial y = 0, u = v = 0;$
линия симметрии:	$\partial T/\partial y = 0, \partial p/\partial y = 0, \partial u/\partial y = 0, v = 0.$

Условия на входной и выходной границах вида $L^+(\varphi) = 0$ служат для нахождения давления p , и в расчетах тестировались различные варианты этих условий. Условие третьего рода для скорости u на выходе содержит константу X , имеющую размерность длины. Полный набор граничных условий в основном повторяет образцы [1, 2].

Рассматриваются следующие входные и выходные граничные условия для давления. Два первых варианта представляют собой разностные аппроксимации акустического условия (4.5а) в нелинейной постановке

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (c+u) \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial p}{\partial t} - (c-u) \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

на правой и левой границах соответственно. В первом случае используется "точное" неотражающее условие (5.6) на выходе

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (c+u) p_x = 0 \quad (6.1)$$

и аналогичное ему условие на входе. В другом случае применяется приближенное условие (5.7):

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial p}{\partial t} + \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_{j-1} \right] + (c+u) p_x = 0 \quad (6.2)$$

справа и с соответствующими изменениями — слева. Третий вариант граничных условий использует уравнение (3.10а) на правой границе:

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \rho c \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (6.3)$$

— и задание $p = p_0$ на левой границе. Во всех случаях применялась двухслойная аппроксимация граничных уравнений с весом 1/2.

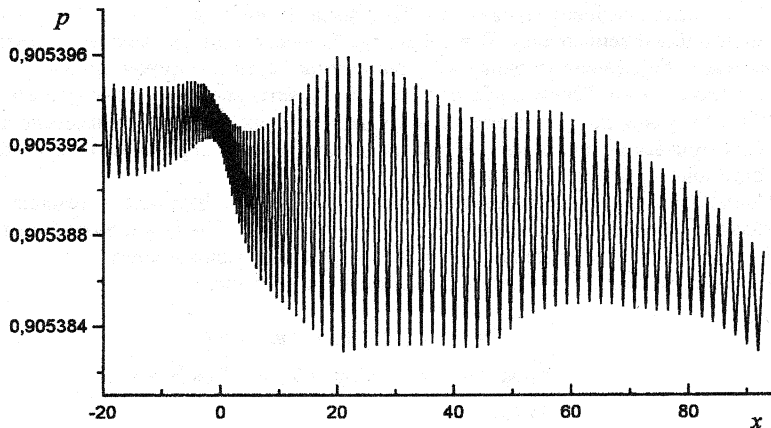


Рис.3. Распределение давления p/p_0 вдоль оси x при $u = 5.11$

На рис. 3 показано горизонтальное распределение давления, полученное в расчете с использованием граничных условий типа (6.2). Хорошо видны осцилляции, полупериод которых практически совпадает с шагом сетки по x , что свидетельствует о наличии паразитных волн (5.2) с волновыми числами $k_{j,2}$.

Рис. 4 и 5 демонстрируют продольные распределения амплитуды осцилляций давления и горизонтальной скорости в трех расчетах, различающихся граничными условиями (6.1), (6.2) и (6.3), а также их левосторонними эквивалентами. Для нахождения осредненных давления \bar{p} и скорости \bar{u} применялся линейный фильтр.

Амплитуда колебаний как давления, так и скорости резко падает вблизи передней кромки пластины ($x = 0$), т.е. в области наибольшего сгущения сетки.

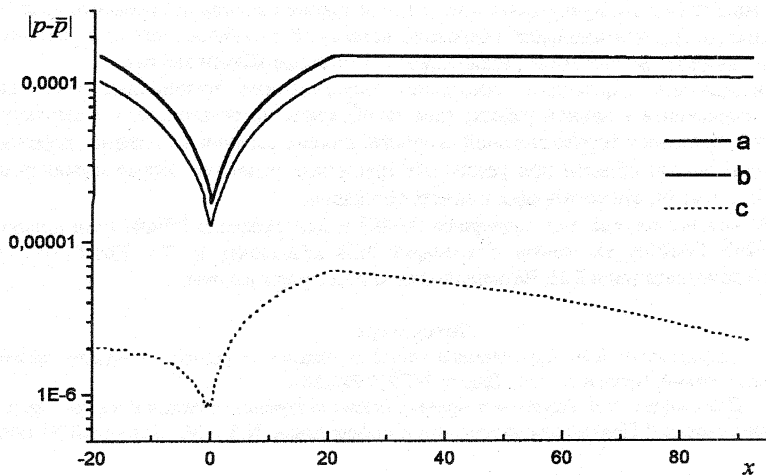


Рис.4. Амплитуда осцилляций давления p/p_0 при $y = 5.11$:
 а — граничное условие (6.1); б — граничное условие (6.3); в — граничное условие (6.2)

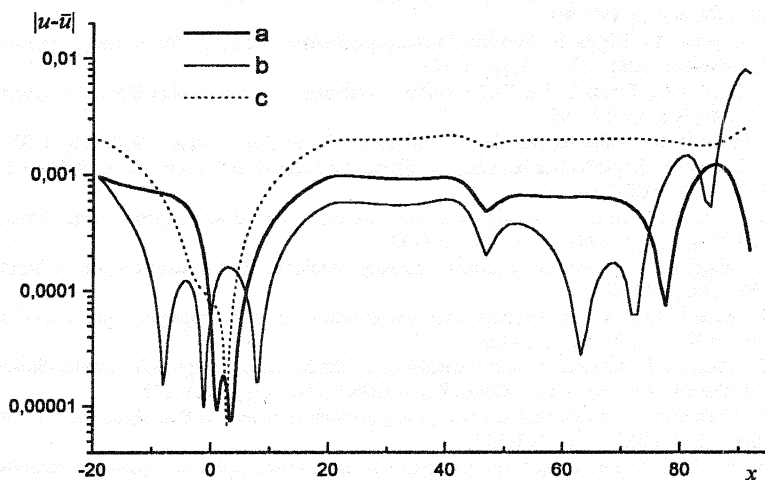


Рис.5. Амплитуда осцилляций скорости u/u_0 при $y = 5.11$:
 а — граничное условие (6.1); б — граничное условие (6.3); в — граничное условие (6.2)

Но всё же минимумы амплитуд приходятся на разные точки. Средний уровень пульсаций давления (рис. 4) при атмосферных фоновых параметрах в случае

применения “точных” неотражающих граничных условий (6.1) и (6.3) составляет 110–120 дБ, тогда как для приближенного условия (6.2) — 80–90 дБ. Последнее граничное условие можно считать наилучшим, хотя с точки зрения осцилляций скорости (рис. 5) это не совсем так. Оптимальное поведение колебаний *и* наблюдается при условиях (6.3), если не брать во внимание резкий скачок амплитуды вблизи выхода.

Осцилляции параметров проявляют определенные нелинейные свойства. Теория, изложенная в данной работе, едва ли объяснит несогласованность амплитуд колебаний давления и горизонтальной скорости, а также различную степень затухания осцилляций внутри области при различных граничных условиях. Также играет роль двухмерность волн, существующих в задаче обтекания.

Работа выполнена при поддержке РФФИ и Белорусского РФФИ (код проекта 00-01-81057 Бел2000_а). Автор благодарит И.В. Абалакина и Т.К. Козубскую за полезные консультации и Б.Н. Четверушкина за поддержку работы.

Литература

1. Дородницын Л.В. Акустические волны и граничные условия в моделях вязких дозвуковых течений: Препринт. – М.: Диалог-МГУ, 1999, 28 с.
2. Дородницын Л.В. Акустика в моделях вязких дозвуковых течений и неотражающие граничные условия // Прикладная математика и информатика, N 3 – М.: Диалог-МГУ, 1999, с.43–64.
3. Четверушкин Б.Н. Кинетически-согласованные схемы в газовой динамике: новая модель вязкого газа, алгоритмы, параллельная реализация, приложения. – М.: Изд. МГУ, 1999, 232 с.
4. Дородницын Л.В., Четверушкин Б.Н. Об одной неявной схеме для моделирования дозвукового течения газа // Матем. моделирование, 1997, т.9, N 5, с.108–118.
5. Thompson K.W. Time-dependent boundary conditions for hyperbolic systems // J. Comp. Phys., 1990, v.89, N 2, pp.439–461.
6. Engquist B., Majda A. Numerical radiation boundary conditions for unsteady transonic flow // J. Comp. Phys., 1981, v.40, N 1, pp.91–103.
7. Bayliss A., Turkel E. Far field boundary conditions for compressible flows // J. Comp. Phys., 1982, v.48, N 2, pp.182–199.
8. Givoli D. Non-reflecting boundary conditions // J. Comp. Phys., 1991, v.94, N 1, pp.1–29.
9. Giles M.B. Nonreflecting boundary conditions for Euler equation calculations // AIAA J., 1990, v.28, N 12, pp.2050–2058.
10. Tourrette L. Artificial boundary conditions for the linearized compressible Navier–Stokes equations // J. Comp. Phys., 1997, v.137, N 1, pp.1–37.
11. Higdon R.L. Numerical absorbing boundary conditions for the wave equation // Math. Comp., 1987, v.49, pp.65–90.
12. Ramahi O.M. Complementary boundary operators for wave propagation problems // J. Comp. Phys., 1997, v.133, N 1, pp.113–128.
13. Tourrette L. Artificial boundary conditions for the linearized compressible Navier–Stokes equations. II. The discrete approach // J. Comp. Phys., 1998, v.144, N 1, pp.151–179.
14. Gustafsson B., Sundström A. Incompletely parabolic problems in fluid dynamics // SIAM J. Appl. Math., 1978, v.35, N 2, pp.343–357.
15. Higdon R.L. Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic waves in stratified media // J. Comp. Phys., 1992, v.101, N 2, pp.386–418.
16. Higdon R.L. Radiation boundary conditions for dispersive waves // SIAM J. Numer. Anal., 1994, v.31, N 1, pp.64–100.
17. Tam C.K.W., Webb J.C. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics // J. Comp. Phys., 1993, v.107, N 2, pp.262–281.
18. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989, 616 с.