

Акустика в моделях вязких дозвуковых течений и неотражающие граничные условия

1. Введение

Проблема моделирования течений вязкого теплопроводного газа в терминах физических переменных не теряет своей актуальности. Именно такой подход позволяет методы, разработанные для решения двумерных задач, легко обобщать на трехмерный случай. В [1] был предложен эффективный алгоритм расчета дозвуковых течений, основанный на двухслойной полуняевской (т.е. с весом $1/2$) схеме для квазигазодинамической (КГД) системы уравнений и для уравнений Навье–Стокса. КГД система возникла как дифференциальное представление кинетически-согласованных разностных схем [2], выводимых из дискретных аналогов уравнения Больцмана. В [3] алгоритм [1] получил дальнейшее обоснование и был распространен на более медленные течения с числом Маха до $M = 0.01$. Однако практика расчетов – как по вышеупомянутой методике, так и по другим подходам – показывает: чем ниже число Маха течения, тем меньше устойчивость вычислительных алгоритмов к высокочастотным колебаниям решений.

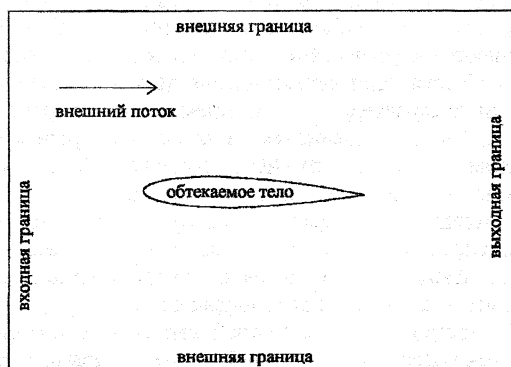


Рис. 1. Схема расчетной области

Рассмотрим типичную задачу о дозвуковом обтекании тела в плоской постановке (рис. 1).

В первоначальном виде параметры внешнего потока задаются на бесконечном удалении от обтекаемого тела. Для численного моделирования, как правило, используется область конечных размеров, в простейшем случае прямоуголь-

ник. Возникает проблема переноса параметров внешнего потока на границы новой области, называемые *искусственными* границами.

Детализируем процедуру перехода от исходной нестационарной задачи к ее конечно-разностной аппроксимации. В исходной постановке задается система четырех дифференциальных уравнений (Эйлера, Навье–Стокса или КГД) на всей плоскости за вычетом обтекаемого тела (в области Ω). Для уравнений ставятся начальные условия, граничные условия на поверхности тела и на бесконечности. Следующий шаг: задаются те же дифференциальные уравнения и начальные условия, но в прямоугольной области без обтекаемого тела $\Omega' \subset \Omega$, те же граничные условия на теле, а также условия на четырех сторонах прямоугольника (рис. 1) – искусственные граничные условия. Наконец,

проводится дискретизация уравнений четырех перечисленных групп на основе принципов, индивидуальных для каждой группы.

Насколько правомерен перенос условий с бесконечности на искусственные границы области? Возможны критерии трех уровней.

1. “Решение соответствующей краевой задачи в Ω' является следом решения исходной краевой задачи, поставленной в Ω ” [4, с.69]: принцип точного переноса граничных условий [5].

2. Решение задачи в ограниченной области Ω' близко к решению исходной задачи в пределах Ω' .

3. Решение задачи в ограниченной области приближает точное решение в некоторой области $\Omega'' \subset \Omega'$ – окрестности обтекаемого тела, где решение представляет практический интерес.

Первый критерий нужно трактовать как программу–максимум, и выполнить его едва ли возможно. Второй критерий вполне реализуем, но лишь для области достаточно большого размера. Третий критерий гораздо менее жесткий, так как он допускает наличие искажений решения вблизи искусственных границ, а запрещает только распространение искажений по всей области. Этому принципу мы и будем следовать.

При численном моделировании дозвуковых внешних течений нередко наблюдаются нефизичные высокочастотные осцилляции газодинамических параметров, и притом во всей расчетной области. Причина кроется в некорректности постановки дифференциальной задачи в ограниченной области: от обтекаемого тела распространяются акустические возмущения и отражаются от искусственных границ внутрь области. При низких числах Маха осцилляции скорости становятся сравнимыми с характерным значением самой скорости. Трудности усугубляются, когда проводится моделирование задач аэроакустики и необходимо отличать физические колебания от нефизических, вызванных введением искусственных границ. Акустические волны в невязкой и вязкой среде различны. Более того, амплитуда и характер колебаний зависит не непосредственно от числа Рейнольдса задачи, а от способа описания вязких эффектов в модели (КГД либо Навье–Стокса) и ряда других параметров. Наконец, важную роль играет разностная аппроксимация уравнений.

Основная цель данной работы – построение условий свободного прохождения акустических волн через искусственные границы: так называемых *неотражающих граничных условий*. Это, как правило, дифференциальные уравнения, содержащие производные по пространству и по времени. Имеется довольно обширная литература о неотражающих граничных условиях для уравнений Эйлера [6–9]. Для уравнений Навье–Стокса сравнительно мало результатов, где бы реально учитывалась вязкость [10]. Первая попытка построения акустических условий специально для КГД уравнений предпринята в [11]. Нетривиальным вопросом является разностная аппроксимация неотражающих граничных условий, и ей уделяется внимание в [6, 9, 12]. Специфика нашей ситуации в том, что разностные граничные условия ставятся не для волнового уравнения, а для системы уравнений газодинамической модели.

Обсудим постановку искусственных граничных условий в области Ω' (рис. 1). Существует общий принцип задания условий для уравнений Эйлера [13]: на

каждой границе фиксировать столько значений параметров, сколько волн (т.е. характеристик) входят через нее в область (от 0 до 4). Для уравнений Навье–Стокса, относящихся к неполностью параболическим системам [14], требуется не менее трех условий на границе, а наличие четвертого зависит от направления определенной характеристики. Для КГД системы, а также для разностных схем с трехточечными шаблонами по x и по y , необходимо 4 условия на каждой границе.

Будем руководствоваться следующим правилом: на каждой границе задавать условия первого рода в количестве, определяемом принципом входящих волн [13], а остальные граничные условия использовать дифференциальные. В качестве последних допустимы условия экстраполяции нулевого или первого порядка (стационарные), неотражения акустических волн (нестационарные) и т.д. По-видимому, на границе нет необходимости ставить более одного акустического условия. Физические соображения позволяют надеяться на то, что подавление осцилляций какого-либо одного параметра автоматически стабилизирует систему в целом. Учитывая опыт расчетов медленных течений по кинетически-согласованным схемам и теоретические основания [7], будем ставить на входной и выходной границах области неотражающие условия для давления p , беря в качестве остальных граничных условий те или иные стационарные уравнения.

В [1] теоретически и экспериментально установлено, что при описании пограничного слоя уравнения Навье–Стокса и квазигазодинамическая система сходны, если их диссипативные параметры согласованы. Алгоритмы, основанные на КГД системе, более устойчивы, чем схемы для уравнений Навье–Стокса. Одной из причин этого является различие описываемых обеими системами акустических волн, анализ которых содержится в данной работе. Кроме того, здесь строятся неотражающие граничные условия для уравнений Эйлера, Навье–Стокса и КГД, а также разностные аппроксимации этих условий на прямоугольной сетке. Влияние граничных условий на затухание осцилляций исследуется численно на примере задачи об обтекании пластины при числе Маха $M = 0.01$.

2. Линеаризация квазигазодинамической системы и уравнений Навье–Стокса

Пусть физические параметры удовлетворяют основным газодинамическим уравнениям. Наша цель – получить уравнения, которым будут удовлетворять малые возмущения этих параметров.

Систему КГД уравнений для двумерной плоской геометрии запишем в векторном виде:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y}. \quad (2.1)$$

Здесь

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E + p) \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{pmatrix}, \quad R = \tau \left(\frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} \right),$$

$$S = \tau \left(\frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} \right), \quad R_x = \begin{pmatrix} \rho u^2 + p \\ \rho u^3 + 3pu \\ \rho u^2 v + pv \\ u^2(E + 2p) + p\rho^{-1}(E + p) \end{pmatrix},$$

$$R_y = S_x = \begin{pmatrix} \rho uv \\ \rho u^2 v + pv \\ \rho uv^2 + pu \\ uv(E + 2p) \end{pmatrix}, \quad S_y = \begin{pmatrix} \rho v^2 + p \\ \rho uv^2 + pu \\ \rho v^3 + 3pv \\ v^2(E + 2p) + p\rho^{-1}(E + p) \end{pmatrix},$$

ρ – плотность, $\rho u, \rho v$ – компоненты импульса, E – полная энергия:

$E = r(e + 0.5(u^2 + v^2))$, $e = (g-1)^{-1}p/r$, $p = rRT$,

γ – показатель адиабаты, p – давление, R – газовая постоянная,

T – температура, τ – характерное время свободного пробега, связанное с навье-стоксовской вязкостью m :

$$t = m/p. \quad (2.2)$$

В качестве физических параметров выберем плотность r , две компоненты скорости u, v и давление p . Разложим их в сумму невозмущенных значений (фона) и возмущений:

$$(\rho u v p)^T = (\bar{\rho} \bar{u} \bar{v} \bar{p})^T + U, \quad U = (\rho' u' v' p')^T.$$

Векторы, фигурирующие в (2.1), представим в виде:

$$Q = \bar{Q} + PU + \tilde{Q}, \quad F = \bar{F} + A_x U + \tilde{F}, \quad G = \bar{G} + A_y U + \tilde{G},$$

$$R_x = \bar{R}_x + B_{xx}U + \tilde{R}_x, \quad R_y = \bar{R}_y + B_{yy}U + \tilde{R}_y, \quad S_y = \bar{S}_y + B_{yy}U + \tilde{S}_y. \quad (2.3)$$

Прямые черты отмечены функции от невозмущенных величин; введены матрицы $P, A_x, A_y, B_{xx}, B_{yy}, B_{xy}$, также не зависящие от возмущений; тильдами отмечены векторы, состоящие из вторых и более высоких степеней возмущений.

Исходя из (2.1), построим уравнение, линейное относительно вектора возмущений U , приняв следующие предположения:

- (i) основные уравнения справедливы для фоновых величин;
- (ii) членами $O(U^2)$ пренебрегаем.

С учетом гипотез (i), (ii), из (2.1) следует уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t}(PU) + \frac{\partial}{\partial x}(A_x U) + \frac{\partial}{\partial y}(A_y U) = \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x}(B_{xx}U) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial y}(B_{xy}U) + \frac{\partial}{\partial y} \tau \frac{\partial}{\partial x}(B_{xy}U) + \frac{\partial}{\partial y} \tau \frac{\partial}{\partial y}(B_{yy}U), \quad (2.4)$$

(iii) Дальнейшие рассуждения будут основываться на еще одной гипотезе: фоновые параметры изменяются плавно по сравнению с возмущениями (принцип замороженных коэффициентов).

Поясним сказанное. Пусть $\varphi = \bar{\varphi} + \varphi'$ – произвольный газодинамический параметр, состоящий из фона и возмущения. Будем предполагать, что

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right| \ll \left| \frac{\partial \varphi'}{\partial \alpha} \right|, \quad \text{где } a = t, x, y.$$

В ряде работ [6, 7, 10, 14] рассматривается распространение акустических возмущений на постоянном фоне ($\bar{\varphi} = \text{const}$). Наш анализ сведется фактически к той же ситуации, и только при окончательном выводе граничных условий придется вспомнить о локальном характере фоновых параметров, а также, по мере необходимости, брать от них производные.

Умножая (2.4) слева на P^{-1} и применяя принцип замороженных коэффициентов (iii), получаем уравнение:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + C_x \frac{\partial U}{\partial x} + C_y \frac{\partial U}{\partial y} = \tau \left(D_{xx} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2D_{xy} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + D_{yy} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right). \quad (2.5)$$

Здесь участвуют коэффициентные матрицы $C_a = P^{-1}A_a$, $D_{ab} = P^{-1}B_{ab}$:

$$C_x = \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{u} & 0 & 1/\bar{\rho} \\ 0 & 0 & \bar{u} & 0 \\ 0 & \bar{\gamma}\bar{\rho} & 0 & \bar{u} \end{pmatrix}, \quad C_y = \begin{pmatrix} \bar{v} & 0 & \bar{\rho} & 0 \\ 0 & \bar{v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{v} & 1/\bar{\rho} \\ 0 & 0 & \bar{\gamma}\bar{\rho} & \bar{v} \end{pmatrix},$$

$$D_{xx} = \begin{pmatrix} \bar{u}^2 & 2\bar{\rho}\bar{u} & 0 & 1 \\ 0 & \bar{u}^2 + 3\bar{\rho}/\bar{\rho} & 0 & 2\bar{u}/\bar{\rho} \\ 0 & 0 & \bar{u}^2 + \bar{\rho}/\bar{\rho} & 0 \\ -\bar{c}^4/\gamma & 2\bar{\gamma}\bar{\rho}\bar{u} & 0 & \bar{u}^2 + 2\bar{c}^2 \end{pmatrix},$$

$$D_{xy} = \begin{pmatrix} \bar{u}\bar{v} & \bar{\rho}\bar{v} & \bar{\rho}\bar{u} & 0 \\ 0 & \bar{u}\bar{v} & \bar{\rho}/\bar{\rho} & \bar{v}/\bar{\rho} \\ 0 & \bar{\rho}/\bar{\rho} & \bar{u}\bar{v} & \bar{u}/\bar{\rho} \\ 0 & \bar{\gamma}\bar{\rho}\bar{v} & \bar{\gamma}\bar{\rho}\bar{u} & \bar{u}\bar{v} \end{pmatrix},$$

$$D_{yy} = \begin{pmatrix} \bar{v}^2 & 0 & 2\bar{\rho}\bar{v} & 1 \\ 0 & \bar{v}^2 + \bar{\rho}/\bar{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{v}^2 + 3\bar{\rho}/\bar{\rho} & 2\bar{v}/\bar{\rho} \\ -\bar{c}^4/\gamma & 0 & 2\bar{\gamma}\bar{\rho}\bar{v} & \bar{v}^2 + 2\bar{c}^2 \end{pmatrix},$$

где \bar{c} – невозмущенная скорость звука: $\bar{c}^2 = gp/r$.

Уравнение (2.5) представляет собой векторную форму записи квазигазодинамической системы, линеаризованной относительно фонового течения. Следует отметить, что принцип замороженных коэффициентов (iii) фактически необходим для трансформации только правых частей системы (2.4);

в левых же частях коэффициенты выносятся из-под знаков производных благодаря постулату (i) (см. [11]).

Систему уравнений Навье–Стокса выпишем по аналогии с КГД системой (2.1):

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial R^{NS}}{\partial x} + \frac{\partial S^{NS}}{\partial y}, \quad (2.6)$$

где левые части (2.6) и (2.1) совпадают, а векторы R^{NS} и S^{NS} представимы в следующем виде:

$$\begin{aligned} R^{NS} &= (0 \quad r_x \quad r_y \quad ur_x + vs_x + l\partial T/\partial x)^T, \\ S^{NS} &= (0 \quad s_x \quad s_y \quad ur_y + vs_y + l\partial T/\partial y)^T, \\ r_x &= \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad r_y = s_x = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad s_y = \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ \lambda &= \frac{\gamma R\mu}{(\gamma-1)Pr}, \quad \mu = \nu\rho. \end{aligned}$$

Здесь l, m, n – коэффициенты, соответственно, теплопроводности, динамической и кинематической вязкости, Pr – число Прандтля.

Проведем линеаризацию (2.6), используя часть формул из (2.3) и полагая

$$\begin{aligned} R^{NS} &= \bar{R}^{NS} + \frac{\partial}{\partial x} (\nu B_{xx}^{NS} U) + \frac{\partial}{\partial y} (\nu B_{xy}^{NS} U), \\ S^{NS} &= \bar{S}^{NS} + \frac{\partial}{\partial x} (\nu B_{yx}^{NS} U) + \frac{\partial}{\partial y} (\nu B_{yy}^{NS} U). \end{aligned} \quad (2.7)$$

При выводе (2.7) мы воспользовались принципом замороженных коэффициентов (iii). Затем на основании формул (2.7) и постулатов (i)–(iii) приходим к линеаризованным уравнениям Навье–Стокса

$$\frac{\partial U}{\partial t} + C_x \frac{\partial U}{\partial x} + C_y \frac{\partial U}{\partial y} = \nu \left(D_{xx}^{NS} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2D_{xy}^{NS} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + D_{yy}^{NS} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right), \quad (2.8)$$

где матрицы C_x и C_y те же, что в (2.5), $D_{xx}^{NS} = P^{-1}B_{xx}^{NS}$, $2D_{xy}^{NS} = P^{-1}(B_{xy}^{NS} + B_{yx}^{NS})$, $D_{yy}^{NS} = P^{-1}B_{yy}^{NS}$. Структура этих матриц такова:

$$D_{xx}^{NS} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\bar{c}^2/Pr & 0 & 0 & \gamma/Pr \end{pmatrix}, \quad D_{xy}^{NS} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_{yy}^{MS} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 0 \\ -\bar{c}^2/Pr & 0 & 0 & \gamma/Pr \end{pmatrix}.$$

Чтобы исследовать характер волн, которые распространяются в вязких средах, описываемых уравнениями КГД и Навье–Стокса, желательно свести линеаризованную систему к одному замкнутому уравнению волнового типа с возможной дисперсией и диссипацией: будем называть его *обобщенным волновым уравнением (ОВУ)*.

3. Неотражающие граничные условия для уравнений Эйлера

Квазигазодинамическая система (2.1) переходит в уравнения Эйлера, если положить время свободного пробега $t=0$. Соответственно, линеаризованная система (2.5) принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} + C_x \frac{\partial U}{\partial x} + C_y \frac{\partial U}{\partial y} = 0. \quad (3.1)$$

Линеаризация уравнений Эйлера может быть проведена независимо на основе предположений (i), (ii).

Уравнения системы (3.1) станут проще, если ввести лагранжеву производную по времени

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.2)$$

Тогда (3.1) эквивалентна следующей системе:

$$\frac{dU}{dt} + \hat{C}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \hat{C}_y \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad (3.3)$$

где

$$\hat{C}_x = C_x - \bar{u}I = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\bar{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\eta} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{C}_y = C_y - \bar{v}I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\bar{\rho} \\ 0 & 0 & \bar{\eta} & 0 \end{pmatrix},$$

I – единичная матрица. Запишем (3.3) покомпонентно:

$$\begin{aligned} \rho'_i + \bar{\rho}(u'_x + v'_y) &= 0, & u'_i + \bar{\rho}^{-1} p'_x &= 0, \\ v'_i + \bar{\rho}^{-1} p'_y &= 0, & p'_i + \bar{\eta}(u'_x + v'_y) &= 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

Нижними индексами для краткости обозначены производные по пространству и по времени, в данном случае лагранжева производная (3.2). Из (3.4) с очевидностью вытекают уравнения:

$$p'_i = \bar{c}^2 \rho'_i, \quad u'_y = v'_x, \quad (3.5)$$

выражающие постоянство энтропии лагранжевой частицы и ее вихря (теорему Томсона).

Вернемся к векторной записи (3.3). Из данного уравнения в предположении (iii) следует уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 U}{dt^2} - \bar{C}_x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - (\bar{C}_x \bar{C}_y + \bar{C}_y \bar{C}_x) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \bar{C}_y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad (3.6)$$

где все коэффициентные матрицы оказываются весьма разреженными. В покомпонентной записи (3.6) выглядит:

$$\begin{aligned} p'_{tt} - (p'_{xx} + p'_{yy}) &= 0, \quad u'_{tt} - \bar{c}^2 (u'_{xx} + v'_{yy}) = 0, \\ v'_{tt} - \bar{c}^2 (u'_{xy} + v'_{yy}) &= 0, \quad p'_{tt} - \bar{c}^2 (p'_{xx} + p'_{yy}) = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Сформулируем неотражающие граничные условия на входе и на выходе (рис. 1) в терминах возмущения давления p' . Выпишем еще раз последнее из уравнений (3.7):

$$p'_{tt} - \bar{c}^2 (p'_{xx} + p'_{yy}) = 0 \quad (3.8)$$

— волновое уравнение для возмущения давления в системе координат, движущейся со скоростью (\bar{u}, \bar{v}) . В неподвижной системе координат оно приобретает вид:

$$p'_{tt} + 2\bar{u}p'_{xt} + 2\bar{v}p'_{yt} - (\bar{c}^2 - \bar{u}^2)p'_{xx} + 2\bar{u}\bar{v}p'_{xy} - (\bar{c}^2 - \bar{v}^2)p'_{yy} = 0. \quad (3.9)$$

Будем искать решение в виде гармонической волны

$$p' = \bar{p} \exp\{i(\omega t - k_x x - k_y y)\}, \quad (3.10)$$

где ω — частота, k_x и k_y — волновые числа.

Начнем с более простого случая неподвижного фона $\bar{u} = \bar{v} = 0$, тем самым возвращаясь к уравнению (3.8). Подставляя p' из (3.10) в (3.8), получаем образ Фурье уравнения (3.8)

$$-\omega^2 + \bar{c}^2 (k_x^2 + k_y^2) = 0. \quad (3.11)$$

Затем, следуя [8], разрешим (3.11) относительно k_x , чтобы выяснить, какие волны распространяются вдоль оси x . Получаем:

$$k_x = k_x^\pm \equiv \pm \bar{k} \sqrt{1 - s^2}, \quad \text{где } \bar{k} = \omega / \bar{c}, \quad s = k_y / \bar{k}, \quad |s| \leq 1. \quad (3.12)$$

Здесь k_x^+ соответствует волне, бегущей вправо, k_x^- — волне, бегущей влево. Далее на левой границе задается условие неотражения волны, падающей на нее по нормали [8, 9]: $k_x = k_x^-$; на правой границе — аналогично: $k_x = k_x^+$. Преобразы Фурье этих выражений являются неотражающими граничными условиями для уравнения (3.8).

Граничные условия, получаемые в результате описанной процедуры, представляют собой уравнения, нелокальные по времени и пространству. Локальное уравнение возникает при аппроксимации $\sqrt{1 - s^2}$ рациональной функцией, например [8, 9]:

$$\sqrt{1 - s^2} = 1 + O(s^2), \quad (3.13a)$$

$$\sqrt{1-s^2} = 1 - 0.5s^2 + O(s^4). \quad (3.136)$$

При подстановке в (3.12) приближения (3.13а) первого порядка по s (без учета $O(s^2)$) имеем $k_x = \pm \bar{k}$. В качестве правого граничного условия задается уравнение

$$p'_t + \bar{c}p'_x = 0.$$

Аналогично строится левое граничное условие.

При использовании следующего приближения (3.13б) радикала (третьего порядка по s) получается соотношение

$$2\bar{c}\omega k_x = 2\omega^2 - \bar{c}^2 k_y^2,$$

дающее после обратного преобразования Фурье:

$$2\bar{c}p'_{xt} + 2p'_{tt} - \bar{c}^2 p'_{yy} = 0.$$

Наличие второй производной по времени создает неудобство в нашем подходе, поскольку граничные условия предназначены для двухслойных схем [1, 3]. Заменим p'_{tt} с помощью исходного уравнения (3.8) и получим в итоге уравнение

$$2p'_{xt} + 2\bar{c}p'_{xx} + \bar{c}p'_{yy} = 0,$$

пригодное в качестве правого граничного условия. Условие на левой границе имеет аналогичный вид.

Рассмотрим случай произвольных скоростей \bar{u} , \bar{v} . Образ Фурье уравнения (3.9) есть

$$-\omega^2 + 2\bar{u}\omega k_x + 2\bar{v}\omega k_y + (\bar{c}^2 - \bar{u}^2)k_x^2 - 2\bar{u}\bar{v}k_x k_y + (\bar{c}^2 - \bar{v}^2)k_y^2 = 0. \quad (3.14)$$

Разрешим (3.14) относительно k_x и представим решение в виде разложения:

$$k_x = k_x^\pm, \text{ где } k_x^\pm = \pm \frac{\omega}{\bar{c} \pm \bar{u}} \mp \frac{\bar{v}k_y}{\bar{c} \pm \bar{u}} \mp \frac{\bar{c}k_y^2}{2\omega} + O(\bar{k}s^3).$$

Три последовательных аппроксимации $k_x = k_x^+$:

$$k_x = \frac{\omega}{\bar{c} + \bar{u}}, \quad k_x = \frac{\omega - \bar{v}k_y}{\bar{c} + \bar{u}}, \quad k_x = \frac{\omega - \bar{v}k_y}{\bar{c} + \bar{u}} - \frac{\bar{c}k_y^2}{2\omega},$$

— приводят к трем вариантам правого граничного условия, соответственно,

$$p'_t + (\bar{c} + \bar{u})p'_x = 0, \quad (3.15a)$$

$$p'_t + (\bar{c} + \bar{u})p'_x + \bar{v}p'_y = 0, \quad (3.15б)$$

$$(\bar{c} - \bar{u})p'_{xt} - \bar{v}p'_{yt} + (\bar{c}^2 - \bar{u}^2)p'_{xx} - 2\bar{u}\bar{v}p'_{xy} + (0.5\bar{c}(\bar{c} - \bar{u}) - \bar{v}^2)p'_{yy} = 0. \quad (3.15в)$$

Уравнение (3.15в) получается после замены p'_t с помощью (3.9).

В заключение параграфа скажем о связи между колебаниями давления и остальных параметров. Простейшее граничное условие (3.15а) фактически описывает неотражение плоских волн. Плоские гармонические волны возмущений давления, плотности и продольной скорости имеют общий вид

$$p' = \bar{p} \exp\{i\omega t - ikx\}, \quad \rho' = \bar{\rho} \exp\{i\omega t - ikx\}, \quad u' = \bar{u} \exp\{i\omega t - ikx\},$$

где ω и k одинаковы для всех величин. Подстановка трех выписанных выражений в систему (3.4) дает соотношение между амплитудами волн возмущений:

$$\hat{\rho} / \bar{\rho} = \hat{u} / \bar{c} = \hat{p} / (\gamma \bar{p}).$$

Заметим, что относительная амплитуда колебаний скорости \hat{u} / \bar{u} обратно пропорциональна числу Маха \bar{u} / \bar{c} . Следовательно, чем медленнее течение, тем сильнее сказываются общие колебания среды на осцилляциях скорости.

4. Вывод уравнений волн в вязких средах

В предыдущем параграфе были получены волновые уравнения, вытекающие из уравнений Эйлера. Квазигазодинамическая система и уравнения Навье–Стокса сводятся к обобщенным волновым уравнениям на основе аналогичных приемов, хотя и более сложных. Начнем с преобразования линеаризованной системы Навье–Стокса.

Перепишем (2.8), используя лагранжеву производную по времени (3.2), по аналогии с (3.3):

$$\frac{dU}{dt} + \hat{C}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \hat{C}_y \frac{\partial U}{\partial y} = \nu \left(D_{xx}^{NS} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2D_{xy}^{NS} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + D_{yy}^{NS} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right), \quad (4.1)$$

или – покомпонентно –

$$\rho'_t + \rho(u'_x + v'_y) = 0, \quad (4.2a)$$

$$u'_t + \bar{\rho}^{-1} p'_x = \nu \left(\frac{4}{3} u'_{xx} + \frac{1}{3} v'_{xy} + u'_{yy} \right), \quad (4.2б)$$

$$v'_t + \bar{\rho}^{-1} p'_y = \nu \left(v'_{xx} + \frac{1}{3} u'_{xy} + \frac{4}{3} v'_{yy} \right), \quad (4.2в)$$

$$p'_t + \gamma \bar{p} (u'_x + v'_y) = -\frac{\gamma}{Pr} \bar{c}^2 (\rho'_{xx} + \rho'_{yy}) + \frac{\gamma}{Pr} \gamma (p'_{xx} + p'_{yy}). \quad (4.2г)$$

Преобразуем (4.1) к векторному ОВУ типа (3.6):

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 U}{dt^2} - \hat{C}_x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - (\hat{C}_x \hat{C}_y + \hat{C}_y \hat{C}_x) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \hat{C}_y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \\ & = \nu \left[\frac{d}{dt} \left(D_{xx}^{NS} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2D_{xy}^{NS} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + D_{yy}^{NS} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) - \right. \\ & \quad - \hat{C}_x D_{xx}^{NS} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} - (\hat{C}_y D_{xx}^{NS} + 2\hat{C}_x D_{xy}^{NS}) \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial y} - \\ & \quad \left. - (2\hat{C}_y D_{xy}^{NS} + \hat{C}_x D_{yy}^{NS}) \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^2} - \hat{C}_y D_{yy}^{NS} \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} \right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Впредь будем придерживаться принципа:

(iv) в ОВУ члены, имеющие второй порядок по параметру вязкости, можно игнорировать.

При переходе от (4.1) к (4.3) в правой части уравнения давления (4.2г) появляется выражение $\rho'_{xxt} + \rho'_{yyt}$. Заменим его, беря лапласиан от первого уравнения (3.5), которое теперь справедливо с точностью $O(n)$. Отсюда

$$p'_{tt} - \bar{c}^2 (p'_{xx} + p'_{yy}) = \nu \frac{\gamma - 1}{Pr} (p'_{xxt} + p'_{yyt}) - \frac{4}{3} \nu \gamma \bar{p} (u'_{xxx} + v'_{xxy} + u'_{xyy} + v'_{yyy}).$$

Чтобы избавиться от u' и v' в последнем уравнении, достаточно применить лапласиан к (4.2г). В итоге получаем обобщенное волновое уравнение для возмущения давления:

$$p'_n - \bar{c}^2 (p'_{xx} + p'_{yy}) = v^* (p'_{xt} + p'_{yt}), \quad \text{где } v^* = v \left(\frac{\gamma-1}{Pr} + \frac{4}{3} \right). \quad (4.4)$$

Получим из линеаризованной квазигазодинамической системы (2.5) ОВУ для возмущения давления. При этом мы воспользуемся определенной близостью между КГД системой и уравнениями Навье–Стокса. Учтем, во-первых, соотношение (2.2) между диссипативными параметрами двух моделей, откуда следует, что

$$\gamma v = \tau \bar{c}^2. \quad (4.5)$$

Во-вторых, будем игнорировать любые величины второго порядка по t , возникающие в ходе выкладок, следуя принципу (iv).

Перепишем линеаризованную КГД систему (2.5) в терминах лагранжевой производной (3.2) по образцу (3.3), (4.1):

$$\frac{dU}{dt} + \hat{C}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \hat{C}_y \frac{\partial U}{\partial y} = \tau \left(D_{xx} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2D_{xy} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + D_{yy} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right). \quad (4.6)$$

В ряде ситуаций правую часть уравнения будет достаточно представить как $O(t)$. Нам понадобится дифференциальное следствие (2.5)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - C_x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - (C_x C_y + C_y C_x) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - C_y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = O(\tau). \quad (4.7)$$

Введем также сокращенные обозначения для матричных выражений:

$$2C_{xy} = C_x C_y + C_y C_x, \quad 2\hat{C}_{xy} = \hat{C}_x \hat{C}_y + \hat{C}_y \hat{C}_x. \quad (4.8)$$

Первая из двух формул сразу упрощает запись (4.7).

Матрицы из правой части (4.6) удобно представить в виде следующих сумм:

$$D_{xx} = C_x^2 + \hat{D}_{xx}, \quad D_{xy} = C_{xy} + \hat{D}_{xy}, \quad D_{yy} = C_y^2 + \hat{D}_{yy}. \quad (4.9)$$

Нововведенные матрицы

$$\hat{D}_{xx} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3-\gamma}{\gamma} \bar{c}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{c}^2/\gamma & 0 \\ -\bar{c}^4/\gamma & 0 & 0 & \bar{c}^2 \end{pmatrix}, \quad \hat{D}_{xy} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2-\gamma}{2\gamma} \bar{c}^2 & 0 \\ 0 & \frac{2-\gamma}{2\gamma} \bar{c}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{D}_{yy} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{c}^2/\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3-\gamma}{\gamma} \bar{c}^2 & 0 \\ -\bar{c}^4/\gamma & 0 & 0 & \bar{c}^2 \end{pmatrix}$$

имеют сходную структуру с присутствующими в линеаризованных уравнениях Навье–Стокса (2.8) матрицами $D_{\alpha\beta}^{NS}$, о чем более подробно сказано в [11].

Преобразуем правую часть (4.6), подставляя в нее (4.9). Все члены с матрицами C_x^2 , C_{xy} , C_y^2 удачным образом превращаются, согласно (4.7), (4.8), в один простой член, и (4.6) приобретает вид

$$\frac{dU}{dt} + \hat{C}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \hat{C}_y \frac{\partial U}{\partial y} = \tau \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \hat{D}_{xx} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\hat{D}_{xy} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \hat{D}_{yy} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right). \quad (4.10)$$

Уравнение (4.10) отличается от своего навье-стоксовского аналога (4.1) фактически только наличием в правой части второй частной производной U по времени. Из (4.10) следует векторное ОВУ, близкое к (4.3). Все члены, берущие начало от $\partial^2 U / \partial t^2$, достаточно гибко преобразуются к форме, где коэффициентные матрицы почти диагональные. Подробнее об этом рассказывается в [11]. В результате система принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 U}{dt^2} - \hat{C}_x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2\hat{C}_{xy} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \hat{C}_y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \\ & = \tau \left[\frac{d}{dt} \left(\tilde{D}_{xx} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\tilde{D}_{xy} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \tilde{D}_{yy} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) - \right. \\ & \left. - D_{xxx} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} - D_{xxy} \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial y} - D_{xyy} \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^2} - D_{yyy} \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} \right], \quad (4.11) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{xx} &= \hat{D}_{xx} + 2\hat{C}_x^2 + 2\bar{u}^2 I, & \tilde{D}_{xy} &= \hat{D}_{xy} + 2\hat{C}_{xy} + 2\bar{u}\bar{v} I, \\ \tilde{D}_{yy} &= \hat{D}_{yy} + 2\hat{C}_y^2 + 2\bar{v}^2 I, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{xxx} &= \hat{C}_x \hat{D}_{xx} + 4\bar{u} \hat{C}_x^2, & D_{xxy} &= \hat{C}_y \hat{D}_{xx} + 2\hat{C}_x \hat{D}_{xy} + 4\bar{v} \hat{C}_x^2 + 8\bar{u} \hat{C}_{xy}, \\ D_{xyy} &= 2\hat{C}_y \hat{D}_{xy} + \hat{C}_x \hat{D}_{yy} + 8\bar{v} \hat{C}_{xy} + 4\bar{u} \hat{C}_y^2, & D_{yyy} &= \hat{C}_y \hat{D}_{yy} + 4\bar{v} \hat{C}_y^2. \end{aligned}$$

Чтобы получить из системы (4.11) замкнутое уравнение возмущения давления, достаточно выполнить те же действия, которые применялись к навье-стоксовской системе (4.3). В итоге ОВУ для возмущения давления в модели КГД выглядит так:

$$\begin{aligned} p'_t - \bar{c}^2 (p'_{xx} + p'_{yy}) &= \\ &= 2\tau \left[\left(\bar{u}^2 + \frac{\gamma+1}{\gamma} \bar{c}^2 \right) p'_{xxt} + 2\bar{u}\bar{v} p'_{xyt} + \left(\bar{v}^2 + \frac{\gamma+1}{\gamma} \bar{c}^2 \right) p'_{yyt} - \right. \\ & \left. - 2\bar{c}^2 (\bar{u} p'_{xxx} + \bar{v} p'_{xxy} + \bar{u} p'_{xyy} + \bar{v} p'_{yyy}) \right]. \quad (4.12) \end{aligned}$$

5. Неотражающие граничные условия с учетом вязкости

В настоящем параграфе мы выведем акустические условия на правой границе для обобщенных волновых уравнений в моделях Навье-Стокса и КГД. Ориентируясь на простейшее условие (3.15а) для уравнений Эйлера, будем рассматривать неотражение одномерных волн. Эти волны в двух моделях вязких течений совершенно аналогичны.

В одномерном случае ОВУ для уравнений Навье–Стокса (4.4) имеет в неподвижной системе координат вид

$$p'_u + 2\bar{u}p'_{xt} - (\bar{c}^2 - \bar{u}^2)p'_{xx} = v^*(p'_{xxt} + \bar{u}p'_{xxx}), \quad (5.1)$$

а аналогичное уравнение (4.12) для КГД системы:

$$p'_u + 2\bar{u}p'_{xt} - (\bar{c}^2 - \bar{u}^2)p'_{xx} = 2\tau \left[(\bar{u}^2 + \frac{\gamma-1}{\gamma}\bar{c}^2) p'_{xxt} + \bar{u}(\bar{u}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma}\bar{c}^2) p'_{xxx} \right]. \quad (5.2)$$

Легко заметить, что уравнения (5.1) и (5.2) различаются только коэффициентами перед третьими производными и представимы в общей форме

$$p'_u + 2\bar{u}p'_{xx} - (\bar{c}^2 - \bar{u}^2)p'_{xxx} = \nu_1 p'_{xxt} + \nu_2 \bar{u} p'_{xxx}. \quad (5.3)$$

Будем рассматривать плоские гармонические волны, удовлетворяющие (5.3):

$$p' = \bar{p} \exp\{i\omega t - ikx\}, \quad \omega \in \mathbf{R}, \quad k \in \mathbf{C}. \quad (5.4)$$

Из физических соображений частота считается вещественной, так как подразумевается наличие на объекте стационарных колебательных источников постоянной интенсивности. Волновое число при этом будет комплексным, поскольку в пространстве могут распространяться затухающие волны.

Подстановка (5.4) в (5.3) дает его образ Фурье:

$$-\omega^2 + 2\bar{u}\omega k + (\bar{c}^2 - \bar{u}^2)\omega^2 = -i(\nu_1 \omega k^2 - \nu_2 \bar{u} k^3). \quad (5.5)$$

Необходимо разрешить относительно k кубическое уравнение (5.5), причем нас интересует лишь волновое число звуковой волны, бегущей вправо, $k = k^+ \approx \omega/(\bar{c} + \bar{u})$. (Бегущая влево волна полностью ей аналогична.)

$$k^+ = \frac{\omega}{\bar{c} + \bar{u}} [1 - is + O(s^2)], \quad \text{где } s = \omega i^*, \quad (5.6)$$

а коэффициент i^* различен в двух моделях: для навье–стоксовских волн (5.1)

$$\tau^* = \frac{\nu}{(\bar{c} + \bar{u})^2} \left(\frac{\gamma-1}{2\text{Pr}} + \frac{2}{3} \right), \quad (5.7)$$

тогда как для волн (5.2) в квазигазодинамической среде

$$\tau^* = \nu \left(\gamma \bar{c}^{-2} + (\bar{c} + \bar{u})^{-2} \right). \quad (5.8)$$

Величины $O(s^2)$ мы будем игнорировать, ибо они эквивалентны членам второго порядка по вязкости в полученных ранее ОВУ. Приближенное решение ОВУ (5.3) имеет вид:

$$p' = \bar{p} e^{-x/L^*} \cos(\omega t - \omega x/(\bar{c} + \bar{u})), \quad \text{где } L^* = (\bar{c} + \bar{u})/(\tau^* \omega^2). \quad (5.9)$$

L^* – характерное расстояние затухания волн, зависящее от частоты колебания.

Требуется задать на правой границе условие неотражения затухающей волны (5.9). Для $k = k^+$ из (5.6) справедливо уравнение

$$i\omega - i(\bar{c} + \bar{u})k = -\tau^* \omega^2,$$

имеющее прообраз Фурье

$$p'_t + (\bar{c} + \bar{u})p'_x = \tau^* p''_{tt}.$$

Поскольку вторая производная по времени нежелательна для нас, заменим p''_{tt} с помощью дифференциальных следствий из предыдущего уравнения:

$$p''_{tt} + (\bar{c} + \bar{u})p'_{xt} = O(\tau), \quad p'_t - (\bar{c} + \bar{u})^2 p'_{xx} = O(\tau).$$

(Подчеркнем, что последнее уравнение верно только для волн, бегущих вправо, но не влево.) Оптимальный вариант замены p'_u содержится в уравнении

$$p'_t + (\bar{c} + \bar{u})p'_x + \tau^*(\bar{c} + \bar{u})(2p'_{xt} + (\bar{c} + \bar{u})p'_{xx}) = 0, \quad (5.10)$$

которое и будет использоваться как неотражающее граничное условие на выходе. Величина t' определяется, в зависимости от модели, по формуле (5.7) либо (5.8). Левое искусственное граничное условие выглядит аналогично.

6. Разностная аппроксимация граничных условий

Для корректного задания разностных граничных условий недостаточно анализировать дифференциальные граничные условия, а необходимо обратиться к исходной разностной схеме. Данный принцип соблюден в [12, 15] при построении дискретных граничных условий. Акустические волны, описываемые разностными схемами для уравнений Эйлера, Навье–Стокса и КГД, имеют существенные особенности по сравнению с аналогичными дифференциальными случаями.

В [1, 3] рассматривались полуявные кинетически-согласованные схемы, аппроксимирующие КГД уравнения, а также полуявные схемы для уравнений Навье–Стокса. Представим их, по аналогии с (2.1), (2.6), в векторном виде:

$$Q_t + 0.5 \left(F_x^{n+1} + F_x^n \right) + 0.5 \left(G_y^{n+1} + G_y^n \right) = O(\tau). \quad (6.1)$$

Здесь использованы стандартные индексные обозначения разностных операторов [16]. Правая часть, обозначенная как $O(\tau)$, различна в системах КГД и Навье–Стокса и состоит из вторых разностных производных по пространственной сетке. Полуявная схема (6.1) аппроксимирует со вторым порядком по временному шагу другое уравнение – дифференциальное по времени:

$$\partial Q / \partial t + F_x + G_y = O(\tau). \quad (6.2)$$

При этом уравнение (6.1) проявляет практически те же свойства с точки зрения акустики, что и (6.2), исследованием которого мы и ограничимся.

Все преобразования дифференциальных уравнений, проведенные в предыдущих параграфах, можно повторить для дискретной модели (6.2). Отличие состоит лишь в том, что вместо пространственных производных будут фигурировать конечные разности. Векторное ОВУ для возмущений принимает вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2\bar{u} \frac{\partial}{\partial t} U_x + 2\bar{v} \frac{\partial}{\partial t} U_y - \tilde{C}_{xx} U_{xx} - 2\tilde{C}_{xy} U_{xy} - \tilde{C}_{yy} U_{yy} = O(\tau).$$

В случае одномерного течения выпишем правую часть детально. Для КГД системы (ср. (4.11)):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2\bar{u} \frac{\partial}{\partial t} U_x - \tilde{C}_{xx} U_{xx} = \tau \frac{\partial}{\partial t} \tilde{D}_{xx} U_{xx} - \tau \tilde{D}_{xxx} U_{xxx} + O(\tau h);$$

для уравнений Навье–Стокса:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2\bar{u} \frac{\partial}{\partial t} U_x - \tilde{C}_{xx} U_{xx} = \nu \frac{\partial}{\partial t} D_{xx}^{NS} U_{xx} - \nu D_{xxx}^{NS} U_{xxx} + O(\tau h).$$

Заметим, что в ходе манипуляций с разностными операторами появляются члены порядка th , где h – шаг сетки по x . Мы их проигнорируем, хотя они в реальных задачах обычно значительно превосходят $O(t^2)$. Далее приходим к одномерному ОВУ для возмущения давления, аналогичному (5.3):

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + 2\bar{u} \frac{\partial p'}{\partial t} - (\bar{c}^2 - \bar{u}^2) p'_{xx} = v_1 \frac{\partial p'_{xx}}{\partial t} + v_2 \bar{u} p'_{xxx}. \quad (6.3)$$

Поясним суть проблемы, возникающей при разностной аппроксимации акустических граничных условий, на примере уравнения (6.3) с нулевой правой частью, т.е. при отсутствии вязкости. Применим преобразование Фурье к указанному уравнению, пользуясь той же формулой (5.4), что и в непрерывном случае:

$$-\omega^2 + 2\bar{u}\omega \frac{\sin kh}{h} + (\bar{c}^2 - \bar{u}^2) \frac{\sin^2 kh}{h^2} = 0. \quad (6.4)$$

Если бы мы анализировали не производные по времени (6.2), а полунеевные аппроксимации (6.1), это привело бы всего-навсего к замене символа w на $2 \operatorname{tg}(0.5 w Dt) / Dt$ с той же областью значений.

Уравнение (6.4) распадается на два уравнения, описывающие волны, бегущие вправо и влево:

$$\omega = (\bar{c} + \bar{u}) \frac{\sin kh}{h}, \quad \omega = -(\bar{c} - \bar{u}) \frac{\sin kh}{h}. \quad (6.5)$$

В первом случае каждому w соответствуют волновые числа¹ k_{11} и k_{12} , во втором – k_{21} и k_{22} :

$$k_{11} = \frac{1}{h} \arcsin r_+, \quad k_{12} = \frac{\pi}{h} - k_{11}, \quad k_{21} = -\frac{1}{h} \arcsin r_-, \quad k_{22} = -\frac{\pi}{h} - k_{21}, \quad (6.6)$$

где

$$r_+ = \omega h / (\bar{c} + \bar{u}), \quad r_- = \omega h / (\bar{c} - \bar{u}).$$

При $w = 0$ формула (6.6) задает решения вида $p'(x) = 1$ и $p'(x_j) = (-1)^j$. Последнее из них лишено физического смысла и не имеет аналога в непрерывном случае.

Рассмотрим, по примеру [15], гармоническую волну, распространяющуюся от точечного источника вправо. В нашей модели волна предстает, согласно (6.6), в следующем виде:

$$p' = \exp\{i\omega t - ik_{11}x\} + K_R \exp\{i\omega t - ik_{21}x\} + K_1 \exp\{i\omega t - ik_{12}x\} + K_2 \exp\{i\omega t - ik_{22}x\} \equiv e_{11} + K_R e_{21} + K_1 e_{12} + K_2 e_{22}. \quad (6.7)$$

В случае дифференциальных уравнений Эйлера, т.е. волнового уравнения (3.9), решение состоит всего из двух слагаемых, похожих на первые два из (6.7). Когда в некоторой точке x задается линейное граничное условие вида $L^+ p' = 0$, однозначно определяется число K_R , традиционно называемое коэффициентом отражения. Правое граничное условие для (6.7) выделяет плоскость в пространстве (K_R, K_1, K_2) . (Назовем K_1 и K_2 первым и вторым коэффициентами

¹ Из бесконечного числа решений имеет смысл рассматривать только те волновые числа, которые на разностной сетке дают различные решения (6.3).

осцилляции.) Таким образом, всякая волна, бегущая вправо, порождает не только встречную волну, но и две быстроосциллирующие волны, которые движутся в обе стороны.

Обратимся к первоначальной постановке разностной задачи. Она представляет собой систему нелинейных уравнений с начальными и граничными условиями и имеет единственное решение. Скорее всего, если выделить возмущение решения вида (6.7), оно будет лежать на упомянутой плоскости где-нибудь достаточно близко к началу координат, в силу, прежде всего, нелинейности исходной задачи. Поэтому представляется логичным изучать по отдельности частные случаи (6.7):

$$\begin{aligned} p' &= \exp\{i\omega t - ik_{11}x\} + K_R \exp\{i\omega t - ik_{21}x\}, \\ p' &= \exp\{i\omega t - ik_{11}x\} + K_1 \exp\{i\omega t - ik_{12}x\}, \\ p' &= \exp\{i\omega t - ik_{11}x\} + K_2 \exp\{i\omega t - ik_{22}x\} \end{aligned} \quad (6.8)$$

— и находить пересечения плоскости коэффициентов с координатными осями. Граничные условия необходимо выбирать так, чтобы каждый из коэффициентов K_R, K_1, K_2 , определяемых по (6.8), был достаточно мал.

Проанализируем различные способы дискретизации невязкого акустического граничного условия (3.15а)

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + (\bar{c} + \bar{u}) \frac{\partial p'}{\partial x} = 0$$

с вышеизложенной точки зрения. На первый взгляд, наилучшей представляется аппроксимация с центральной разностью:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + (\bar{c} + \bar{u}) p'_x = 0, \quad (6.9)$$

применяемая для задания значения p' в правом граничном узле. Образ Фурье данного уравнения совпадает с первым из уравнений (6.5), поэтому волна, падающая на границу, не должна отражаться. Подставляя в (6.9) поочередно функции из (6.8), убеждаемся в том, что

$$K_R = 0, \quad K_1 - \text{любое}, \quad K_2 = 0.$$

Следовательно, несмотря на нулевой коэффициент отражения, условие (6.9) способно вызвать осцилляции решения. Есть основания предполагать, что на практике первый коэффициент осцилляции принимает довольно большие значения.

Рассмотрим другие варианты правого граничного условия. Широко известно в литературе [9, 15] условие

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial p'}{\partial t} + \left(\frac{\partial p'}{\partial t} \right)_{j-1} \right] + (\bar{c} + \bar{u}) p'_x = 0, \quad (6.10)$$

имеющее образ Фурье

$$\omega \cos \frac{kh}{2} - (\bar{c} + \bar{u}) \frac{2}{h} \sin \frac{kh}{2} = 0.$$

В этом случае коэффициенты

$$K_R = \frac{\bar{c} - \bar{u}}{8\bar{c}} r_+^2 + O(r^3), \quad K_1 = -\frac{r_+^3}{8} + O(r^4), \quad K_2 = \frac{r_+^3}{8} + O(r^4),$$

где r — порядок величин r_+, r_- из (6.6).

В [11] предложена аппроксимация граничного условия с использованием левой разности второго порядка

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + (\bar{c} + \bar{u}) \frac{3p'_j - 4p'_{j-1} + p'_{j-2}}{2h} = 0. \quad (6.11)$$

Образ Фурье (6.11) есть

$$\omega - \frac{\bar{c} + \bar{u}}{h} [\sin kh (2 - \cos kh) + i(2 - 2\cos kh - \sin^2 kh)] = 0.$$

Получаем коэффициенты:

$$K_R = \frac{\bar{c} - \bar{u}}{4\bar{c}} r_+^2 + O(r^3), \quad K_1 = \frac{ir_+^3}{8} + O(r^4), \quad K_2 = \frac{ir_+^3}{8} + O(r^4).$$

Перечисленные выше разностные граничные условия аппроксимируют дифференциальное неотражающее условие со вторым порядком по h . Условие первого порядка

$$\partial p' / \partial t + (\bar{c} + \bar{u}) p'_x = 0$$

определяет следующие коэффициенты:

$$K_R = \frac{\bar{c} - \bar{u}}{4\bar{c}} ir_+ + O(r^2), \quad K_1 = -\frac{r_+^2}{4} + O(r^4), \quad K_2 = -\frac{r_+^2}{4} + O(r^3).$$

Для сравнения приведем неакустическое условие $p'_x = 0$, дающее совсем плохой результат:

$$K_R = \frac{\bar{c} - \bar{u}}{\bar{c} + \bar{u}} + O(r^2), \quad K_1 = -\frac{r_+}{2} + O(r^3), \quad K_2 = \frac{r_+}{2} + O(r^2).$$

Общий вывод можно сделать следующий. Граничное условие (6.9) является в определенном смысле неотражающим, но никак не “неосциллирующим”. Чтобы уменьшить коэффициент отражения, необходимо аппроксимировать граничное условие (6.9) как минимум со вторым порядком по h . Однако для уменьшения коэффициентов осцилляции следует выбрать такое приближение (6.9), которое имеет непохожий образ Фурье. Данному критерию лучше всего удовлетворяют уравнения (6.10) и (6.11).

Что касается разностной аппроксимации вязкого граничного условия (5.10), то здесь главное внимание следует уделить его невязкой части (первым двум слагаемым), о методе дискретизации которой говорилось выше. Операторы $p'_{xx} \in p'_{xx}$, снабженные малым параметром, могут аппроксимироваться обычными конструкциями на трехточечном шаблоне.

7. Применение акустических условий к моделированию тестовой задачи

В предыдущих параграфах были сформулированы неотражающие граничные условия, где фигурируют производные от возмущений и коэффициенты, зависящие от фоновых величин. Чтобы записать эти уравнения в терминах расчетных величин, обратимся вновь к принципам линеаризации систем уравнений, установленным в §2. Малость возмущений (ii) позволяет принять в качестве фона текущие локальные значения параметров. Производные возмущений, в силу (iii), можно отождествить с производными самих

параметров, как и поступают большинство разработчиков акустических граничных условий.

Обозначим условия неотражения волн давления на правой и левой границах (рис. 1) как $L^+(p) = 0$ и $L^-(p) = 0$. В случае невязкой среды на выходе задается уравнение, вытекающее из (3.15а):

$$L^+(p) \equiv \frac{\partial p}{\partial t} + (c + u) \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (7.1)$$

на входной границе —

$$L^-(p) \equiv \frac{\partial p}{\partial t} - (c - u) \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (7.2)$$

Для систем уравнений вязкой среды выпишем аналогичные условия, исходя из (5.10). Правое неотражающее условие:

$$L^+(p) \equiv \frac{\partial p}{\partial t} + (c + u) \frac{\partial p}{\partial x} + \tau^*(c + u) \left(2 \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} + (c + u) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (7.3)$$

Левое неотражающее условие:

$$L^-(p) \equiv \frac{\partial p}{\partial t} - (c - u) \frac{\partial p}{\partial x} - \tau^*(c - u) \left(2 \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} - (c - u) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (7.4)$$

В уравнениях (7.3), (7.4) время t^* вычисляется по формулам, отвечающим (5.7), (5.8):

$$\tau^* = \frac{\nu}{(c \pm u)^2} \left(\frac{\gamma - 1}{2 \text{Pr}} + \frac{2}{3} \right) \quad \text{è} \quad \tau^* = \tau \left(1 + \frac{c^2}{\gamma(c \pm u)^2} \right)$$

— для уравнений Навье–Стокса и КГД системы соответственно. Всюду знак \pm совпадает с индексом подразумеваемого оператора L^{\pm} . Аппроксимация граничных условий проводится в свете результатов §6. Все чисто пространственные операторы представляются в виде полусумм соответствующих выражений на верхнем и нижнем слое.

Для испытания методики, изложенной в данной работе, выбрано моделирование обтекания пластины конечной длины потоком воздуха при числе Маха внешнего течения $M = 0.01$; газ имеет показатель адиабаты $\gamma = 1.4$ и число Прандтля $\text{Pr} = 0.72$. Ввиду симметрии задачи рассматривается верхняя половина (рис. 1) области W^* . Пластина изотермична и имеет температуру T_w . Для расчетов использовалась полуневязная кинетически-согласованная схема из [1, 3].

Постановка начальных и граничных условий в основном повторяет [1]. В качестве начальных условий бралось течение с постоянными значениями параметров $u = u_0$, $v = 0$, $p = p_0$, $T = T_0$ в невязкой части течения и с плавным их изменением в области пограничного слоя.

Говоря о граничных условиях, вспомним принцип [13]: количество алгебраических уравнений на искусственной границе должно равняться числу входящих волн. На входной границе этих волн три, на выходной — одна, на верхней — обычно одна, либо три, если вертикальная скорость $v < 0$. Перечислим границы расчетной области и условия на них.

Вход: $T = T_0, L(p) = 0, u = u_0, v = 0;$
 выход: $\partial T / \partial x = 0, L^+(p) = 0, u + X \partial u / \partial x = u_0, \partial v / \partial x = 0;$
 Внешняя граница: $\partial \varphi / \partial y = 0$, где $j = T, p, u, v;$
 пластина: $T = T_w, \partial p / \partial y = 0, u = v = 0;$
 Линия симметрии: $\partial T / \partial y = 0, \partial p / \partial y = 0, \partial u / \partial y = 0, v = 0.$

Условия на обтекаемом теле типичны для КГД системы [2], и более подробно они обсуждаются в [11]. Условие третьего рода для скорости u на выходе содержит константу X , имеющую размерность длины. С точки зрения принципа входящих волн [13] логично трактовать его как модифицированное условие Дирихле с диссипацией [14].

Пластина имеет безразмерную длину 47. Промежуток перед пластиной длины 20, а позади пластины — 46. Ширина области равна 8. Расчеты велись на прямоугольной сетке 181×35 узлов по x, y . Сетка по y сгущается с приближением к пластине по закону геометрической прогрессии. Сетка по x сгущается в окрестности передней кромки пластины и равномерна в правой части области. Число Рейнольдса $Re \sim 10^3$, число Кнудсена $Kn \sim M Re^{-1} \sim 10^{-5}$. Температура пластины $T_w = 1.4 T_0$. В расчетах шаг по времени Δt близок к газодинамическому шагу Куранта.

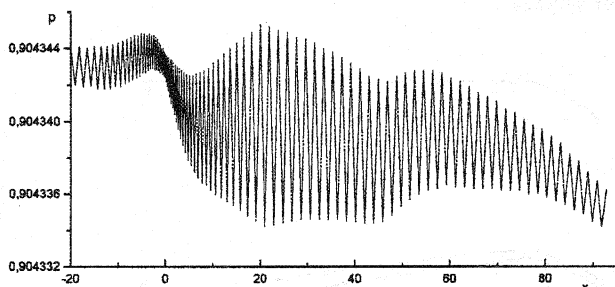


Рис.2. Распределение давления p/p_0 вдоль оси x при $y = 5.11$

В [11] проводилось сравнение осцилляций скорости u в двух расчетах: с акустическими условиями на входе и выходе и без их применения.

Показано, что при данных параметрах разностной задачи обойтись без неотражающих условий невозможно.

Проведены расчеты по КГД системе и уравнениям Навье–Стокса с вязкими и невязкими акустическими условиями, причем использовались различные аппроксимации невязкой (конвективной) части оператора L^+ . Результаты мало отличаются для моделей КГД и Навье–Стокса и практически совпадают при граничных условиях с вязкими членами и без них. На рис. 2 показано горизонтальное распределение давления при расчете квазигазодинамических уравнений с условиями (7.3), (7.4), где использовались разностные аппроксимации вида (6.11). Здесь полупериод колебания практически совпадает с шагом сетки по x , что соответствует быстроосциллирующему решению уравнения (6.3) с волновым числом k_{12} или k_{22} из

(6.6) для очень низкой частоты ω . Заметен также определенный скачок среднего давления у заднего края пластины.

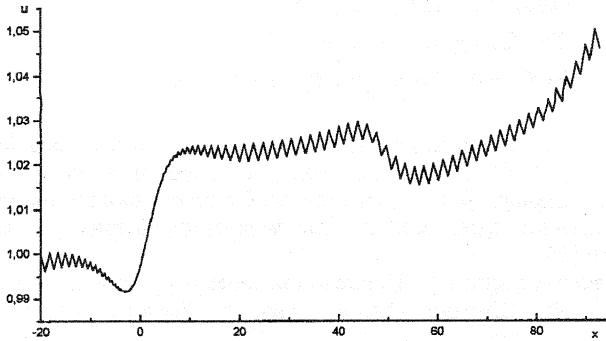


Рис.3. Распределение скорости u/u_0 вдоль оси x при $y=5.11$

На рис.3 показано горизонтальное распределение продольной скорости, полученное в том же расчете. Колебаниям скорости и давления можно дать одинаково-вую характеристику, за исключением одного обстоятельства: вблизи границ осцилляции u не затухают.

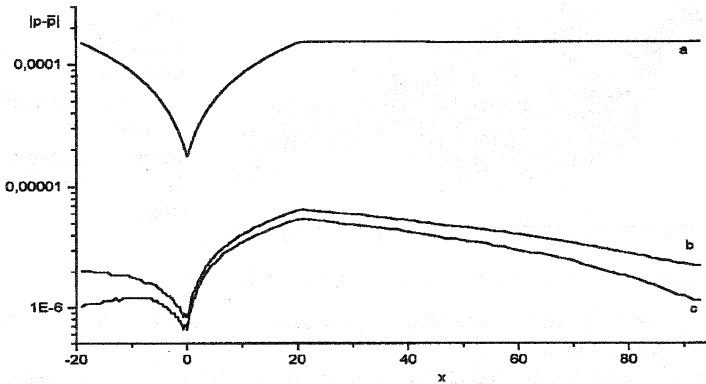


Рис.4. Амплитуда осцилляций давления p/p_0 при $y=5.11$:
 а — граничное условие (6.9); б — граничное условие (6.10);
 с — граничное условие (6.11)

Рис. 4 демонстрирует продольные распределения амплитуды осцилляций давления в трех расчетах по КГД системе: с невязкими акустическими условиями (7.1), (7.2), с использованием аппроксимаций (6.9) и (6.10), а также с вязкими условиями (7.3), (7.4), аппроксимированными по схеме с направленной разностью (6.11). Для нахождения осредненного давления \bar{p} применялся линейный фильтр.

Амплитуда колебаний резко падает там, где сетка сгущается, т.е. с приближением к передней кромке пластины. Амплитуда также падает в окрестностях левой и правой границ (у левой границы указанный эффект налагается на рост амплитуды за счет разрежения сетки). Последнее свойство наиболее характерно для расчета с условиями (6.11), где амплитуда осцилляций в целом меньше, чем в остальных расчетах. В случае применения “идеально” неотражающих разностных граничных условий (6.9) уровень шума при атмосферном фоновом давлении составляет около 120 дБ, тогда как для их приближений (6.10) и (6.11) шум равен примерно 80 дБ.

Применение неотражающих граничных условий для давления позволяет значительно улучшить воспроизведение физических характеристик течений при численном моделировании. Для расчета задачи, рассмотренной здесь, и других подобных задач обтекания следует располагать искусственные границы несколько дальше от твердого тела, но не настолько, как пришлось бы делать без использования акустических условий. Кроме того, предложенная методика дает свободу выбора задания граничных условий для скоростей и одного термодинамического параметра, чем автор воспользовался не в полной мере. В направлении, изложенном в данной работе, необходимы дальнейшие исследования.

В заключение автор выражает благодарность Б.Н. Четверушкину за всестороннюю поддержку работы.

Литература

1. Дородницын Л.В., Четверушкин Б.Н. Об одной неявной схеме для моделирования дозвукового течения газа // Матем. моделирование, 1997, т.9, N 5, с.108–118.
2. Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н. Кинетически согласованные схемы для моделирования течений вязкого теплопроводного газа // ЖВМ и МФ, 1988, т.28, N 11, с.1695–1710.
3. Дородницын Л.В., Четверушкин Б.Н., Шильников Е.В. О неявных кинетически согласованных схемах // Матем. моделирование, 1999, т.11, N 7, с.64–74.
4. Цынков С.В. Построение численных алгоритмов решения задач обтекания в областях с криволинейной границей: Диссертация. – М.: 1991.
5. Рябенкий В.С. Точный перенос краевых условий. Выч. механика деформируемого твердого тела, вып.1, 1990, с.129–145.
6. Engquist B., Majda A. Numerical radiation boundary conditions for unsteady transonic flow // J. Comp. Phys., 1981, v.40, N 1, pp.91–103.
7. Bayliss A., Turkel E. Far field boundary conditions for compressible flows // J. Comp. Phys., 1982, v.48, N 2, pp.182–199.
8. Givoli D. Non-reflecting boundary conditions // J. Comp. Phys., 1991, .94, N 1, pp.1–29.
9. Blaschak J., Kriegsmann G. A comparative study of absorbing boundary conditions // J. Comp. Phys., 1988, v.77, N 1, pp.109–139.
10. Tourrette L. Artificial boundary conditions for the linearized compressible Navier–Stokes equations // J. Comp. Phys., 1997, v.137, N 1, pp.1–37.
11. Дородницын Л.В. Акустические волны и граничные условия в моделях вязких дозвуковых течений: Препринт. – М.: Диалог-МГУ, 1999, 28 с.
12. Tourrette L. Artificial boundary conditions for the linearized compressible Navier–Stokes equations. II. The discrete approach // J. Comp. Phys., 1998, v.144, N 1, pp.151–179.
13. Thompson K.W. Time-dependent boundary conditions for hyperbolic systems // J. Comp. Phys., 1990, v.89, N 2, pp.439–461.
14. Gustafsson B., Sundström A. Incompletely parabolic problems in fluid dynamics // SIAM J. Appl. Math., 1978, v.35, N 2, pp.343–357.

15. Ramahi O.M. Complementary boundary operators for wave propagation problems // *J. Comp. Phys.*, 1997, v.133, N 1, pp.113–128.
16. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989, 616 с.