Л.В. Дородницын

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ РАЗНОСТНЫХ ЗАДАЧ С НЕОТРАЖАЮЩИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Введение

Многие задачи математической физики — в частности, в приложениях к газовой динамике и аэроакустике — ставятся в бесконечных пространственных областях. Для численного моделирования таких задач требуется, как правило, переходить к областям конечного размера с искусственными границами. Затем проводится дискретизация: в ограниченной области строится сетка, и дифференциальные уравнения аппроксимируются разностными.

Уже при переходе к конечной области необходимо сформулировать те или иные условия на искусственной границе. Эти условия не должны вызывать ложного отражения волн от границ, в связи с чем употребляется термин «неотражающие граничные условия». Каждая дискретная аппроксимация дифференциальной задачи подразумевает свою специфическую постановку неотражающих граничных условий. Даже в случае одномерного уравнения переноса данная проблема актуальна для большинства разностных схем.

Методика конструирования локальных неотражающих граничных условий для разностных схем излагается в [1, 2]. Там же имеются обзоры литературы по неотражающим условиям для дифференциальных задач. Однако в указанных работах не проводилось теоретического исследования корректности предложенных алгоритмов.

Наличие граничных условий специального вида может серьезно влиять на устойчивость схем. Строгие результаты достижимы лишь с привлечением операторной теории устойчивости [3]. Известный класс «нестандартных» краевых задач, для которого остро стоит вопрос устойчивости, — уравнение теплопроводности с нелокальными краевыми условиями и разностные схемы для него [4]. Гиперболические системы уравнений с локальными неотражающими условиями отличает то, что здесь задачи Коши являются нейтрально-устойчивыми, а граничные условия способны с легкостью менять данное свойство в обе стороны.

Настоящая работа продолжает исследование устойчивости дискретных начально-краевых задач, предпринятое в [5], где рассматривалась в числе прочих центрально-разностная схема для уравнения переноса. Основным результатом работы явилось практическое выяснение спектральной устойчивости ряда разностных операторов путем вычисления их собственных чисел при различном числе узлов сетки. Кроме того, для операторов, о которых пойдет речь ниже, доказано отсутствие изолированных точек спектра. Теперь же будут представлены доказательства достаточных условий устойчивости некоторых схем с неотражающими краевыми условиями.

1. О постановках разностных граничных условий

Дифференциальное уравнение переноса (конвекции), заданное на конечном отрезке, требует начальное условие и левое краевое условие:

$$\begin{aligned} &\partial u/\partial t + \partial u/\partial x = 0\,, \quad 0 < x < L,\ t > 0, \\ &u(x,\, t=0) = u^{(0)}(x)\,, \quad u(x=0,\, t) = 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Перейдем к полудискретному случаю. Пусть в (1) производные по x заменяются центральными разностями на равномерной сетке с шагом h, а производная по времени остается в дифференциальном виде:

$$du_j/dt + u_{\overset{\circ}{x}} = 0\,, \quad j = 1, \ldots, N{-}1, \tag{2}$$

где

$$\varphi_{\overset{\circ}{x}} = (\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1})/(2h)\,.$$

В численном алгоритме вместо производной d/dt применяется некоторый метод интегрирования по времени.

Уравнение (2), в отличие от своего дифференциального прототипа, нуждается не только в левом, но и в правом краевом условии. Как и выше, требуется начальное условие, т.е. задание u_j при $t = 0$. Далее, в силу очевидности, будем этот факт опускать.

Рассмотрим в качестве правых граничных условий для схемы (2) различные варианты дискретных неотражающих условий из [2]. Все эти граничные условия представляют собой аппроксимации уравнения переноса (1), не совпадающие с (2). Первый пример — использование направленной разности (аппроксимация первого порядка):

$$du_j/dt + u_{\bar{x}} = 0\,, \quad \varphi_{\bar{x}} = (\varphi_j - \varphi_{j-1})/h\,. \tag{3}$$

Данное уравнение задается в узле $j = N$. Это широко известный способ постановки граничного условия, исследованный, в частности, в [6].

Другой пример — использование трехточечной направленной разности, что дает аппроксимацию (1) со вторым порядком:

$$du_j/dt + u_{\bar{\bar{x}}} = 0\,, \quad \varphi_{\bar{\bar{x}}} = (3\varphi_j - 4\varphi_{j-1} + \varphi_{j-2})/(2h)\,. \tag{4}$$

Такое граничное условие обосновывалось в [1].

Обсудим левое граничное условие (1). Простейшая его замена — дискретное условие Дирихле

$$u_0 = 0$$

с нулевой погрешностью. Существуют также другие способы, среди которых отметим условие входящего потока [7]:

$$du_0/dt + (u_1 + u_0)/(2h) = 0\,, \tag{5}$$

нестационарное, как и основная схема (2), и обладающее аппроксимацией $O(h)$.

На практике необходимо знать, не нарушает ли устойчивости разностной схемы дополнительное условие, заданное на определенном участке границы расчетной области: в одномерном случае это левый и правый концы отрезка. Однако математическая формулировка проблемы требует рассматривать полную постановку задачи, где оператор включает все граничные условия. Для одномерного разностного уравнения следует изучать возможные комбинации левых и правых краевых условий. Для отдельных вариантов разностных операторов удается строго доказать их устойчивость.

2. Доказательства устойчивости задач для центрально-разностного уравнения переноса

Рассмотрим разностное уравнение переноса (2) и краевые условия для него: дискретное условие Дирихле слева и использование граничного оператора (3) справа. Имеем задачу:

$$\begin{aligned} &du_j/dt + u_{\mathring{x}} = 0\,, \quad j = 1, 2, \ldots, N{-}1, \\ &u_0 = 0\,, \quad du_N/dt + u_{\bar{x},N} = 0\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Устойчивость решения (6) была фактически доказана ранее в [6]. Далее мы повторим данный результат ради полноты изложения.

Утверждение 1. Решение u задачи (6) удовлетворяет энергетическому тождеству

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{N-1} u_j^2 h + u_N^2\,\frac{h}{2}\right) = -u_N^2. \tag{7}$$

Доказательство. В силу уравнений (6), справедлива цепочка равенств:

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N-1} u_j^2 h + \frac{d}{dt}\,u_N^2\,\frac{h}{2} = 2\sum_{j=1}^{N-1} u_j \frac{du_j}{dt}\,h + u_N \frac{du_N}{dt}\,h =$$

$$= -\sum_{j=1}^{N-1} u_j \left(u_{j+1} - u_{j-1}\right) - u_N \left(u_N - u_{N-1}\right) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{N-1} u_j u_{j+1} + \sum_{j=2}^{N-1} u_{j-1} u_j + u_N u_{N-1} - u_N^2 = -u_N^2.$$

Тем самым получена правая часть (7), и утверждение 1 доказано.

Аналогичным образом доказывается устойчивость решения задачи с потоковым краевым условием (5) слева:

$$\begin{aligned} &du_j/dt + u_{\mathring{x}} = 0\,, \quad j = 1, 2, \ldots, N{-}1, \\ &2\,du_0/dt + (u_1 + u_0)/h = 0\,, \quad du_N/dt + u_{\bar{x},N} = 0\,. \end{aligned} \tag{8}$$

В этом случае придется немного изменить энергетическую норму.

Утверждение 2. Решение u задачи (8) удовлетворяет тождеству

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=0}^{N-1} u_j^2 h + u_N^2 \,\frac{h}{2}\right) = -u_0^2 - u_N^2. \tag{9}$$

Доказательство. Отличием от (7) является первое слагаемое суммы (9), для которого имеем:

$$\frac{d}{dt}\, u_0^2 h = 2u_0 \frac{du_0}{dt}\, h = -u_0 \left(u_1 + u_0\right) = -u_0^2 - u_0 u_1\,.$$

Второй член исчезает после суммирования по всем j, и этим доказывается утверждение 2.

Теперь перейдем к схеме с левым краевым условием Дирихле и правым краевым условием $O(h^2)$ из (4). Задача имеет вид:

$$\begin{aligned} &du_j/dt + u_{\mathring{x}} = 0\,, \quad j = 1, 2, \ldots, N{-}1, \\ &u_0 = 0\,, \quad du_N/dt + u_{\bar{x},N} = 0\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь мы применим существенно иное скалярное произведение, содержащее разностную производную $u_{\bar{x}}$.

Утверждение 3. Решение u задачи (10) удовлетворяет тождеству

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{N-1} (u_{\bar{x}})_j^2 h + (u_{\bar{x}})_N^2 \,\frac{h}{2}\right) = -(u_{\bar{x}})_1^2 - (u_{\bar{x}})_N^2. \tag{11}$$

Доказательство. Введем новую сеточную функцию

$$v_j = u_{\bar{x},j}\,,\ j = 1, \ldots, N,$$

и получим из задачи (10) в качестве ее следствия начально-краевую задачу для функции v. Далее проведем анализ устойчивости уже этой задачи.

Итак, если к центрально-разностной схеме применить оператор левой разностной производной $\varphi_{\bar{x}}$, то два оператора коммутируют, и тем самым функция v также удовлетворяет центрально-разностной схеме:

$$dv_j/dt + v_{\overset{\circ}{x}} = 0\,, \quad j = 2, \ldots, N{-}1. \tag{12}$$

Обратимся к левому краевому условию $u_0 = 0$. Учитывая его, имеем:

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{h}\,\frac{du_1}{dt} = -\frac{1}{2h^2}(u_2 - u_0) = -\frac{1}{2h^2}(u_2 - u_1 + u_1 - u_0) = -\frac{1}{2h}(v_2 + v_1)\,.$$

В терминах функции v получается краевое условие

$$dv_1/dt + (v_2 + v_1)/(2h) = 0\,. \tag{13}$$

Выпишем правое краевое условие (10) и основное уравнение схемы в узле $(N{-}1)$:

$$\frac{du_N}{dt} + \frac{1}{2h}(3u_N - 4u_{N-1} + u_{N-2}) = 0\,,$$
$$\frac{du_{N-1}}{dt} + \frac{1}{2h}(u_N - u_{N-2}) = 0\,.$$

Вычитая два равенства, получаем:

$$\frac{d}{dt}(u_N - u_{N-1}) + \frac{1}{h}(u_N - 2u_{N-1} + u_{N-2}) = 0\,,$$

то есть

$$h\,dv_N/dt + v_N - v_{N-1} = 0\,. \tag{14}$$

Таким образом, формулы (12)–(14) составляют систему уравнений:

$$dv_j/dt + v_{\overset{\circ}{x}} = 0\,, \quad j = 2, \ldots, N{-}1,$$
$$2\,dv_1/dt + (v_2 + v_1)/h = 0\,, \quad dv_N/dt + v_{\bar{x},N} = 0\,.$$

Данная задача аналогична ранее сформулированной (8). Следовательно, справедливо энергетическое тождество вида (9):

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{N-1} v_j^2 h + v_N^2\,\frac{h}{2}\right) = -v_1^2 - v_N^2.$$

Возвращаясь к функции u, получаем искомую формулу (11).

Чтобы ответить на вопрос, доказывает ли равенство (11) устойчивость задачи (10), необходимо сказать, что выражение под знаком производной является квадратом нормы при задании $u_0 = 0$. Кроме того, эта норма связана с обычной сеточной гильбертовой нормой односторонним неравенством

$$\sum_{j=1}^{N-1} u_j^2 h + u_N^2 \frac{h}{2} \le \frac{L^2}{2} \left(\sum_{j=1}^{N-1} (u_{\bar{x}})_j^2 h + (u_{\bar{x}})_N^2 \frac{h}{2} \right).$$

Тем самым у нормы решения задачи (10) рост во времени ограничен сверху константой, зависящей от начальных условий.

Литература

1. *C.W. Rowley, T. Colonius.* Discretely nonreflecting boundary conditions for linear hyperbolic systems // J. Comp. Phys., 2000, v.157, No.2, pp.500–538.
2. *Л.В. Дородницын.* Искусственные граничные условия при численном моделировании дозвуковых течений газа // ЖВМ и МФ, 2005, т.45, № 7, с.1251–1278.
   (*L.V. Dorodnitsyn.* Artificial boundary conditions for numerical simulation of subsonic gas flows // Comput. Math. Math. Phys., 2005, v.45, pp.1209–1234.)
3. *А.А. Самарский.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989.
   (*A.A. Samarskii.* The Theory of Difference Schemes. – Marcel Dekker inc., New York and Basel, 2001.)
4. *А.В. Гулин, Н.И. Ионкин, В.А. Морозова.* Устойчивость нелокальных разностных схем. – М.: Изд-во ЛКИ, 2008.
5. *Л.В. Дородницын.* Аналитическое и численное исследование спектров трехточечных разностных операторов // Прикладная математика и информатика № 27 – М.: МАКС Пресс, 2007, с.25–45.
   (*L.V. Dorodnitsyn.* Analytical and numerical investigation of the spectra of three-point difference operators // Comput. Math. Model., 2008, v.19, pp.343–358.)
6. *А.А. Самарский, А.В. Гулин.* Устойчивость разностных схем. – М.: Наука, 1973.
7. *C. Hirsch.* Numerical Computation of lnternal and External Flows Vol. 2: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows. – Wiley, New York, 1990.