О.В. Дрожжина

О ЧИСЛЕННОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В РАМКАХ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

В данной работе исследуется обратная задача для квазилинейного параболического уравнения. Такие задачи встречаются во многих областях математической физики. Различные постановки прямой задачи для этого уравнения и условия, при которых существует ее решение, исследуются в работах [1] – [7]. Кроме того, данное уравнение может быть использовано для описания модели функционирования иерархической структуры [8]. Краевые и начальное условия берутся именно из этой модели. В работе изучается обратная задача определения нелинейной правой части в квазилинейном параболическом уравнении и доказывается теорема единственности. Также предлагается метод для численного решения обратной задачи, основанный на параметрическом представлении искомой правой части. В результате обратная задача сводится к поиску из условия минимума невязки вектора неизвестных коэффициентов параметрического представления искомой функции.

1. Прямая задача

Пусть функция $p(x, t)$ является решением задачи:

$$p_t = \left(k(p)p_x\right)_x + F(p),\ (x, t)\in(0, 1)\times(0, T) = Q_T, \tag{1}$$

$$p(x,0) = p_0(x) \ge 0,\ x\in[\,0, 1\,], \tag{2}$$

$$p_x|_{x=0} = 0,\ t\in[0,T], \tag{3}$$

$$p_x|_{x=l} = 0,\ t\in[0,T], \tag{4}$$

где

$$p_0(x)\in C^2[\ 0,\ l\ ],\ p_0'(0) = p_0'(l) = 0\ ,\ p_0'(x) < 0,\ x\in(0,l), \tag{5}$$

$$k(s)\in C^2[R_1,R_2],\ k(s)\ge k_0 = const > 0,\ s\in[R_1,R_2],$$

где

$$R_1 = \min_{Q_T} p(x,t)\ , R_2 = \max_{Q_T} p(x,t). \tag{6}$$

$$F(s)\in C^1[R_1,R_2],\ F(s)\ge 0,\ F'(s)\ge 0,\ s\in[R_1,R_2], \tag{7}$$

При ограничениях (5) – (7) решение $p(x,t)\in C^{2,1}(\overline{Q_T})$ задачи (1) – (4), имеющее производные p_t, p_{xx}, удовлетворяющие условиям Липшица по обеим переменным, существует и единственно [9].

Лемма 1. При условиях (5) – (7), решение $p(x,t)$ задачи (1) – (4) удовлетворяет неравенству $p_x(x,t)\le 0,\ (x,t)\in Q_T$, причем $p_x(x,t)<0$ почти всюду в Q_T.

Лемма 2. При условии $(k(p_0(x))p_0'(x))'+F(p_0(x))>0,\ x\in[0,l]$ и условиях (5) – (7), для решения задачи (1) – (4) имеет место оценка $p_t(x,t)\ge 0,\ (x,t)\in Q_T$.

Доказательство этих лемм аналогично [10].

2. Обратная задача

Рассмотрим следующую обратную задачу. Пусть дано дополнительное условие

$$p(0,t)=f(t)\ ,\ f(0)=p_0(0),\ f'(t)>0\ ,\ f\in C^1[0,T]\ . \qquad (8)$$

При известных функциях $k(s), p_0(x), f(t),\ x\in[0,\ l],\ t\in[0,\ T]$ и $F(s),\ s\in[p_0(0), p_0(l)]$, удовлетворяющих условиям (5) - (8), требуется определить решение обратной задачи (1) – (4), (8) - функции $F(p), p(x, t)$ такие, что

1) $p(x,t)\in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$, где $Q_T=\{(x,t):0<x<l,\ 0<t<T\}$,

2) $F(s)\in C^1[R_1,R_2],\ F(s)\ge 0,\ F'(s)\ge 0,\ s\in[R_1,R_2]$,

3) $F(p), p(x, t)$ удовлетворяют соотношениям (1) – (4), (8).

Лемма 3. Пусть $\varphi(x, t)$ решение задачи

$$\varphi_t+q(x,t)\varphi_{xx}+r(x,t)\varphi=0,\ (x,t)\in Q_\tau,$$

$$\varphi_x(0,t)=0,\ \varphi_x(l,t)=\chi(t),\ \chi(t)<0,\ t\in[0,\tau),\ \chi(\tau)=0, \text{где} \quad \chi(t) \quad -$$

$$\varphi(x,\tau)=0,\ x\in[0,l],$$

бесконечно дифференцируемая функция, $q(x, t) > 0$, $q(x, t)$ удовлетворяет условию Липшица по x и по t, $r(x, t)$ ограничена, $r_x\le 0$. Тогда $\varphi_x\le 0$ в $\overline{Q_\tau}$, $\varphi<0$ в Q_τ.

Доказательство. Рассмотрим задачу при $q=q_j,\ r=r_j$, где $\{q_j(x,t)\}$, $\{r_j(x,t)\}$ последовательности бесконечно дифференцируемых функций, сходящихся соответственно к $q(x, t)$ и $r(x, t)$ в $H^{\alpha,\alpha/2}\left(\overline{Q_\tau}\right)$, $0<\min\limits_{Q_\tau} q\le q_j\le\max\limits_{Q_\tau} q\ ,\ \min\limits_{Q_\tau} r\le r_j\le\max\limits_{Q_\tau} r.$

Таким образом, пусть $\varphi^j(x,t)$ решение задачи:

$$\varphi_t^j + q_j(x,t)\varphi_{xx}^j + r_j(x,t)\varphi^j = 0,\ (x,t) \in Q_\tau,$$
$$\varphi_x^j(0,t) = 0,\ \varphi_x^j(l,t) = \chi(t),\ \chi(t) < 0,\ t \in [0,\tau),\ \chi(\tau) = 0, \tag{9}$$
$$\varphi^j(x,\tau) = 0,\ x \in [0,l]\ .$$

Так как выполнен принцип максимума (коэффициенты ограничены и $q^j > 0$), то, следовательно, если $\varphi^j|_{x=0} \le 0$, $\varphi^j|_{x=l} \le 0$, то и $\varphi^j \le 0$ в $\overline{Q_\tau}$.

При $x = 0$ возможны два случая: $\varphi^j > 0$ или $\varphi^j \le 0$. Если $\varphi^j|_{x=0} > 0$, то опять возможны два случая либо φ^j в точке $x = 1$ больше, чем φ^j в точке $x = 0$, либо меньше. Если больше, то так как $\chi(t) < 0$, то максимум будет достигаться во внутренней точке. Если меньше, то можно продолжить задачу четным образом на отрезок [-l, 0], и тогда точка $x = 0$ станет внутренней точкой, и в ней будет достигаться экстремальное значение, что противоречит принципу максимума. Если $\varphi^j|_{x=0} \le 0$, то в точке $x = 1$ возможны два случая: либо $\varphi^j|_{x=l} > 0$, либо $\varphi^j|_{x=l} \le 0$. Если $\varphi^j|_{x=l} > 0$, то максимум достигается внутри $[0, \tau]\times[0, 1]$, и это противоречит принципу максимума. Если $\varphi^j|_{x=l} \le 0$, то, следовательно, $\varphi^j \le 0$ в Q_τ. Таким образом, $\varphi^j(x,t) \le 0$ в $\overline{Q_\tau}$.

Аналогично [11] $\varphi^j \to \varphi$ при $j \to \infty$ в $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}$ и, следовательно, $\varphi(x, t) \le 0$ в $\overline{Q_\tau}$.

Продифференцируем уравнение (9) по x:

$$(\varphi_x^j)_t + q_j(\varphi_x^j)_{xx} + (q_j)_x(\varphi_x^j)_x + r_j\varphi_x{}^j = -(r_j)_x\varphi \equiv f,\ (x,t) \in Q_\tau,$$
$$\varphi_x^j(0,t) = 0,\ \varphi_x^j(l,t) = \chi(t),\ \chi(t) < 0,\ t \in [0,\tau),\ \chi(\tau) = 0,$$
$$\varphi_x^j(x,\tau) = 0\ ,\ x \in [0,l].$$

Так как $\chi(t) < 0$ и $f \le 0$, то по принципу максимума (если коэффициенты и правая часть ограничены, $q_j > 0$ и $\varphi_x^j|_{x=0} \le 0$, $\varphi_x^j|_{x=l} \le 0$, то $\varphi_x^j \le 0$ в $\overline{Q_\tau}$) $\varphi_x^j(x,t) \le 0$ в $\overline{Q_\tau}$.

Также, как и раньше, доказывается, что $\varphi_x^j \to \varphi_x$ в $\overline{Q_\tau}$. Таким образом, $\varphi_x \le 0$ в $\overline{Q_\tau}$.

От противного докажем, что $\varphi < 0$ в Q_τ.

Пусть существует точка $(x_0,t_0) \in Q_\tau : \varphi(x_0,t_0) = 0$. Так как $\varphi_x \le 0$, то $\varphi(0,t_0) \ge 0$ и так как $\varphi_t(0,t) \ge 0$ (аналогично лемме 2), то $\varphi(0,t) = 0$, $t_0 \le t \le \tau$. Тогда из того, что $\varphi_x(0,t) = 0$ следует, что $\varphi(x,t) \equiv 0$ при $0 \le x \le l$, $t_0 \le t \le \tau$.

Получили противоречие с условиями леммы. Следовательно,

$\varphi < 0$ в Q_τ. Лемма 3 доказана.

Теорема. Если функции $k(p), F_i(p)$, $i = 1,2$, удовлетворяют условиям (6), (7) и соотношениям

$$F_1(p_0(x)) = F_2(p_0(x)),\ [k(p_0(x))p_0'(x)]' + F_1(p_0(x)) > 0,$$

$x \in [0,l]$, $F_i''(\xi) \geq 0$, $\xi \in [p_0(0), f(T)]$, $i = 1,2$, то решение обратной задачи (1) – (4), (8) единственно, то есть

$$F_1(\xi) = F_2(\xi),\ \xi \in [p_0(0), f(T)],\quad p_1(x,t) = p_2(x,t),\ (x,t) \in \bar{Q}_T.$$

Доказательство. Для любой $\varphi \in C^{2,1}\left(\overline{Q_\tau}\right)$ и для любого τ, $0 < \tau \leq T$, выполнено соотношение:

$$\iint\limits_{Q_\tau} F(p)\varphi dxdt = \iint\limits_{Q_\tau}\left[p_t - b(p)_{xx}\right]\varphi dxdt = \int_0^l \left[p(x,\tau)\varphi(x,\tau) - p_0\varphi(x,0)\right]dx -$$

$$-\int_0^\tau [b(p(0,t))\varphi_x(0,t) - b(f(t))\varphi_x(l,t)]dt - \iint\limits_{Q_\tau}\left[p\varphi_t + b(p)\varphi_{xx}\right]dxdt\ .$$

Предположим, что существуют два различных решения: $\{F_1(p_1), p_1\}$ и $\{F_2(p_2), p_2\}$. Тогда справедливо:

$$\iint\limits_{Q_\tau}\left\{(p_1 - p_2)\varphi_t + \left[b(p_1) - b(p_2)\right]\varphi_{xx}\right\}dxdt = \int_0^l \left[p_1(x,\tau) - p_2(x,\tau)\right]\varphi(x,\tau)dx -$$

$$-\int_0^\tau \left\{\left[b(p_1(0,t)) - b(p_2(0,t))\right]\varphi_x(0,t)\right\}dt + \iint\limits_{Q_\tau}\left[F_2(p_2) - F_1(p_1)\right]\varphi dxdt\ .$$

Следовательно, для $\varphi(x,t)$, удовлетворяющей условиям

$$\varphi(x,\tau) = 0\ ,\ \varphi_x(0,t) = 0\ ,\ \varphi_x(l,t) = \chi(t)\ ,\ \chi(t) < 0\ ,\ t < \tau\ ,\ \chi(\tau) = 0\ ,$$

получим

$$\iint\limits_{Q_\tau}\left\{(p_1 - p_2)\varphi_t + \left[b(p_1) - b(p_2)\right]\varphi_{xx} + \left[F_1(p_1) - F_1(p_2)\right]\varphi\right\}dxdt =$$

$$= \iint\limits_{Q_\tau}\left[F_2(p_2) - F_1(p_2)\right]\varphi dxdt\ .$$

Введем функции:

$$q(x,t) = \int_0^1 k(p_2(x,t) + \theta(p_1(x,t) - p_2(x,t)))d\theta > 0\ ,$$

$$r(x,t) = \int_0^1 F_1'(p_2(x,t) + \theta(p_1(x,t) - p_2(x,t)))d\theta\ .$$

Получим

$$\iint\limits_{Q_\tau}\{\varphi_t + q\varphi_{xx} + r\varphi\}(p_1 - p_2)dxdt = \iint\limits_{Q_\tau}[F_2(p_2) - F_1(p_2)]\varphi dxdt \ .$$

Покажем, что $q(x, t)$ удовлетворяет условию Липшица по x и по t. Для любых точек (x_1,t) и (x_2,t) имеем равенство

$$\left|q(x_2,t) - q(x_1,t)\right| \le \| k_1' \|_{C[a_0,b]} \max\{\| (p_1)_x \|_{C(\overline{Q_T})} \ , \ \| (p_2)_x \|_{C(\overline{Q_T})}\} \, | \, x_2 - x_1 \, | \, ,$$

где $a_0 = p_0(0)$, $b = \max\{p_1(0,T), p_2(0,T)\}$.

Аналогично проводится доказательство в отношении условия Липшица по переменной t.

Функция r ограниченна, так как F удовлетворяет условию Липшица. Покажем, что $r_x \le 0$:

$$r_x = \int\limits_0^1 F_1''(p_2 + \theta(p_1 - p_2))[\theta(p_1)_x + (1-\theta)(p_2)_x]d\theta \le 0$$

так как $F''(s) \ge 0, \ p_x \le 0$. Поэтому можем выбирать $\varphi(x, t)$, удовлетворяющую условиям леммы 3. Таким образом, получим

$$I_\tau \equiv \iint\limits_{Q_\tau}[F_2(p_2) - F_1(p_2)]\varphi dxdt = 0 \, . \qquad (10)$$

Так как $F_1(p) \not\equiv F_2(p)$, то предположим, для определенности, что $F_1(\xi) > F_2(\xi)$, при $\xi \in [p_0(0), p_0(0) + 2\varepsilon]$так, что $F_1(\xi) - F_2(\xi) > \varepsilon_1$ при $p_0(0) + \varepsilon/2 < \xi \le p_0(0) + \varepsilon, \ \varepsilon > 0, \ \varepsilon_1 > 0$. Если взять τ как решение уравнения $p(x,\tau) = p_0(0) + \varepsilon$, то $F_1(\xi) - F_2(\xi) > \varepsilon_1$ в $\overline{Q_\tau}$, а так как $\varphi < 0$, то $I_\tau < 0$. Получили противоречие с (10). Следовательно, $F_1(\xi) = F_2(\xi)$ и $p_1 = p_2$. Теорема доказана.

3. Численное решение обратной задачи

Для решения обратной задачи (1), (4) - (8), решение которой $F(p)$ априори принадлежит компакту D, рассматривается $F(p)$ в виде [12]:

$F(p) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(p) \subset D$, где φ_i – заданные функции. Надо найти α_i.

Подставляем $F(p)$ в таком виде в уравнение и находим $p(0,t,\overline{\alpha})$– решение прямой задачи (1) - (4).

Для минимизации функционала:

$$J = \frac{1}{2}\int\limits_0^T [p(0,t,\overline{\alpha}) - f(t)]^2 \, dt$$

используем градиентный метод. Для этого сначала нужно найти близкую к сопряженной задачу с обратным направлением времени и через ее решение и через решение прямой задачи найти значение градиента J'_{α_i}.

Рассмотрим вопрос нахождения сопряженной задачи.

Составим функционал Лагранжа:

$$\Phi = \frac{1}{2}\int_0^T [p(0,t,\overline{\alpha}) - f(t)]^2 dt + \iint_{Q_T} \psi(x,t)[(k(p)p_x)_x + F(p) - p_t]dxdt +$$

$$+ \int_0^l \gamma(x,0)[p(x,0) - p_0(x)]dx + \int_0^T [\eta(0,t)p_x(0,t) + \eta(l,t)p_x(l,t)]dt ,$$

где ψ, γ и η – неопределенные множители Лагранжа.

Пусть теперь функция $F(p)$ получила некоторую вариацию $\Delta F(p)$. Следовательно, $p(x, t)$ изменится на некоторую величину $\Delta p(x, t)$, и $\Delta p(x, t)$ будет удовлетворять следующей краевой задаче:

$$\Delta p_t = (k(p)\Delta p_x)_x + k_p p_x \Delta p_x + (k_p p_{xx} + k_{pp}(p_x)^2 + F_p)\Delta p + \Delta F(p) ,$$

$$\Delta p(x,0) = 0,$$

$$\Delta p_x(0,t) = \Delta p_x(l,t) = 0.$$

Вариацию функции Лагранжа можно представить в виде:

$$\delta\Phi = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 ,$$

где

$$I_1 = \int_0^T [p(0,t,\overline{\alpha}) - f(t)]\Delta p(0,t)dt ,$$

$$I_2 = \iint_{Q_T} \psi(x,t)[(k(p)\Delta p_x)_x + k_p p_x \Delta p_x - \Delta p_t + (k_p p_{xx} + k_{pp}(p_x)^2 + F_p)\Delta p]dxdt ,$$

$$I_3 = \int_0^l \gamma(x,0)\Delta p(x,0)dx + \int_0^T [\eta(0,t)\Delta p_x(0,t) + \eta(l,t)\Delta p_x(l,t)]dt ,$$

$$I_4 = \iint_{Q_T} \psi(x,t)\Delta F(p)dxdt ,$$

Преобразуем выражение для I_2 с целью исключения производных Δp под знаком повторного интеграла. Вначале рассмотрим интеграл:

$$v_1 = \int_0^l \psi(k\Delta p_x)_x dx .$$

Используя интегрирование по частям, получим:

$$v_1 = \int_0^l \psi(k\Delta p_x)_x dx = \psi k\Delta p_x \Big|_0^l - \int_0^l k\psi_x \Delta p_x dx = \psi k\Delta p_x \Big|_0^l - k\psi_x \Delta p \Big|_0^l +$$

$$+ \int_0^l (k\psi_{xx} + k_p p_x \psi_x)\Delta p dx.$$

Аналогично преобразуем выражения:

$$v_2 = \int_0^l \psi k_p p_x \Delta p_x dx = \psi k_p p_x \Delta p \Big|_0^l - \int_0^l [k_p p_{xx}\psi + k_{pp}(p_x)^2 \psi + k_p p_x \psi_x]\Delta p dx \ ,$$

$$v_3 = \int_0^T \psi \Delta p_t dt = \psi \Delta p \Big|_0^T - \int_0^T \psi_t \Delta p dt \ .$$

Подставим все в I_2, получим:

$$I_2 = \int_0^T \int_0^l [(k\psi_x)_x - k_p p_x \psi_x + F_p \psi + \psi_t]\Delta p dx dt +$$

$$+ \int_0^T [k\psi \Delta p_x - (k\psi_x - k_p p_x \psi)\Delta p \Big|_0^l] dt - \int_0^l \psi \Delta p \Big|_0^T dx \ .$$

Таким образом, выражение для функционала Лагранжа имеет вид:

$$\delta\Phi = \int_0^T [p(0,t,\overline{\alpha}) - f(t)]\Delta p(0,t) dt + \iint_{Q_T} [(k\psi_x)_x - k_p p_x \psi_x + F_p \psi + \psi_t]\Delta p dx dt +$$

$$+ \int_0^T k\psi \Delta p_x - [k\psi_x - k_p p_x \psi]\Delta p \Big|_0^l dt - \int_0^l \psi \Delta p \Big|_0^T dx +$$

$$+ \int_0^l \gamma(x,0)\Delta p(x,0) dx + \int_0^T [\eta(0,t)\Delta p_x(0,t) + \eta(l,t)\Delta p_x(l,t)] dt +$$

$$+ \iint_{Q_T} \psi(x,t)\Delta F(p) dx dt \ .$$

Учитывая условия стационарности $\delta\Phi = 0$ и приравнивая нулю коэффициенты при $\Delta p(x, t)$, $\Delta p(0, t)$, $\Delta p(\mathrm{l}, t)$, $\Delta p(x, T)$ и так далее, получим следующую систему уравнений, определяющую краевую задачу с обратным направлением времени:

$$-\psi_t = (k(p)\psi_x)_x - k_p p_x \psi_x + F_p \psi \ ,$$

$$\psi(x,T) = 0 \ ,$$

$$k\psi_x\Big|_{x=l} = 0 \ ,$$

$$-k\psi_x\Big|_{x=0} = p(0,t) - f(t) \ ,$$

Используя последнее граничное условие, преобразуем выражение для вариации функционала невязки:

$$\delta J = \int_0^T [p(0,t,\overline{\alpha}) - f(t)]\Delta p(0,t)dt = -\int_0^T k(p(0,t))\psi_x(0,t)\Delta p(0,t)dt =$$

$$= \iint_{Q_T} (k\psi_x \Delta p)_x dxdt =$$

учитывая $\psi(x, T) = 0$, $\Delta p(x, 0) = 0$, получим:

$$= \iint_{Q_T} \psi \Delta F(p) dxdt.$$

так как $F(p)$ представлялось в виде $F(p) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(p)$, то, можно записать

$$\Delta F(p) = \sum_{i=1}^{n} \Delta \alpha_i \varphi_i(p).$$

И, следовательно, $\delta J = \sum_{i=1}^{n} \Delta \alpha_i \iint_{Q_T} \psi \varphi_i(p) dxdt.$

В итоге, для составляющих получаем:

$$J'_{\alpha_i} = \iint_{Q_T} \psi \varphi_i(p) dxdt.$$

Таким образом, для того чтобы решить обратную задачу, достаточно минимизировать невязку градиентными методами. Для этого на каждом шаге градиентного спуска надо сначала решить прямую задачу, потом, через решение $p(x,t)$ прямой задачи, найти решение $\psi(x,t)$ задачи с обратным направлением времени близкой к сопряженной. Далее, используя решения прямой и сопряженных задач, найти J'_{α_i}. При этом на каждом шаге α^{j+1} берутся по следующей формуле:

$$\alpha_i^{j+1} = \alpha_i^j - \beta_i J'_{\alpha_i} \quad i = 1...5 \ ,$$

где β_i вычисляются исходя из минимума невязки как функции одной переменной β. Таким образом, реализуется метод наискорейшего спуска. При выполнении условия $J \leq \varepsilon$ счет прекращается.

Представленный метод решения обратной задачи на компактном множестве, используемый в схожих постановках [11] - [15], позволяет значительно повысить точность вычисления градиента невязки по сравнению с разностными аналогами.

Литература

1. Зельдович Я.Б., Компанеец А.С. Теория распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сб. К 70–летию академика А.Ф. Йоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950, с. 61-71.
2. Олейник О.А., Калашников А.С., Чжоу Юй-Линь. Уравнения типа нестационарной фильтрации//Изв.АН СССР, 1958, т.22, №5, с. 667-704.
3. Самарский А.А., Соболь И.М. Примеры численного расчета температурных волн// ЖВМ и МФ, 1963, т. 3, № 4, с. 702-719.
4. Самарский А.А., Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемными источниками тепла // Докл. АН СССР, 1976, т. 227, № 2, с. 321 – 324.
5. Самарский А.А., Еленин Г.Г., Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Горение нелинейной среды в виде сложных структур // Докл. АН СССР, 1977, т. 237, № 6, с. 1330-1333.
6. Еленин Г.Г., Самарский А.А., Курдюмов С.П. Нестационарные диссипативные структуры в нелинейной теплопроводной среде // ЖВМ и МФ, 1983, т. 23, № 2, с. 380 - 390.
7. Галактионов В.А., Дородницын В.А., Еленин Г.Г. Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1986, т. 28, с. 95-199.
8. Михайлов А.П. Модель коррумпированных властных иерархий // Математическое моделирование, 1999, Т. 11, № 1, с. 3-17.
9. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.И. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967, 736 с.
10. Дрожжина О.В., Щеглов А.Ю. Об одной обратной задаче для модели иерархической структуры //Прикладная математика информатика, 2001, №7, с.82-89.
11. Музылев Н.В. Теоремы единственности для некоторых обратных задач теплопроводности //ЖВМ и МФ, 1980, т. 20, № 2, с. 388-400.
12. Алифанов О.М. Артюхин Е.А. Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988, 285 с.
13. Щеглов А.Ю. Обратная задача для квазилинейного уравнения теплопроводности // Вестн. Моск. ун-та, Сер. 15, Вычисл. матем. и киберн., 1987, № 2, с. 8-11.
14. Lorenzi A. An inverse problem for a semilinear parabolic equation // Ann. Mat. Pura Appl, 1982, vol. 82, p. 145-166.
15. Cannon J.R., DuChateau P. Structural identification of an unknown source term in a heat equation // J. Inv. problem. 1998, vol.14, no.3, p. 535-551.